TEORIA DE LOS REACTORES NUCLEARES HOMOGENEOS I*

Efecto del espectro de neutrones en las condiciones estacionarias de un reactor.

Alejandro Medina

Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Diciembre 15, 1953)

RESUMEN

This is the first of a series of papers devoted to the theory of nuclear reactors. The ordinary diffusional approcch for homogeneous reactors is first completed considering the spectra of fast neutrons produced in fission and the fast fission effect. This results in the obtention of integro-differential diffusion equations which are solved. The theory naturally leads to a distinction between fast, intermediate and slow reactors. Of course, diffusion theory equations are not expected to represent the actual behaviour of a fast pile. Nevertheless the method illustrates the

*Trabajo presentado en el Congreso Científico Mexicano, Septiembre, 1951.

features of the steps to be taken when transport theory is used. Critical equations and inhour equations are given.

In this first paper only the stationary state is treated. Later pile kinetics and transport theory methods will be considered.

INTRODUCCION

En la teoría de la pila es costumbre hacer ciertas suposiciones respecto a los procesos físicos que se verifican en un reactor nuclear capaz de sostener una reacción en cadena. Estas suposiciones que se introducen con el objeto de simplificar el análisis matemático del reactor se refieren principalmente al mecanismo de producción y operación de los neutrones dentro del mismo y pueden resumirse de la siguiente manera:

1.- Se supone que como resultado del hendimiento de un núcleo se produce, entre otras cosas, un cierto número de neutrones que poseen la misma energía. Esta energía, llamada "energía de hendimiento" (alrededor de unos 2 MeV.), se considera como la energía primaria de los neutrones que inician un ciclo en el reactor. Los neutrones rápidos producidos por un hendimiento se deceleran luego por colisión con los nucleos del moderador, obedeciendo una ecuación de edad. Algunos de ellos serán capturados en el proceso por reacciones (n,γ) pero los restantes eventualmente llegarán a un equilibrio térmico con el material del reactor y obedecen entonces a una ecuación de difusión.

2.- Se supone además que sólo los neutrones térmicos son activos, es decir, que un neutrón producido en el reactor no efectúa hendimientos hasta que alcanza la edad térmica. Esto equivale a suponer que las secciones (n,f) son despreciables a energías mayores que la térmica.

Estas suposiciones parecen ser bastante radicales. Es bien sabido que en el hendimiento de un núcleo se obtiene no un haz monocromático de neutrones primarios, sino un espectro continuo que va desde las energías térmicas hasta energías de 15 a 20 MeV. en la región estudiada. Evidentemente el espectro puede continuarse indefinidamente en la región de altas energías. Además, debido al decaimiento de aquellos productos de hendimiento que quedan sobre la línea de estabilidad, resulta un espectro discreto de neutrones retardados consistente de varias rayas monocromáticas. La producción de neutrones dista pues mucho de ser monocromática. La llamada "energía de hendimiento" no es sino el promedio de un espectro entero.

En cuanto a la segunda suposición hay que hacer notar que solo es válida para U^{235} cuya sección (n,f) cae rápidamente del valor inicial de 545b para energías térmicas, a valores despreciables para energías mayores. Si se consideran otros núcleos hendibles, sin embargo, se encuentra que la situación es bien distinta. En el U^{238} la sección es muy pequeña (~0.01b) para energías epitérmicas y aumenta rápidamente a partir de 1.5 MeV. Cosa análoga ocurre en el Np^{239}, etc.

Una pila térmica generalmente opera con uranio natural en el que el U^{235} sólo entra en muy pequeña proporción. Es de esperarse por tanto que la gran abundancia de núcleos de U^{238} en cierto modo compense la pequeñez de la sección y que los hendimientos producidos por los neutrones rápidos tengan una influencia apreciable en el comportamiento de la pila.

En vista de las anteriores consideraciones es claro que sería interesante suprimir las dos suposiciones señaladas y construir una teoría de la pila en la que, por una parte se tenga en cuenta el espectro entero de neutrones continuo y discreto, y por otra que se considere el curso entero de las secciones con la energía. En este trabajo se exponen los principios fundamentales de la teoría empleando ecuaciones de edad y de difusión. En informes futuros se desarrollará mediante ecuaciones de transporte.

1.- Las Ecuaciones de la Pila.

Se va a considerar una pila homogénea no reflejada, que se va a caracterizar por las siguientes secciones macroscópicas:

Σ_s sección de dispersión.

Σ_c sección de captura.

Σ_f sección de hendimiento.

$\Sigma_a = \Sigma_c + \Sigma_f$ sección de absorción.

$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a$ sección total.

se designará por D el coeficiente de difusión, por ξ la pérdida logarítmica media de energía y por $T = \frac{1}{v\Sigma_a}$ la vida media de un neutrón de velocidad v en el reactor. El valor de T para energía térmica se designará por T_0.

Sea $n(\underline{r}\ E\ t)$ el número de neutrones por unidad de volúmen y por unidad de energía (p.u.v.e.) que al tiempo t se encuentran en el punto $(\underline{r},\ E)$, $\underline{r} = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}z$ representando el vector de posición en el reactor y E la energía. $n(\underline{r}\ E\ t)$ satisface una ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n(\underline{r}\ E\ t)}{\partial t} = D\ \Delta\ n(\underline{r}\ E\ t) + \frac{\partial[n(\underline{r}\ E\ t)\ v\ \Sigma\ \xi\ E]}{\partial E} -$$

$$- n(\underline{r}\ E\ t)\ v\ \Sigma_a + Q\ (\underline{r}\ E\ t) \qquad (1)$$

con $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

El primer término representa las pérdidas por difusión espacial, el segundo las pérdidas por difusión energética (deceleración), el tercero las pérdidas por absorción y el último la producción, es decir, el número de neutrones producidos al tiempo t por unidad de volumen, unidad de energía y unidad de tiempo (p.u.v.e.t.). El flujo de neutrones será:

$$\phi\ (\underline{r}\ E\ t) = n\ (\underline{r}\ E\ t)\ v \qquad (2)$$

y la absorción, o sea el número de neutrones absorbidos p.u. v.e.t.

$$a(\underline{r}\ E\ t) = n(\underline{r}\ E\ t)\ v\ \Sigma_a = \frac{n(\underline{r}\ E\ t)}{T} \qquad (3)$$

Supondremos que, con un valor adecuado de $Q(\underline{r}\ E\ t)$, (1) describe el comportamiento de los neutrones para energías mayores que la térmica. Los neutrones térmicos se considerarán separadamente, designándose por $n_t(\underline{r}\ t)$ su densidad. Esta densidad claramente satisface una ecuación como (1) excepto por el término de deceleración:

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}\ t)}{\partial t} = D_t\ \Delta\ n_t(\underline{r}\ t) - \frac{n_t(\underline{r}\ t)}{T_o} + Q_t(\underline{r}\ t) \qquad (1a)$$

aquí D_t es el valor del coeficiente de difusión para energías térmicas y $Q_t(\underline{r}\ t)$ la producción de neutrones térmicos.

Nuestro principal problema consiste en calcular los términos de producción en (1) y (1a).

Imaginar un neutrón de energía E' que produce un hendimiento. Como resultado del mismo, aparecerá cierto número de neutrones inmediatos con un cierto espectro. Designamos por $\eta(E, E')$ el número de neutrones p.u.e. de energía E inmediatamente producidos por hendimiento causado por un neutrón de energía E': $\eta(E, E')$ se llamará <u>función de producción inmediata</u>. El número total de neutrones inmediatos producidos por hendimiento será:

$$\eta_o(E') = \int_0^\infty \eta(E, E')\ dE \qquad (4)$$

$\eta_o(E')$ se llamará <u>factor de producción inmediata</u>.

Además de los $\eta_o(E')$ neutrones inmediatos, se producen varias rayas de nuetrones monocromáticos retardados. Sea $\eta_i(E')$ $(i = 1,2,3,\ldots)$ el número de tales neutrones que se producen en el grupo i. El número total de neutrones producidos por hendimiento será entonces

$$\eta(E') = \eta_o(E') + \sum_i \eta_i(E') \qquad (5)$$

$\eta(E')$ se llama <u>factor de producción</u>. Si como es corriente, en vez de los números η_i usamos las fracciones β_i de neutrones retardados, claramente

$$\eta_i(E') = \beta_i(E')\ \eta(E') \qquad (6)$$

y será como de costumbre

$$\beta(E') = \sum_i \beta_i(E') = \frac{\sum_i \eta_i(E')}{\eta(E')} = 1 - \eta_o(E') \qquad (7)$$

la fracción de retardación, es decir, la fracción del número total de neutrones producidos que son retardados.

El número de hendimientos p.u.v.t. producidos por los neutrones que se encuentran en la banda (E', dE') es

$$n(\underline{r}\ E'\ t)\ v'\ \Sigma_f'\ dE'$$

en donde v' es la velocidad correspondiente a la energía E' y $\Sigma_f' = \Sigma_f\ (E')$. El número de neutrones inmediatos producidos p.u.v.e.t. por estos neutrones será:

$$\eta(E,E')\ n\ (\underline{r}\ E'\ t)\ v'\ \Sigma_f'\ dE$$

y el número total

$$\int_{E_t}^{\infty} \eta(E,E')\ n(\underline{r}\ E'\ t)\ v'\ \Sigma_f'\ dE' = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k(E,E')}{T'}\ n(\underline{r}\ E' t) dE' \qquad (8)$$

en donde

$$k(E,E') = \eta(E,E')\ \frac{\Sigma_f\ (E')}{\Sigma_a\ (E')} \qquad (9)$$

es la <u>función de reproducción inmediata</u>, es decir, el número de neutrones p.u.e. de energía E producidos por neutrón absorbido de energía E'.

$$f(E) = \frac{\Sigma_f\ (E)}{\Sigma_a\ (E)} = \frac{\Sigma_f\ (E)}{\Sigma_f\ (E)\ +\ \Sigma_a\ (E)} \tag{10}$$

es el <u>factor de utilización</u>, o sea la fracción de neutrones absorbidos que produce hendimiento, es decir, la probabilidad de que la absorción de un neutrón conduzca a un hendimiento y no a una simple captura (n,γ). (9) puede escribirse

$$k(E,E') = \eta\ (E,E')\ f\ (E') \tag{11}$$

Ahora

$$k_o(E') = \int_o^\infty k(E,E')\ dE' = \eta_o(E')\ f(E') \tag{12}$$

es el número total de neutrones inmediatos producidos por neutrón de energía E' absorbido y se llamará <u>factor de reproducción inmediata</u>. El número de neutrones retardados del grupo i que se producen p.v.v.t. es claramente

$$\int_{E_t}^\infty \eta_i(E')\ n(\underline{r}\ E'\ t)\ v'\ \Sigma_f'\ dE' = \int_{E_t}^\infty \frac{k_i(E')}{T'}\ n(\underline{r}\ E't)dE' \tag{13}$$

con

$$k_i(E') = \eta_i(E')\ \frac{\Sigma_f\ (E')}{\Sigma_a\ (E')} = \eta_i(E')\ f(E') \tag{14}$$

$k_i(E')$ es el <u>factor de reproducción retardada del grupo</u> i.

El número total de neutrones producidos por neutrón absorbido de energía E' es

$$k(E') = k_o(E') + \sum_i k_i(E') = \eta\,(E')\; f(E') \qquad (15)$$

y se llamará, como en la teoría ordinaria, <u>factor de reproducción</u>. De (6), (7), (12) y (15) se sigue que

$$\left.\begin{aligned} k_o(E') &= (1 - \beta(E'))\; k(E') \\ k_i(E') &= \beta_i(E')\; k(E') \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

usando las <u>fracciones de retardación</u> β_i.

(8) y (13) representan los neutrones inmediatos y retardados producidos por neutrones epitérmicos y rápidos. Hay que considerar además los neutrones producidos por neutrones térmicos. Sean

$$\left.\begin{aligned} f_t &= f(E_t) \\ \eta_t(E) &= \eta(E, E_t) \\ \eta_{it} &= \eta_i(E_t) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

el factor de utilización térmica, las funciones de producción térmica inmediata y retardada respectivamente.

$$\eta_{ot} = \int_0^\infty \eta_t(E)\; dE \qquad (18)$$

es el factor de producción término inmediata.

$$k_t(E) = \eta_t(E)\ f_t = k(E, E_t) \qquad (19)$$

la función de reproducción térmica inmediata

$$k_{ot} = \int_0^\infty k_t(E)\ dE = \eta_{ot}\ f_t \qquad (20)$$

el factor de reproducción térmica inmediata,

$$k_{it} = \eta_{it}\ f_t \qquad (21)$$

los factores de reproducción térmica retardada.

$$T_o = \frac{1}{v_t\ \Sigma_{at}} \qquad (22)$$

el tiempo de generación inmediata, o sea, la vida media de un neutrón térmico en el reactor.

Puesto que el número de neutrones térmicos absorbidos p.u.v.t. es $\frac{n_t(\underline{r}\ t)}{T_o}$ es claro que estos neutrones producirán

$$\frac{k_t(E)}{T_o}\ n_t(\underline{r}\ t) \qquad (23)$$

neutrones inmediatos de energía E y

$$\frac{k_{it}}{T_o}\ n_t(\underline{r}\ t) \qquad (24)$$

neutrones retardados del grupo i. De (8) y (23) se sigue que la producción inmediata es

$$Q_p(\underline{r}\ E\ t) = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k(E,E')}{T'}\ n(\underline{r}\ E'\ t)\ dE' + \frac{k_t(E)}{T}\ n_t(\underline{r}\ t) \qquad (25)$$

en tanto que el número de neutrones latentes de la clase i producidos p.u.v.t. es de (13) y (24):

$$\int_{E_t}^{\infty} \frac{k_i(E')}{T'}\ n(\underline{r}\ E'\ t)\ dE + \frac{k_{it}}{T_o}\ n_t(\underline{r}\ t) \qquad (26)$$

Sea ahora $c_i(\underline{r}\ t)$ la concentración de neutrones latentes del grupo i y T_i su tiempo de generación. Habrá entonces $\frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i}$ neutrones retardados producidos p.u.v.t. a una energía E_i. La producción de neutrones retardados será:

$$Q_d(\underline{r}\ E\ t) = \sum_i \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i}\ \delta\ (E - E_i) \qquad (27)$$

De (25) y (27) resulta una producción total

$$Q(\underline{r}\ E\ t) = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k(E,E')}{T'}\ n(\underline{r}\ E'\ t)\ dE' + \frac{k_t(E)}{T_o}\ n_t(\underline{r}\ t) +$$

$$+ \sum_i \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i}\ \delta(E - E_i) \qquad (28)$$

mas aún, de (26) resulta que la concentración de neutrones latentes $c_i(\underline{r}t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial c_i(\underline{r}\ t)}{\partial t} = \int_{E_t}^{\infty} \frac{k_i(E')}{T'}\ n(\underline{r}\ E'\ t)\ dE' + \frac{k_{it}}{T_o}\ n_t(\underline{r}\ t) - \frac{c_i(\underline{r}t)}{T_i} \qquad (29)$$

El número total de neutronés producidos p.u.v.t. se tiene integrando (28) sobre E; recordando (12) y (20) resulta

$$Q(\underline{r}\ t) = \int_0^\infty Q(\underline{r}\ E\ t)\ dE = \int_{E_t}^\infty \frac{k_o(E')}{T'}\ n(\underline{r}\ E'\ t)\ dE' +$$

$$+ \frac{k_{ot}}{T_o}\ n_t(\underline{r}\ t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i} \qquad (30)$$

Substituyendo (28) en (1) se obtiene la ecuación de los neutrones rápidos:

$$\frac{\partial n(\underline{r}\ E\ t)}{\partial t} = D\ \Delta\ n(\underline{r}\ E\ t) + \frac{\partial[n(\underline{r}\ E\ t)\ v\ \Sigma\ \xi\ E]}{\partial E} -$$

$$- n(r\ E\ t)\ v\ \Sigma_a + \int_{E_t}^\infty \frac{k(E,E')}{T'}\ n(r\ E'\ t)\ dE' +$$

$$+ \frac{k_t(E)}{T_o}\ n_t(\underline{r}\ t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i}\ \delta\ (E - E_i) \qquad (31)$$

Dentro de la denominación "neutrón térmico" se agrupan todos los neutrones de muy variadas energías que se encuentran en equilibrio térmico con el material del reactor. Supondremos, como es costumbre que todos estos neutrones pueden caracterizarse por su energía de equilibrio E_t. Si introducimos la densidad de deceleración

$$q(\underline{r}\ E\ t) = n(\underline{r}\ E\ t)\ v\ \Sigma\ \xi\ E \qquad (32)$$

que representa la corriente de neutrones a lo largo del eje de la energía, $q(\underline{r}\ E_t\ t)$ es el número de neutrones p.u.v.t.

que se hacen térmicos por colisión. Es pues la fuente de neutrones térmicos:

$$Q_t(\underline{r}\ t) = q(\underline{r}\ E_t\ t) = n(\underline{r}\ E_t\ t)\ v_t\ \Sigma_t\ \xi\ E_t \tag{33}$$

Substitución de este valor en (1a) da la ecuación de los neutrones térmicos:

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}\ t)}{\partial t} = D_t\ \Delta\ n_t\ (\underline{r}\ t) - \frac{n_t(r\ t)}{T_o} + n(\underline{r}\ E_t\ t)\ v_t \Sigma_t \xi\ E_t \tag{34}$$

Las ecuaciones (29), (31) y (34) son las ecuaciones de la pila. Dado que hay seis grupos identificados de neutrones retardados, hay seis ecuaciones del tipo (29) correspondiente a las seis concentraciones latentes. Las ecuaciones de la pila aparecen bajo la forma de un sistema de ocho ecuaciones integrodiferenciales simultáneas. Estas deben resolverse con las usuales condiciones a la frontera:

$$[n(\underline{r}\ E\ t)]_{S'} = [n_t(\underline{r}\ t)]_{S'} = [c_i(\underline{r}\ t)]_{S'} = 0 \tag{A}$$

siendo S' la frontera extrapolada de la pila.

$$n(\underline{r}\ E\ 0) \quad , \qquad c_i\ (\underline{r}\ 0) \qquad y \qquad n_t\ (\underline{r}\ 0) \tag{B}$$

son funciones dadas.

$$n\ (\underline{r}\ \infty\ t) = 0 \tag{C}$$

El problema es pues determinado ya que (A) determina la dependencia espacial de las soluciones, (B) su curso en el tiempo cuando se parte de condiciones iniciales determinadas y (C) la dependencia de la energía. Nótese que es necesario especificar ocho distribuciones a $t=0$.

Una simple ojeada a las ecuaciones (29), (31) y (34) bastaría para darse cuenta que la solución de las mismas en la forma en que están expresadas conduciría a dificultades considerables. Es pues conveniente transformarlas primero para dejarlas en una forma manejable y para ello es util emplear la densidad de deceleración (32) en vez de la densidad $n(\underline{r}\ E\ t)$ de neutrones rápidos. Despejando esta última de (32) y substituyendo en (29), (31) y (34) se obtienen las ecuaciones de la pila en la siguiente forma:

$$\frac{1}{v\Sigma\xi E}\frac{\partial q(\underline{r}\ E\ t)}{\partial t} = \frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E}\Delta q(\underline{r}\ E\ t) + \frac{\partial q(\underline{r}\ E\ t)}{\partial E} - \frac{\Sigma_a}{\Sigma\xi E} q(\underline{r}\ E\ t) + \int_{E_t}^{\infty} k(E,E')\frac{\Sigma'_a}{\Sigma'\xi E'} q(\underline{r}\ E' t)dE' + \frac{k_t(E)}{T_o} n_t(\underline{r}\ t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i}\delta(E-E_i) \tag{35a}$$

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}\ t)}{\partial t} = D_t\ \Delta' n_t(\underline{r}\ t) - \frac{n_t(\underline{r}\ t)}{T_o} + q(\underline{r}\ E_t\ t) \tag{35b}$$

$$\frac{\partial c_i(\underline{r}\ t)}{\partial t} = \int_{E_t}^{\infty} k_i(E')\frac{\Sigma'_a}{\Sigma'\xi E'} q(\underline{r}\ E'\ t)\ dE' + \frac{k_{it}}{T_o} n_t(\underline{r}\ t) - \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i} \tag{35c}$$

en donde λ_t es el camino medio de transporte.

Es conveniente utilizar en vez de la energía E la "edad" de Fermi τ, que definiremos como

$$\tau = \tau(E) = \int_E^{\infty} \frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E}\, dE = \int_E^{\infty} \frac{D}{v\Sigma\xi E}\, dE \tag{36}$$

así que

$$d\tau = -\frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E}\, dE = -\frac{D}{v\Sigma\xi E}\, dE \tag{37}$$

$\tau(E)$ es una función monótonamente decreciente de E que se anula para $E = \infty$. Claramente

$$q(\underline{r}\ E\ t) = q(\underline{r}\ \tau\ t) \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} k(E,E') &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E}\, k(\tau,\tau') \\ k_t\ (E) &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E}\, k_t(\tau) \\ k_i\ (E) &= k_i(\tau) \\ \delta(E-E_i) &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E}\, \delta(\tau-\tau_i) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

utilizando distribuciones por unidad de edad.

Las ecuaciones de la pila quedan ahora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D}\frac{\partial q(\underline{r}\ \tau\ t)}{\partial t} = {} & \Delta q(\underline{r}\ \tau\ t) - \frac{\partial q(\underline{r}\ \tau\ t)}{\partial \tau} - \frac{v\Sigma_a}{D}\, q(\underline{r}\ \tau\ t) + \\ & + \int_0^{\tau_t} k(\tau,\tau')\, \frac{v'\Sigma_a'}{D'}\, q(\underline{r}\ \tau' t)\, d\tau' + \\ & + \frac{k_t(\tau)}{T_o}\, n_t(\underline{r}\ t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i}\, \delta(\tau-\tau_i) \end{aligned} \tag{40a}$$

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}\ t)}{\partial t} = D_t\ \Delta\ n_t(\underline{r}\ t) - \frac{n_t(\underline{r}\ t)}{T_o} + q(\underline{r}\ \tau_t\ t) \tag{40b}$$

$$\frac{\partial c_i(\underline{r}\ t)}{\partial t} = \int_0^{\tau_t} k_i(\tau')\ \frac{v'\Sigma_a'}{D'}\, q(\underline{r}\ \tau'\ t)\ d\tau' + \frac{k_{it}}{T_o}\, n_t(\underline{r}\ t) - \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i} \tag{40c}$$

Se puede finalmente eliminar de (40a) el término de absorción de la manera usual, introduciendo la <u>probabilidad de escape a la absorción</u>

$$p(\tau) = \exp \int_\tau^0 \frac{v\Sigma_a}{D}\, d\tau = p(E) = \exp\left(- \int_E^\infty \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s}\, \frac{dE}{\xi E}\right) \tag{41}$$

que satisface la ecuación

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp(\tau)}{d\tau} &= -\frac{v\Sigma_a}{D}\, p(\tau) \\ \frac{dp(E)}{dE} &= \frac{\Sigma_a}{\Sigma\xi E}\ p(E) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

y usando en vez de $q(\underline{r}\ \tau\ t)$ la densidad de deceleración que existiría si no hubiera absorción:

$$q(\underline{r}\ \tau\ t) = q'(\underline{r}\ \tau\ t)\ p\ (\tau) \tag{43}$$

Las ecuaciones (40) quedan:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial q'(\underline{r}\ \tau\ t)}{\partial t} = \Delta q'(\underline{r}\ \tau\ t) - \frac{\partial q'(\underline{r}\ \tau\ t)}{\partial \tau} -$$

$$- \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau,\tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}\ \tau'\ t)\, d\tau' +$$

$$+ \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)T_o} n_t(\underline{r}\ t) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{p(\tau_i)T_i} \delta(\tau-\tau_i) \tag{44a}$$

$$\frac{\partial n_t(\underline{r}\ t)}{\partial t} = D_t\, \Delta\, n_t(\underline{r}\ t) - \frac{n_t(\underline{r}\ t)}{T_o} + pq'(\underline{r}\ \tau_t\ t) \tag{44b}$$

$$\frac{\partial c_i(\underline{r}\ t)}{\partial t} = - \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}\ \tau'\ t)\, d\tau' +$$

$$+ \frac{k_{it}}{T_o} n_t(\underline{r}\ t) - \frac{c_i(\underline{r}\ t)}{T_i} \tag{44c}$$

siendo

$$p = p(\tau_t) = \exp\left[- \int_{E_t}^{\infty} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE}{\xi E}\right] \tag{45}$$

la llamada <u>probabilidad de escape a la resonancia</u>.

De (32), (38) y (43) se ve que $q'(\underline{r}\ \tau\ t)$ satisface las mismas condiciones en la frontera espacial que $n(\underline{r}\ E\ t)$.

Usaremos como ecuaciones de la pila las ocho ecuaciones integrodiferenciales simultaneas (44) en q', n_t y c_i con las condiciones a la frontera

$$[q'(\underline{r}\ \tau\ t)]_{S'} = [n_t(\underline{r}\ t)]_{S'} = [c_i(\underline{r}\ t)]_{S'} = 0 \tag{A}$$

$$q'(\underline{r}\ \tau\ 0)\ , \qquad c_i(\underline{r}\ 0) \qquad y \qquad n_t(\underline{r}\ 0) \quad \text{dadas} \tag{B}$$

$$q'(\underline{r}\ 0\ t) = 0 \tag{C}$$

2.- <u>Condiciones estacionarias de una pila.</u>

Establecidas ya las ecuaciones de la pila, vamos a investigar el efecto de las correcciones introducidas en los estados estacionarios de la misma. Las ecuaciones de la pila para el caso estacionario, según (44) serán:

$$\Delta q'(\underline{r}\ \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}\ \tau)}{\partial \tau} - \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau,\tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'}\, q'(\underline{r}\ \tau')\, d\tau' + \\ + \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)T_o} n_t(\underline{r}) + \sum_i \frac{c_i(\underline{r})}{p(\tau_i)T_i}\, \delta(\tau-\tau_i) = 0 \tag{46a}$$

$$D_t\ \Delta\ n_t(r) + pq'(\underline{r}\ \tau_t) - \frac{n_t(\underline{r})}{T_o} = 0 \tag{46b}$$

$$\frac{c_i(\underline{r})}{T_i} = -\int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'}\, q'(\underline{r}\ \tau')\, d\tau' + \frac{k_{it}}{T_o} n_t(\underline{r}) \tag{46c}$$

(46c) da inmediatamente el valor de las concentraciones latentes que pueden ser eliminadas de (46a) obteniéndose ésta última en la forma

$$\Delta q'(\underline{r}\ \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}\ \tau)}{\partial \tau} + \int_0^{\tau_t} \kappa_o(\tau,\tau')\, q'(\underline{r}\ \tau')\, d\tau' + \\ + \frac{k_o(\tau)}{T_o} n_t(\underline{r}) = 0 \tag{47}$$

siendo

$$\kappa_0(\tau,\tau') = -\left\{\frac{k(\tau,\tau')}{p(\tau)} + \sum_i \frac{k_i(\tau')}{p(\tau_i)}\ \delta(\tau-\tau_i)\right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \tag{48}$$

$$k_0(\tau) = \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)} + \sum_i \frac{k_{it}}{p(\tau_i)}\ \delta(\tau-\tau_i) \tag{49}$$

Las ecuaciones de la pila son ahora el par de ecuaciones integrodiferenciales simultáneas (47) y (46b) en $q'(\underline{r}\ \tau)$ y $n_t(\underline{r})$ sujetas a las condiciones a la frontera:

$$[q'(\underline{r}\ \tau)]_{s'} = [n_t(\underline{r})]_{s'} = 0 \tag{A}$$

$$q'(\underline{r}\ 0) = 0 \tag{B}$$

Estas condiciones sugieren de inmediato que la solución debe ser de la forma

$$q'(\underline{r}\ \tau) = n_t(\underline{r})\ H(\tau) \tag{50}$$

siendo $n_t(\underline{r})$ y $H(\tau)$ funciones por determinar

Substituyendo (50) en (47) se puede constatar fácilmente que esta última es separable, descomponiéndose en el par de ecuaciones

$$\Delta\ n_t(\underline{r}) + \kappa_0^2\ n_t(\underline{r}) = 0 \tag{51}$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + \kappa_0^2\ H(\tau) = \frac{k_0(\tau)}{T_0} + \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau,\tau')\ H(\tau')\ d\tau' \tag{52}$$

siendo κ_0^2 la constante introducida al separar (47).

La ecuación (51) sujeta a la condición (A) es bien conocida en la teoría de la pila. Esta ecuación no tiene soluciones a menos que κ_0^2 sea real y positiva, o sea, que κ_0 debe ser real. En este caso hay un número infinito de soluciones que dependen tan solo de la forma y dimensiones de la pila y corresponden a diferentes harmónicas posibles. Sin embargo, en el estado estacionario sólo la primera harmónica es aceptable, así que (51) tiene una solución bien definida (hasta un factor de multiplicación arbitrario) y determinará el valor de κ_0^2 en función de la forma y dimensiones de la pila. En general

$$L_0^2 = \frac{1}{\kappa_0^2} \tag{53}$$

será el <u>área característica</u>, L_0 la <u>longitud característica</u> y κ_0 el <u>valor característico</u> de la pila. Simbólicamente

$$L_0 = G\,\delta \tag{54}$$

siendo δ alguna dimensión de la pila y G un factor de forma. Supondremos pues (51) resuelta y κ_0 determinada por la geometría del sistema.

La <u>función de edad</u>, $H(\tau)$, satisface la ecuación integrodiferencial (52) con la condición

$$H(0) = 0 \tag{B'}$$

obtenida de (B). Para resolverla consideramos primero que una ecuacion diferencial de la forma

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + \kappa_o^2 \, H(\tau) = f(\tau) \tag{55}$$

tiene por solución

$$H(\tau) = H_o \, e^{-\kappa_o^2 \tau} + e^{-\kappa_o^2 \tau} \int_0^{\tau} e^{\kappa_o^2 \tau''} \, f(\tau'') \, d\tau'' \tag{56}$$

en donde $H_o = H(0)$ es una constante que depende del valor inicial de $H(\tau)$. En nuestro caso sera $H_o = 0$ y

$$f(\tau) = \frac{k_o(\tau)}{T_o} + \int_0^{\tau_t} \kappa_o(\tau,\tau') \, H(\tau') \, d\tau'$$

así que (52) será equivalente a la ecuación

$$H(\tau) = e^{-\kappa_o^2 \tau} \int_0^{\tau} e^{\kappa_o^2 \tau''} \left[\frac{k_o(\tau'')}{T_o} + \int_0^{\tau_t} \kappa_o(\tau'',\tau') H(\tau') d\tau' \right] d\tau''$$

que puede escribirse bajo la forma

$$H(\tau) = h(\tau) + \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau') \, H(\tau') \, d\tau' \tag{57}$$

con

$$h(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_0^{\tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau')} \, k_o(\tau') \, d\tau' =$$

$$= \frac{1}{T_o} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau')} \, \frac{k_t(\tau')}{p(\tau')} \, d\tau' + \sum_{\tau_i < \tau} \frac{e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_i)} k_{it}}{p(\tau_i)} \right\} \tag{58}$$

$$K(\tau,\tau') = \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')} K_0(\tau'',\tau')d\tau'' =$$

$$= -\left\{\int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')} \frac{k(\tau''\tau')}{p(\tau'')} d\tau'' + \sum_{\tau_i<\tau} \frac{e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)}k_i(\tau')}{p(\tau_i)}\right\} \times$$

$$\times \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \qquad (59)$$

En ambos casos aparece una función escalonada que depende de los factores de retardación. De (57) resulta que la función de edad satisface una ecuación integral que es la de Fredholm de segunda clase y puede ser resuelta por cualquiera de los métodos conocidos. Si se designa por $R(\tau,\tau')$ el resolvente de (57), la función de edad estará dada por

$$H(\tau) = h(\tau) + \int_0^{\tau_t} R(\tau,\tau')\ h\ (\tau')\ d\tau' \qquad (60)$$

y $q'(r\ \tau)$ quedará determinado por (50). De (58) y (59) se ve que el resolvente, y por tanto $H(\tau)$ sólo depende de κ_0^2 y las constantes conocidas de la pila.

Vemos ahora que una sola ecuación, la (47), nos ha bastado para encontrar todas las distribuciones de neutrones en la pila. Se infiere que el problema está sobredeterminado puesto que aún debemos resolver (46b). Esta última actuará pues como ecuación de condición. Substituyendo (50) en (46b) recordando (51) se obtiene por un sencillo cálculo:

$$1 + \kappa_0^2\ L_t^2 = p\ T_0\ H\ (\tau_t) \qquad (61a)$$

y según (60):

$$1+\kappa_0^2 L_t^2 = p\, T_0\, h(\tau_t) + \int_0^{\tau_t} R(\tau_t,\tau)\; h\,(\tau)\; d\tau \tag{61}$$

en donde

$$L_t^2 = D\, T_0 \tag{62}$$

es la llamada <u>área</u> <u>de</u> <u>difusión</u> <u>térmica</u>. (61) es una ecuación de la que κ_0^2 puede obtenerse en función de las propiedades físicas del material del reactor. Como por otra parte (51) determina κ_0^2 en términos de la geometría de la pila, ambas ecuaciones pueden emplearse para calcular las dimensiones que requiere una pila de material y forma dadas. Se reconoce que (61) es la <u>ecuación</u> <u>crítica</u> de la pila.

Para hacer uso de (61) debemos conocer el resolvente de la ecuación integral (57), $R(\tau,\tau')$, o su solución, $H(\tau)$. En general, ambas se expresan como una serie infinita o como el cociente de dos series infinitas. Dado que expresiones de este tipo muy probablemente no nos serían de utilidad debido a su complejidad analítica, trataremos de simplificar nuestro problema utilizando para ello ciertas consideraciones físicas sencillas.

Sabido es que en el hendimiento de un núcleo activo hay una liberación de energía del orden de 200 MeV. cuya energía se distribuye entre los productos de la reacción (n,f). En otros términos, el valor Q de una reacción (n,f) promedio, es del orden de 200 MeV. En una reacción en cadena, cada reacción (n,f) es producida ya sea por neutrones que directamente provienen de núcleos hendidos o bien por neutrones que ya han sido decelerados en mayor o menor proporción por el moderador. Los neutrones producid9s en una reacción (n,f) tienen una energía media de 2 MeV. y la fracción de los mismos cuya energía es mayor de unos 10 MeV., es, para nuestros propósitos, despreciable. Este hecho, añadido al efecto decelerador del moderador permite concluir que en un reactor usual que mantiene una reacción en cadena, la inmensa mayoría de los hendimientos serán producidos por neutrones cuya energía es menor de unos 10 MeV. Esto significa que con mucho, la mayor parte de las reacciones (n,f) que ocurren en el reactor se verifican en condiciones tales, que la energía del neutrón incidente que las provoca es siempre mucho menor que el valor Q de la reacción. En este caso es bien sabido que la forma particular en que la reacción ocurre no depende apreciablemente de la energía del neutron incidente. En particular, en el análisis que hemos efectuado podemos suponer sin error apreciable que las funciones de producción $\eta(E,E')$ y $\eta_1(E')$ no dependen apreciablemente de E' y podemos substituirlas para $E' = \overline{E}$, algún valor medio adecuado. Haremos pues $\eta(E,\overline{E}) = \eta(E)$ y $\eta_1(\overline{E}) = \eta_1$. Con esta simplificación, las funciones de reproducción (11) y (14) quedan en la forma

$$\left.\begin{aligned} k(E,E') &= \eta(E)\ f(E') \\ k_1(E') &= \eta_1\ f(E') \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

puesto que

$$\left.\begin{aligned} f(E) &= f(\tau) \\ \eta(E) &= \frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi E}\ \eta(\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

siendo $\eta(\tau)$ la función de producción por unidad de edad, se sigue que

$$k(\tau,\tau') = \eta\ (\tau)\ f(\tau')$$
$$k_i(\tau') = \eta_i\ f(\tau') \tag{65}$$

y según (59) será

$$K(\tau,\tau') = -\int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')}\ \frac{\eta(\tau'')}{p(\tau'')}\ d\tau''\ f(\tau')\ \frac{dp(\tau')}{d\tau'}\ -$$
$$-\sum_{\tau_i<\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)}\ \frac{\eta_i}{p(\tau_i)}\ f(\tau')\ \frac{dp(\tau')}{d\tau'} =$$
$$= -\left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')}\ \frac{\eta(\tau'')}{p(\tau'')}\ d\tau'' + \sum_{\tau_i<\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)}\ \frac{\eta_i}{p(\tau_i)} \right\} \times$$
$$\times\ f(\tau')\ \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \tag{66}$$

Lo esencial de este kernel es que es separable. La ecuación de Fredholm (57) con el kernel (66) tiene una solución sencilla. Hagamos

$$\left.\begin{aligned} F(\tau) &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau'')}\ \frac{\eta(\tau'')}{p(\tau'')}\ d\tau'' + \sum_{\tau_i<\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)}\ \frac{\eta_i}{p(\tau_i)} \\ G(\tau) &= -\ f(\tau)\ \frac{dp(\tau)}{d\tau} = \frac{v\ \Sigma_a}{D}\ f(\tau)\ p(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

de modo que

$$K(\tau,\tau') = F(\tau)\ G(\tau') \tag{68}$$

Además, según (17), (19) y (21):

$$k_t(\tau) = \eta(\tau)\, f_t$$
$$k_{it} = \eta_i\, f_t \tag{69}$$

de modo que (58) puede escribirse como

$$h(\tau) = \frac{1}{T_o}\left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau')} \frac{\eta(\tau')}{p(\tau')}\, d\tau' + \sum_{\tau_i < \tau} \frac{e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_i)}\eta_i}{p(\tau_i)} \right\} f_t$$

esto es,

$$h(\tau) = \frac{f_t}{T_o} F(\tau) \tag{70}$$

Substituyendo ahora (68) y (70) en (57) se obtiene

$$H(\tau) = \frac{f_t}{T_o} F(\tau) + F(\tau) \int_0^{\tau_t} G(\tau')\, H(\tau')\, d\tau' =$$
$$= \left(\frac{f_t}{T_o} + A\right) F(\tau) \tag{71}$$

en donde

$$A = \int_0^{\tau_t} G(\tau)\, H(\tau)\, d\tau \tag{72}$$

necesariamente debe ser una constante. (71) ya da la forma de la solución. Con el objeto de determinar A, substituimos (71) en (72) obteniéndose

$$A = \left(\frac{f_t}{T_o} + A\right) \int_0^{\tau_t} F(\tau)\, G(\tau)\, d\tau = \left(\frac{f_t}{T_o} + A\right) \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau$$

Esta es una ecuación lineal ordinaria en A. Si la cantidad

$$D(\kappa_0^2) = 1 - \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau \qquad (73)$$

no es nula, la ecuación anterior puede resolverse para A y substituyendo este valor en (71) se obtiene

$$H(\tau) = \frac{h(\tau)}{1 - \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau} \qquad (74)$$

que es la solución de la ecuación integral. Es fácil ver que $D(\kappa_0^2)$ dada por (73) no es sino el determinante de Fredholm de la ecuacion (57). Nuestra solución depende, para su validez, de que se cumpla la condición

$$D(\kappa_0^2) \neq 0 \qquad (75)$$

de otro modo es fácil ver que (57) no tiene solución. Suponiendo pues que (57) tiene un determinante de Fredholm no nulo, substituyendo (74) en (61a) se obtiene

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = \frac{p\, T_0\, h(\tau_t)}{1 - \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau} \qquad (76)$$

que es la ecuación crítica de la pila.

Con el objeto de estudiar esta ecuación con más detalle, la escribiremos primero en la forma:

$$\frac{p\, T_0\, h(\tau_t)}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} + \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau = 1$$

y utilizamos (58) recordando que $p = p(\tau_t)$ de modo que $\frac{p}{p(\tau')} = p(\tau'\tau_t)$ es la probabilidad de que un neutrón escape a la absorción cuando se descelera de la edad τ' a la edad térmica τ_t. Se obtiene pues:

$$l_t \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t-\tau')}\, p(\tau',\tau_t)\, k_t(\tau')d\tau' + \sum_i e^{-\kappa_0^2(\tau_t-\tau_i)} \times \right.$$

$$\left. \times\, p(\tau_i,\tau_t)\, k_{it} \right\} \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau = 1 \, .$$

en donde

$$l_t = \frac{1}{1 + \kappa_0^2 L_t^2} \tag{77}$$

es la <u>probabilidad de escape a la fuga térmica</u>. Hágase

$$p_i = p(\tau_i,\tau_t) \tag{78}$$

siendo p_i la probabilidad de que un neutrón retardado de la clase i escape a la absorción;

$$L_{fi}^2 = \tau_t - \tau_i \tag{79}$$

el <u>área de migración rápida</u> para neutrones de la clase i; entonces

$$l_t\left\{\int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t-\tau')}\ p(\tau',\tau_t)\ k_t(\tau')d\tau' + \sum_i e^{-\kappa_0^2 L_{fi}^2}\ p_i k_{it}\right\} +$$

$$+\int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\ d\tau = 1 \qquad (80)$$

es la condición crítica de la pila. Esta ecuación consta de dos partes: el primer término describe el efecto de los neutrones térmicos en tanto que el segundo representa el de los neutrones rápidos. Es, además, una ecuación trascendente que debe resolverse para κ_0^2 con el objeto de determinar las condiciones de operación de la pila. Ahora obtendremos diversas aproximaciones.

A) Pila térmica.

Supóngase que el material hendible contenido en la pila es tal que la sección de hendimiento $\Sigma_f(E)$ es apreciable sólo para energías térmicas y cae rápidamente para energías mayores que la térmica, como ocurriríapor ejemplo en un reactor de U^{235}. Entonces $f(E) = \Sigma_f(E)/\Sigma_a(E)$ sería extremadamente pequeño para energías mayores a E_t. De (11) y (14) se ve que tanto $k(E,E')$ como $k_i(E')$ serán muy pequeñas y de (59) se ve que $K(\tau,\tau')$ es también despreciable. Prácticamente todos los hendimientos son producidos por neutrones térmicos en tanto que los neutrones rápidos tienen un factor de utilización despreciable. En la ecuación (80) el segundo término es despreciable comparado con el primero, operando la pila substancialmente con neutrones térmicos. Tal pila se llama pila térmica.

Puede suponerse también, no que $f(E)$ es pequeñaa altas energías, sino que el poder frenador de la pila,

$\Sigma_s\xi$ es muy grande comparado con el poder de absorción, Σ_a de manera que la razón $\frac{\Sigma_a}{\Sigma\xi}$ es muy pequeña. Tal cosa ocurriría en pilas con muy poco material hendible (Σ_a pequeño) y grandes cantidades de moderador ($\xi\Sigma_s$ grande) de muy buena clase (ξ grande). De (42) se ve que en tales condiciones será $\frac{dp(E)}{dE} \ll 1$. Podemos pues suponer que $p(E)$ prácticamente no varía con E, es decir, que $p(E_t) \approx 1$. La absorción es tan pequeña comparada con la deceleración, que un neutrón tiene muy poca probabilidad de ser absorbido antes de hacerse térmico por colisiones con el moderador. En estas condiciones, un grupo de neutrones de alta energía producidos en un hendimiento se harán térmicos tan rápidamente, que de nuevo, aunque por razones distintas esta vez, la pila funciona esencialmente con neutrones térmicos y es una pila térmica. Como $\frac{dp(\tau)}{d\tau}$ es también casi cero, de (59) se ve que $K(\tau,\tau)$ es muy pequeño y de nuevo el segundo término de (80) puede despreciarse comparado con el primero.

En cualquiera de los dos casos, la ecuación crítica de una pila térmica puede escribirse

$$l_t \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_o^2(\tau_t-\tau')} \; p(\tau',\tau_t) \; k_t(\tau')d\tau' + \sum_i e^{-\kappa_o^2 L_{fi}^2} \; p_i k_{it} \right\} = 1 \qquad (81a)$$

o en forma explicita

$$1 + \kappa_o^2 \, L_t^2 = \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_o^2(\tau_t-\tau')} \; p(\tau',\tau_t) \; k_t(\tau') \; d\tau' \; +$$

$$+ \sum_i e^{-\kappa_o^2(\tau_t-\tau_i)} \; p(\tau_i,\tau_t) \; k_{it} \qquad (81b)$$

Puede verse que nuestra ecuacion (81b) da el mismo resultado que la teoría ordinaria si despreciamos el efecto producido por la distribución espectral de los neutrones rápidos. Supongamos, por ejemplo, que todos los neutrones se emiten a una sóla y misma energía E_0. Tal energía podría definirse como

$$E_0 = \frac{\int_0^\infty E\eta(E)\,dE}{\int_0^\infty \eta(E)\,dE} \tag{82}$$

y, para U^{235} es $E_0 = 2$ MeV. Hay también una correspondiente edad de emisión τ_0.

Ahora bien, si

$$\eta_0 = \int_0^\infty \eta(E)\,dE = \int_0^{\tau_t} \eta(\tau)\,d\tau \tag{83}$$

es el número total de neutrones inmediatos producidos por hendimiento, el espectro puede idealizarse bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} \eta(E) &= \eta_0\ \delta\ (E-E_0) \\ \eta(\tau) &= \eta_0\ \delta\ (\tau-\tau_0) \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Entonces si hacemos

$$k_{ot} = \eta_0\ f_t \tag{85}$$

será

$$k_t\ (\tau) = k_{ot}\ \delta\ (\tau-\tau_0) \tag{86}$$

La integración de (81) es inmediata:

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_o)} p(\tau_o, \tau_t) k_{ot} + \sum_i e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_i)} \times$$

$$\times p(\tau_i, \tau_t) k_{it}$$

y haciendo

$$p_o = p(\tau_o, \tau_t) \qquad p_i = p(\tau_i, \tau_t) \tag{87}$$

$$\tau_t - \tau_o = L_{fo}^2 \qquad \tau_t - \tau_i = L_{fi}^2 \tag{88}$$

podemos escribir

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = k_{ot}\, p_o\, e^{-\kappa_0^2 L_{fi}^2} + \sum_i k_{it}\, p_i\, e^{-\kappa_0^2 L_{fi}^2} \tag{89}$$

Recordando (6) y (7):

$$\left.\begin{array}{ll} \eta = \eta_o + \sum_i \eta_i & \beta = \sum_i \beta_i \\ \beta_i = \dfrac{\eta_i}{\eta} & 1 - \beta = \dfrac{\eta_o}{\eta} \end{array}\right\} \tag{90}$$

y definiendo

$$k_t = \eta\, f_t \tag{91}$$

será

$$\left.\begin{array}{l} k_{ot} = (1 - \beta)\, k_t \\ k_{it} = \beta_i\, k_t \end{array}\right\} \tag{92}$$

de manera que nuestra ecuación crítica podrá escribirse como

$$1 + \kappa_o^2 L_t^2 = k_t \left[(1-\beta) p_o \, e^{-\kappa_o^2 L_{fo}^2} + \sum_i \beta_i \, p_i \, e^{-\kappa_o^2 L_{fi}^2} \right] \qquad (93)$$

se reconoce que k_t es la constante de reproducción, p_o y p_i las probabilidades de escape a la resonancia, L_{fo}^2 y L_{fi}^2 las áreas de migración rápida para neutrones inmediatos y retardados.

Como una primera aproximación para encontrar κ_o^2 puede despreciarse la diferencia entre E_o y las diferentes E_i, lo cual equivale a suponer $p_o \approx p_i = p$, $L_{fo}^2 \approx L_{fi}^2 = L_f^2$ obteniéndose

$$1 + \kappa_o^2 L_t^2 = k_t \, p \, e^{-\kappa_o^2 L_f^2} = k \, e^{-\kappa_o^2 L_f^2} \qquad (94)$$

siendo

$$k = k_t \, p = \eta \, f_t \, p \qquad (95)$$

la constante de multiplicación de la pila. (94) es la ecuación crítica ordinaria. Sabido es que para grandes pilas, $\kappa_o^2 \ll 1$, $k \approx 1$, un valor aproximado de κ_o^2 es

$$\kappa_o^2 = \frac{k-1}{M^2} \qquad (96)$$

en donde

$$M^2 = L_t^2 + L_f^2 \qquad (97)$$

es el <u>área de migración total</u>. El primer valor (96) puede refinarse mediante (94) y este valor se mejoraría aún con el uso de (93). Un resultado más correcto que ya toma en cuenta la distribución espectral de neutrones resultaría de (81b).

En todos estos cálculos para nada se ha tomado en cuenta el efecto de los neutrones rápidos. Puede, sin embargo, considerarse dicho efecto en la pila térmica como una corrección si se recuerda que

$$\int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau \ll 1$$

de manera que en lugar de despreciar el término completamente en (80) se emplea (76) desarrollando el denominador por el teorema del binomio. Así,

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = p\, T_0\, h\, (\tau_t) \left\{ 1 + \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau \right\} .$$

y haciendo

$$\epsilon = 1 + \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau \qquad (98)$$

el <u>factor de utilización rápida</u>, se ve que, en primera aproximación el efecto de los neutrones rápidos puede ser incluido substituyendo p por $p\epsilon$, lo cual da para (81b) la forma mas correcta:

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 \quad \epsilon \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t-\tau')}\, p(\tau',\tau_t)\, k_t(\tau')\, d\tau' + \right.$$

$$\left. + \sum_i e^{-\kappa_0^2(\tau_t-\tau_i)}\, p(\tau_i,\tau_t)\, k_{it} \right\} \qquad (99)$$

para (93):

$$1 + \kappa_0^2 L_t^2 = k_t \, \epsilon[(1-\beta)p_0 \, e^{-\kappa_0^2 L_{f0}^2} + \sum_i \beta_i \, p_i \, e^{-\kappa_0^2 L_{fi}^2}] \tag{100}$$

y para (94) la misma forma, excepto que la constante de multiplicación se define ahora como

$$k = k_t \, p \, \epsilon = \eta \, f_t \, p \, \epsilon \tag{101}$$

en vez de (95).

Respecto al valor de ϵ observemos que, de acuerdo con (59) y (42) será

$$\epsilon = 1 + \int_0^{\tau_t} d\tau \, \frac{v\Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau' \, e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} \, p(\tau',\tau) \, k(\tau',\tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)} \, p(\tau_i,\tau) \, k_i \, (\tau) \right\} \tag{102}$$

Se puede obtener un valor aproximado de ϵ suponiendo un espectro de la forma (84), es decir, que todos los neutrones rápidos se producen a la edad τ_0. Haciendo

$$\begin{aligned} k_0(\tau) &= \eta_0 \, f(\tau) \\ k(\tau,\tau') &= k_0(\tau) \, \delta \, (\tau'-\tau_0) \end{aligned} \tag{103}$$

(102) se escribe:

$$\epsilon = 1 + \int_0^{\tau_t} \left\{ e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_0)} \, p(\tau_0,\tau) \, k_0(\tau) \right. +$$

$$\left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)} \, p(\tau_i,\tau) \, k_i(\tau) \right\} \frac{v\Sigma_a}{D} \, d\tau =$$

$$= 1 + \int_{E_t}^{E_o} \left\{ e^{-\kappa_o^2 \tau(E)} \; p(E_o, E) \; k_o(E) \; + \right.$$

$$\left. + \sum_{E_i < E} e^{-\kappa_o^2 [\tau(E) - \tau(E_i)]} \; p(E_i, E) \; k_i(E) \right\} \frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi E} \; dE \qquad (104)$$

en cuya última expresión se ha tomado $\tau(E_o) = \tau_o = 0$.

Despreciando las diferencias entre τ_o y las τ_i y haciendo

$$k(\tau) = k_o(\tau) + \sum_i k_i(\tau) = \eta \; f(\tau) = k(E) \qquad (105)$$

$$\epsilon = 1 + \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_o^2 (\tau - \tau_o)} \; p(\tau_o, \tau) \; k(\tau) \; \frac{v \Sigma_a}{D} \, d\tau =$$

$$= 1 + \int_{E_t}^{E_o} e^{-\kappa_o^2 \tau(E)} \; p(E_o, E) \; k(E) \; \frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi E} \; dE \qquad (106)$$

para pilas grandes, κ_o^2 es tan pequeño que puede hacerse $e^{-\kappa_o^2 \tau(E)} \approx 1$ y siendo la pila térmica a modo que $\overline{\frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi}}$ sea muy pequeño, puede hacerse $p(E_o, E) \approx 1$. Se obtiene

$$\epsilon \approx 1 + \int_{E_t}^{E_o} k(E) \; \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s \xi} \, \frac{dE}{E} \qquad (107)$$

De (106) resulta

$$\epsilon = 1 + e^{-\kappa_o^2 \overline{\tau(E)}} \; \overline{k(E)} \int_{E_t}^{E_o} \frac{dp(E)}{dE} \; dE$$

$$\epsilon = 1 + e^{-\kappa_o^2 \overline{\tau(E)}} \; \overline{k(E)} \; [1 - p(E_t)] \qquad (108)$$

en cuya expresión se ha tomado el origen de las edades en E_0, es decir, $\tau(E_0) = 0$. Las expresiones (107) y (108) pueden emplearse para obtener una idea del orden de magnitud de ϵ. Para grandes pilas será $e^{-\kappa_0^2 \overline{\tau(E)}} \approx 1$ y

$$\epsilon \approx 1 + \overline{k(E)}\ [1 - p(E_t)] \tag{108a}$$

De (99) puede inferirse que la constante de multiplicacion efectiva de la pila térmica es:

$$k_{ef} = l_t\ \epsilon \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau)}\ p(\tau, \tau_t)\ k\ (\tau)\ d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_i e^{-\kappa_0^2(\tau_t - \tau_i)}\ p(\tau_i, \tau_t)\ k_{it} \right\} \tag{109}$$

Para la forma aproximada (100) es conveniente introducir

$$l_{fo} = e^{-\kappa_0^2 L_{fo}^2} \qquad l_{fi} = e^{-\kappa_0^2 L_{fi}^2} \tag{110}$$

que son las <u>probabilidades de escape a la fuga rápida</u> para neutrones inmediatos y retardados. Se tiene entonces

$$k_{ef} = k_t\ l_t\ \epsilon[(1-\beta)\ p_0\ l_{fo} + \sum_i \beta_i\ p_i\ l_{fi}] \tag{111}$$

y en el caso más simple en que se desprecian las diferencias de energía entre neutrones inmediatos y retardados,

$$k_{ef} = k_t\ p\ \epsilon\ l_t\ l_f = k\ l_t\ l_f = \eta\ p\ \epsilon\ f_t\ l_t\ l_f \tag{112}$$

que es la expresión usual.

En cualquier caso la condición crítica de la pila tiene la bien conocida forma

$$k_{ef} = 1 \tag{113}$$

B) <u>Pila epitérmica</u>.

Cuando los hendimientos rápidos tienen un efecto comparable a los térmicos, ya no es posible despreciar el segundo término de (80), ni siquiera puede tratársele como mera corrección. Se cae entonces al caso de la <u>pila epitérmica</u> o <u>intermedia</u>. Esta pila opera tanto con neutrones térmicos como rápidos. Ocurre cuando f(E) es apreciable a altas energías o cuando $\frac{\Sigma_a}{\Sigma\xi}$ no es pequeño debido a la mayor proporción de material hendible respecto a moderador. La ecuación crítica para esta pila resulta ser:

$$\frac{1}{1+\kappa_o^2 L_t^2}\left\{\int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_o^2(\tau_t-\tau)}\, p(\tau,\tau_t)\; k_t(\tau)\; d\tau + \sum_i e^{-\kappa_o^2 L_{fi}^2}\, p_i\; k_{it}\right\} +$$
$$+\int_0^{\tau_t} d\tau\; \frac{v\Sigma_a}{D}\left\{\int_0^{\tau} d\tau'\; e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau')}\; p(\tau',\tau)\; k(\tau',\tau) +\right.$$
$$\left. + \sum_{\tau_i<\tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_i)}\; p(\tau_i,\tau)\; k_i(\tau)\right\} = 1 \tag{114}$$

que es (80) en forma explícita. Utilizando la aproximación de un espectro monocromático se obtiene la expresión aproximada

$$\frac{k_t \left[(1-\beta)\ p_0\ e^{-\kappa_o^2 L_{fo}^2} + \sum_i \beta_i\ p_i\ e^{-\kappa_o^2 L_{fi}^2} \right]}{1 + \kappa_o^2\ L_t^2} +$$

$$+ \int_0^{\tau_t} \left\{ e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_o)}\ p(\tau_o,\tau)\ k_0(\tau)\ + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_i)}\ p(\tau_i,\tau)\ k_i(\tau) \right\} \frac{v\Sigma_a}{D}\, d\tau = 1 \qquad (115)$$

Como primera aproximación para κ_o^2 puede emplearse la que resulta de despreciar en (115) las diferencias entre τ_0 y las τ_i. Se obtiene

$$\frac{k\ e^{-\kappa_o^2 L_f^2}}{1 + \kappa_o^2 L_t^2} + \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_o)}\ p(\tau_0,\tau)\ k(\tau)\ \frac{v\Sigma_a}{D}\, d\tau = 1 \qquad (116)$$

El orden de magnitud κ_o^2 puede inferirse de la ecuación

$$\frac{k\ e^{-\kappa_o^2 L_f^2}}{1 + \kappa_o^2 L_t^2} + k\ (\bar{\tau})\ e^{-\kappa_o^2 \bar{\tau}}\ [1 - p\ (\tau_t)] = 1 \qquad (117)$$

en la que se ha tomado E_0 como origen de las edades.

La constante efectiva de reproducción para una pila epitermica esta dada por el primer miembro de (114).

$$k_{ef} = l_t \left\{ \int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_o^2(\tau_t-\tau)}\ p(\tau,\tau_t)\ k_t(\tau)\ d\tau\ + \right.$$

$$\left. + \sum_i e^{-\kappa_o^2 L_{fi}^2}\ p_i\ k_{it} \right\} +$$

$$+\int_0^{\tau_t} d\tau\, \frac{v\Sigma_a}{D}\left\{\int_0^{\tau} d\tau'\, e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau')}\, p(\tau',\tau)\, k(\tau',\tau)\, + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_i)}\, p(\tau_i,\tau)\, k_i(\tau)\right\} \qquad (118)$$

y la condición crítica sigue siendo (113).

C) Pila rápida.

Podemos considerar ahora la situación extrema que se presenta cuando la absorción es tan grande y la deceleración tan pequeña, $\frac{\Sigma_a}{\Sigma\xi} >> 1$, que tanto $p(\tau',\tau_t)$ como p_i en (80) son practicámente cero. En general, $p = p(\tau_t) \approx 0$. Los neutrones no tienen tiempo de hacerse térmicos y la pila es rápida, es decir, funciona esencialmente con neutrones rápidos. La ecuación crítica es ahora

$$\int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau)\, d\tau = 1 \qquad (119)$$

o en forma explicita:

$$\int_0^{\tau_t} d\tau\, \frac{v\Sigma_a}{D}\left\{\int_0^{\tau} d\tau'\, e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau')}\, p(\tau',\tau)\, k(\tau',\tau)\, + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_i)}\, p(\tau_i,\tau)\, k_i(\tau)\right\} = 1 \qquad (120)$$

Como primera aproximación:

$$\int_0^{\tau_t} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_o)}\, p(\tau_o,\tau)\, k(\tau)\, \frac{v\Sigma_a}{D}\, d\tau = 1 \qquad (121)$$

El orden de magnitud de κ_o^2 puede inferirse de la relación

$$k(\bar{\tau})\ e^{-\kappa_o^2 \bar{\tau}} = 1 \qquad (122)$$

obtenida de (117) considerando como nulas k y $p(\tau_t)$. De aquí se obtiene

$$\kappa_o^2 = \frac{1}{\bar{\tau}} \log\ k(\bar{\tau}) \qquad (123)$$

La constante efectiva de reproducción para la pila rápida es

$$k_{ef} = \int_0^{\tau_t} d\tau\ \frac{v\Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau'\ e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau')}\ p(\tau',\tau)\ k(\tau',\tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_o^2(\tau-\tau_i)}\ p(\tau_i,\tau)\ k_i(\tau) \right\} \qquad (124)$$

y la condición crítica está dada por (113).

El caso de la pila rápida merece una consideración especial. El caso límite representado por la ecuación (119) es precisamente, según (73), el que hace $D(\kappa_o^2) = 0$ y siendo nulo el determinante de Fredholm de la ecuación (57), la solución (74) no es válida. El mecanismo entero de operación de la pila rápida no corresponde pues a la situación considerada en las dos clasificaciones anteriores y necesita tratarse por separado.

Con el objeto de comprender el origen de la falla del método, es preciso regresar a las ecuaciones básicas (46). Hemos dicho que en la pila rápida la absorción es tan considerable que los neutrones no tienen oportunidad de hacerse térmicos. Esto significa que debemos tener $n_t(\underline{r}) = 0$. Introduciendo esta condición en (46) obtenemos las ecuaciones diferenciales de la pila rápida:

$$\Delta q'(\underline{r}\ \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}\ \tau)}{\partial\tau} - \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau,\tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}\ \tau')\, d\tau' +$$

$$+ \sum_i \frac{c_i(\underline{r})}{p(\tau_i)T_i} \delta(\tau-\tau_i) = 0 \qquad (125a)$$

$$\frac{c_i(\underline{r})}{T_i} = -\int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{r}\ \tau')\, d\tau' \qquad (125b)$$

con las condiciones a la frontera:

$$[q'\ (\underline{r}\ \tau)\ ]_{s'} = 0 \qquad (A')$$

$$q'\ (\underline{r}\ \tau_t) = p\ q'\ (\underline{r}\ \tau_t) = 0 \qquad (B')$$

La nueva condicion $pq'(\underline{r}\ \tau_t) = 0$ resultá de (46b) haciendo $n_t(\underline{r}) = 0$. Se cumple automáticamente puesto que $p(\tau_t) = 0$.

La ecuación (125b) ya nos da $c_i(\underline{r})$ en términos de $q'(\underline{r}\ \tau)$, así que solo debemos preocuparnos de esta última. El resultado de substituir (125b) en (125a) puede obtenerse haciendo $n_t(\underline{r}) = 0$ en (47). Se obtiene

$$\Delta q'(\underline{r}\ \tau) - \frac{\partial q'(\underline{r}\ \tau)}{\partial\tau} + \int_0^{\tau_t} K_0(\tau,\tau')\ q'(\underline{r}\ \tau')\, d\tau' = 0 \qquad (126)$$

con $\kappa_0(\tau,\tau')$ dado por (48). Proponemos ahora

$$q'(\mathbf{r}\ \tau) = S(\mathbf{r})\ H(\tau) \tag{127}$$

y separando variables resulta:

$$\Delta S(\mathbf{r}) + \kappa_0^2 S(\mathbf{r}) = 0 \tag{128}$$

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} + \kappa_0^2\ H(\tau) = \int_0^{\tau_t} k_0(\tau,\tau')\ H(\tau')\ d\tau' \tag{129}$$

De nuevo, la solución de (128) con la condición $[S(r)]_{s'} = 0$ no sólo determina el valor de la distribución espacial de neutrones rápidos, sino el de κ_0^2 en términos de la geometría de la pila. Queda pues por resolver la ecuación (129) con la condición $H(0) = 0$. Esta ecuación se obtiene de (52) haciendo $k_0(\tau) = 0$, así que la ecuación integral correspondiente sera la ecuación homogénea

$$H(\tau) = \int_0^{\tau_t} K(\tau,\tau')\ H(\tau')\ d\tau' \tag{130}$$

La condición para que esta ecuación tenga solución es que su determinante de Fredholm se anule,

$$D\ (\kappa_0^2) = 0 \tag{131}$$

y es ahora esta relación la que va a actuar como ecuación critica. Utilizando (68):

$$H(\tau) = F(\tau) \int_0^{\tau_t} G(\tau')\ H(\tau')\ d\tau' = A\ F(\tau) \tag{132}$$

Así que de (67) se obtiene la solución particular:

$$H(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau')} \frac{\eta(\tau')}{p(\tau')} d\tau' + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_0^2(\tau-\tau_i)} \frac{\eta_i}{p(\tau_i)} \quad (133)$$

que da la función de edad para el caso en consideración. De (132):

$$A\ F(\tau) = F(\tau) \int_0^{\tau_t} G(\tau')\ A\ F(\tau')\ d\tau' = A\ F(\tau) \int_0^{\tau_t} K(\tau',\tau')\ d\tau'$$

así que si $A \neq 0$, deberá cumplirse (119). En tal caso A es arbitraria y la solución, como la de toda pila crítica, queda determinada hasta un factor multiplicativo. Este análisis demuestra que la ecuación previamente obtenida como condición crítica para la pila rápida es correcta y cubre el caso $D(\kappa_0^2) = 0$ que en los dos tipos de pila tratados anteriormente había quedado fuera de consideración.