Vol. II, 1 REVISTA MEXICANA DE FISICA 1953

MOVIMIENTO DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE DADO POR LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LA ECUACION DEL POTENCIAL.

Anselmo Chargoy

Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional de México

(Recibido: Diciembre 15, 1952)

RESUMEN

Observing the coefficients g^i_j, h^i_j *in the potential equation of the geomagnetic field, one expects that any physical model built according to that equation must have the changes that are shown in table I.*

In this paper three such models are discussed as well as their motions through 110 years from 1835 to 1945.

The author believes that this discussion may be of interest to some physicists who make researches in the field of geomagnetism.

INTRODUCCION

1.- En el presente trabajo se usa la ecuación del potencial dada por Gauss[1]. El sistema de coordenadas es el terrestre, en tal forma, que el plano xoy es el plano del ecuador geográfico; el plano xoz es el plano que contiene el meridiano de Greenwich. Se supone que la superficie de la Tierra es esférica, para todos los puntos es distancia al origen $r = a$. Como es usual las coordenadas esféricas de puntos P sobre esa superficie son $P(\lambda, \theta)$. Las funciones de Legendre $P_j^i(\theta)$ se expresaron simplemente por P_j^i. Se trabaja solamente el campo de origen interno y aproximado hasta términos de orden dos con respecto a P_j^i, es decir hasta P_2^2. De esta manera puede escribirse la ecuación del potencial magnético terrestre como:

$$V = a\,\{g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos\lambda + h_1^1 \operatorname{sen}\lambda) P_1^1 + g_2^0 P_2^0 +$$

$$+ (g_2^1 \cos\lambda + h_2^1 \operatorname{sen}\lambda) P_2^1 + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2\} \qquad (1)$$

los coeficientes g_j^i, h_j^i, se tomaron[2] de la tabla I

TABLA I

Autor	Epoca	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Gauss	1835	-3235	-311	625	51	292	12	-2	157
Adams	1845	-3219	-278	578	9	284	-10	4	135
Adams	1880	-3168	-243	603	-49	297	-75	61	149
Fritsche	1885	-3164	-241	591	-35	286	-75	68	142
Dyson Fourner	1922	-3095	-226	592	-89	299	-124	144	84
Afanasieva	1945	-3032	-229	590	-125	288	-146	150	48

1 unidad = 10^{-4} oersteds.

Si se establece un sistema de modelos magnéticos que desarrolle el potencial dado en la ecuación (1), los valores absolutos de sus momentos, las direcciones en sus ejes, sus puntos de residencia, son funciones de los coeficientes g_j^i, h_j^i y como se ve en la Tabla I, cambiarán con cierta regularidad en el tiempo. En el presente trabajo se trata con tres ejemplos de esos modelos.

a) Un dipolo y un cuadripolo centrales, es decir, con residencia en el centro O del sistema de coordenadas, sistema trabajado por Umow[3]. El dipolo tiene la dirección de su eje en función de g_1^0, g_1^1, h_1^1. En el cuadripolo los ejes tienen dirección determinada por g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2, h_2^2.

b) Dos dipolos excéntricos, trabajo de H.G. Macht[4], en los cuales los ejes están: el primero en dirección Norte-Sur, el segundo de dirección definida por g_1^1, h_1^1. Los lugares de residencia de ambos, funciones de g_2^1, h_2^1.

c) Un dipolo excéntrico ideado por A. Schmidt[5] con residencia en un punto C, función de g_2^1, h_2^1. Con un cuadripolo[6] cuyos ejes tienen direcciones función de g_1^1, h_1^1, g_2^1 h_2^1.

En todos los casos, para los momentos de dipolo M_1, y de cuadripolo M_2 se usan las definiciones de momento reducido $M_1 = m_1\, a^3$, $M_2 = m_2\, a^4$. En todo el trabajo cuando no se advierte expresamente, se considera el radio de la Tierra como igual a 1. En las tablas la intensidad siempre se midió con 1 unidad = 10^{-4} oersteds. La noción de cuadripolo que se usa en este trabajo, es la de considerar[10] un sistema de dos dipolos paralelos, de igual valor absoluto de momento pero de sentido contrario entre sí; con distancia $l_1 \to 0$ entre ellos; de esta manera, si OH_1 es la dirección del momento de uno de ellos, OH_2 es la dirección de $\bar{l}_1$ contada a partir del dipolo que fija la dirección OH_1. OH_1, OH_2 son los ejes del cuadripolo. Si el valor absoluto del momento de uno de los dipolos es $m_1 = ql_0$, el valor absoluto del momento del cuadripolo esta dado por

$$m_2 = 2\ m_1\ l_1 = 2\ ql_0\ l_1\ .$$

Modelos

2.- Caso a): Se omitió el dato de 1880; sean $OH_1(\lambda_1,\theta_1)$, $OH_2(\lambda_2,\theta_2)$ con $OH_0(\lambda_0,\theta_0)$ dirección normal al plano H_2OH_1. Sean también x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; los cosenos directores de OH_1, y OH_2. Con el uso del sistema[6] de ecuaciones:

$$m_2\ (z_1z_2 - y_1y_2) = g_2^0 + \frac{g_2^2}{\sqrt{3}} \quad ,$$

$$m_2\ (x_1z_2 + x_2z_1) = \frac{2\ g_2^1}{\sqrt{3}} \quad ,$$

$$m_2\ (y_1z_2 + y_2z_1) = \frac{2\ h_2^1}{\sqrt{3}} \quad ,$$

$$m_2\ (x_1x_2 - y_1y_2) = \frac{2\ g_2^2}{\sqrt{3}} \quad ,$$

$$m_2 \, (x_1 y_2 + x_2 y_1) = \frac{2\, h_2^2}{\sqrt{3}}$$

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \quad ,$$

$$x_i = \operatorname{sen} \theta_i \cos \lambda_i \quad ,$$

$$y_i = \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \lambda_i \quad ,$$

$$z_i = \cos \theta_i \quad , \qquad i = 1,2$$

se obtuvo la siguiente

TABLA II

año	λ_0	θ_0	λ_1	θ_1	λ_2	θ_2
1835	-95°42'	62°04'	178°19'	97°32"	-87°41'	151°50'
1845	-92°48'	64°38'	177°35'	90°50'	-89°17'	154°53'
1885	-99°00'	62°04'	168°10'	94°39'	-103°45'	151°58'
1922	-105°12'	65°39'	161°14'	82°11'	-130°59'	153°19'
1945	-107°06'	68°42'	158°14'	78°13'	-140°30'	154°59'

Los ángulos V formados por los ejes OH_1 y OH_2 entre sí, y los valores de m_2 en esas épocas son:

TABLA III

año	V	m_2
1835	85°14'	386.85
1845	90°36'	363.46
1885	93°48'	383.61
1922	87°20'	432.64
1945	89°12'	439.21

3.- Como se ve en la tabla III, parece que el eje OH_2 tuviera un movimiento de rotación, muy aproximadamente alrededor del eje Norte-Sur geográfico y en la dirección Oeste, con un desplazamiento de 53° en los ciento diez años. En ese tiempo el eje OH_1 ha tenido un movimiento de rotación alrededor de OH_2 con un giro de 33° en dirección Este. En la figura 1 se han marcado las trayectorias de las intersecciones de los ejes con la superficie de la tierra. Desde luego pudieron tomarse por direcciones las que corresponden a los lados del ángulo opuesto al ángulo V. Existe la probabilidad de que el ángulo V sea de 90°, como se ve en la tabla III y que por errores en observación o de otra índole el valor V difiere de 90°. El momento m_2 es creciente en oposición al valor absoluto del momento m_1 que como es bien sabido esta decreciendo.

4.- Caso b): Aquí solo se consideran los datos inicial, 1835 y final, 1945 de la tabla I. Los resultados son: un dipolo de valor absoluto de momento $(c_1^1)^2 = (g_1^1)^2+(h_1^1)^2$ con residencia en un punto Q, con distancia r_q al centro O, que tine:

año	c_1^1	λ_q	r_q
1835	698	-26°27'	836 Km.
1945	633	-93°28'	916 "

λ_0 es el ángulo que forma OQ con OX. Se ve un movimiento de rotación de OQ, de 67° en dirección Oeste, y un alejamiento de Q de 80 Km. de O.

Otro dipolo de momento con valor absoluto: g_1^0, con residencia en un punto $P(r_p, \lambda_p, \theta_p)$. Como en el caso anterior se tiene:

año	g_1^0	λ_p	θ_p	r_p
1835	3235	182°	86°	333 Km.
1945	3032	153°	76°	405 "

con una rotación de 31° en la direcoión WNW y un alejamiento de 72 Km. de 0.

5.- El incremento de potencial desarrollado por $\bar{C}_1^1$ al desplazarse de 0 hacia $Q(x_q, y_q)$, puede expresarse por:

$$V = \{-g_1^1 x_q - h_1^1 y_q\} P_2^0 + \{(g_1^1 x_q - h_1^1 y_q) \cos 2\lambda +$$

$$+ (h_1^1 x_q + g_1^1 y_q) \operatorname{sen} 2\lambda\} \sqrt{3} \; P_2^2 \quad .$$

Que es el potencial de un cuadripolo con residencia en 0, y cuyos ejes están dados en las direcciones $\bar{C}_1^1$ y $\overline{OQ} = \bar{r}_q$. Con valor absoluto de momento $m_{2,q} = 2\, C_1^1\, r_q$, que tuvo los valores 183, 182 en 1835, 1945, como C_1^1 viene decreciendo, el resultado es un crecimiento de r_q.

En forma semejante, el incremento de potencial desarrollado por $\bar{g}_1^0$ al desplazarse de 0 hacia $P(x_p, y_p, z_p)$ es:

$$V_p = 2\, g_1^0\, z_p\, P_2^0 + \{x_p \cos \lambda + y_p \operatorname{sen} \lambda\}\, g_1^0 \sqrt{3} \; P_2^1 \quad ,$$

que corresponde al potencial de un cuadripolo con residencia en 0 y con ejes en direcciones $\bar{g}_1^0$ y $\overline{OP} = \bar{r}_p$, el momento $m_{2,p} = 2\, g_1^0\, r_p$ ha venido creciendo, de 338 a 385 unidades en los ciento diez años de la observación, como g_1^0 ha decrecido como se ve en la tabla I, entonces r_p ha experimentado un crecimiento.

En este sistema de modelos, pudiera considerarse, que el movimiento de rotación dado con diferentes valores para las direcciones OP y OQ encuentran correspondencia con las rotaciones, también con diferentes velocidades en los ejes OH_1, OH_2 del sistema a).

6.- Caso c). Se establece el dipolo definido por los términos con coeficientes g_1^0, g_1^1, h_1^1 en la ecuación (1), se considera un traslado de ese dipolo paralelo a si mismo, a un punto $C(x,y,z)$. Se tendrá un incremento de potencial, considerando que $l = OC << a$, se puede tomar el primer término del desarrollo de Taylor, que tendrá forma de cuadripolo con coeficientes a_2^0, a_2^1, b_2^1, b_2^2, a_2^2. Se toman valores para las coordenadas x,y,z de C, tales que el cuadripolo definido por los coeficientes $g_2^0 - a_2^0$, $g_2^1 - a_2^1$, $h_2^1 - b_2^1$, $g_2^2 - a_2^2$, $h_2^2 - b_2^2$, sea de momento medio mínimo[8].

Esto determina los valores x,y,z con las ecuaciones dadas por A. Schmidt[7], para las épocas a que se refiere este trabajo se tiene en Km.:

TABLA IV

año	x	y	z	r
1835	-279	- 40	- 65	289
1845	-284	- 6	- 25	285
1880	-307	63	25	314
1885	-297	60	12	305
1922	-340	115	61	364
1945	-345	150	96	388

r distancia al centro 0

Si se hace una transformación de coordenadas vg.:

$$\bar{x} = 0.428\ x + 0.904\ z$$

$$\bar{y} = -0.507\ x + 0.827\ y + 0.241\ z$$

$$\bar{z} = -0.748\ x - 0.561\ y + 0.355\ z$$

en el nuevo sistema se tiene para el punto C.

TABLA V

año	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
1835	-178	92	208
1945	-144	133	207
1880	-109	214	203
1885	-121	204	193
1922	- 91	282	210
1945	- 61	322	207

Se ve que los seis puntos se encuentran muy próximos a un plano:

$$-\ 3.625\ x - 2.722\ y + 1.719\ z = 1\ .$$

Para las posiciones de los puntos extremos, 1835, 1945, se tiene en coordenadas geográficas:

1835: 13°3' lat S 175°45' long W
1945: 14°23' lat N 156°24' long E

La componente de $\overline{OC}$ en el plano del ecuador tuvo un movimiento de rotación de 31°51' en la dirección Oeste y C se alejó 99 Km. del centro O.

7.- Se pueden hacer consideraciones semejantes a las del párrafo 6; el incremento de potencial al desplazarse el dipolo central hacia el punto C estará dado por

$$\Delta V_1 = a_2^0 P_2^0 + (a_2^1 \cos \lambda + b_2^1 \operatorname{sen} \lambda) P_2^1 +$$

$$+ (a_2^2 \cos 2\lambda + b_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2 \qquad (2)$$

que corresponde a un cuadripolo con residencia en O, con ejes que coinciden con la dirección m_1 del dipolo central y $\overline{OC}$ la dirección del desplazamiento. Los valores absolutos del momento m_2 de este cuadripolo son: 300, 283, 319, 309, 361, 377 para los seis casos considerados. Como de $(m_1)^2 = (g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2$, se tuvo m_1 = 3309, 3282, 3231, 3227, 3159, 3097, la distancia $l = OC$ dado por la ecuación $m_2 = 2l\, m_1$ ha venido creciendo de 289 a 388 Km.

8.- Si el dipolo central de potencial:

$$V_1 = g_1^0 P_1^0 + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \operatorname{sen} \lambda) P_1^1$$

se traslada paralelamente hacia C, teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo 7, y por la ecuación (2), la ecuación (1) puede escribirse

$$V = V_1 + \Delta V_1 + V_2^1 \quad ,$$

en que[6]

$$V_2^1 = (g_2^0 - a_2^0) P_2^0 + \{(g_2^1 - a_2^1) \cos \lambda + (h_2^1 - b_2^1) \operatorname{sen} \lambda\} \times$$

$$\times P_2^1 + \{(g_2^2 - a_2^2) \cos 2\lambda + (h_2^2 - b_2^2) \operatorname{sen} 2\lambda\} P_2^2$$

que corresponde al potencial de un cuadripolo central tal, que sus ejes OH_1, OH_2 son perpendiculares entre sí y están en un plano normal a la dirección $\bar{m}_1$ del dipolo, así, si se traslada el cuadripolo paralelamente hasta el punto C, se tiene un sistema ortogonal formado con los tres ejes. Puede suponerse que el incremento de potencial para un traslado así del cuadripolo resulta muy pequeño y puede despreciarse.

Si se representan por x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, respectivamente los cosenos directores de OH_1, OH_2 y por $m_2^{\prime}$ el valor absoluto del momento del cuadripolo de $V_2^{\prime}$, se tiene:

TABLA VI

año	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	$m_2^{\prime}$
1835	-0.9931	-0.0874	0.0786	0.0706	-0.9781	-0.1958	240
1845	-0.9955	-0.0581	0.0756	0.0437	-0.9827	-0.1802	212
1880	-0.9888	0.1135	0.0974	-0.1294	-0.9759	-0.1758	247
1885	-0.9856	0.1363	0.1005	-0.1519	-0.9736	-0.1703	238
1922	-0.9216	0.3632	0.1368	-0.3816	-0.9126	-0.1467	240
1945	-0.8899	0.4285	0.1563	-0.4478	-0.8834	-0.1385	219

Se ve que los ejes OH_1, OH_2, han tenido un movimiento de rotación con cierta regularidad, en tal forma, que OH_1 (λ_1, θ_1) tuvo las posiciones:

año	λ_1	θ_1
1835	185°00′	85°30′
1945	154°18′	81°00′

Es de hacer notar que la rotación de 31° en la dirección Oeste es muy aproximada a la de OC.

9.- El hecho, que los movimientos de rotación del cuadripolo de potencial V_2^{1} descrito en párrafo 8, y del centro magnético C, descrito en párrafo 7, tengan su componente en el plano del ecuador casi coincidiendo, sugiere que el cuadripolo de potencial V_2^{1} y el de potencial ΔV_1 tratado en párrafo 7, sean tratados como un solo elemento, vg.: como el cuadripolo central visto en párrafo 2. También mientras no se fijan las fuentes que producen las acciones de dipolo y cuadripolo, puede ocurrir que la función $r = \frac{m_2}{2m_1}$ que da la distancia OC del centro magnético terrestre, expuesto en párrafo 7, no corresponda a un hecho real. Lo mismo puede decirse de las distancias r_q, r_p, del párrafo 6.

La velocidad aproximada de 0.5 mm/seg. señalada por Elssaser[9] para puntos cercanos al ecuador del núcleo terrestre en su probable movimiento en dirección Oeste, puede hacerse corresponder:

En el modelo a) al eje OH_1 en su rotación.

En el modelo b) al movimiento del punto P, lugar de residencia del momento $\overline{g}_1^{0}$.

En el modelo c) al movimiento de todo el sistema, también en su rotación.

11.- En el modelo a) puede definirse el eje Norte-Sur en la dirección del dipòlo central y un plane normal a este eje, que pase por O, como plano del ecuador geomagnético; en tal forma, que si la dirección Norte-Sur del dipolo se toma como eje OZ de un sistema de coordenadas ortogonales la ecuación (1) puede escribirse:

$$V = \bar{g}_1^0 P_1^0 + \bar{g}_2^0 P_2^0 + (\bar{g}_2^1 \cos\lambda + \bar{h}_2^1 \operatorname{sen}\lambda) P_2^1 +$$

$$+ (\bar{g}_2^2 \cos 2\lambda + \bar{h}_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda) P_2^2$$

$\bar{g}_j^i$, $\bar{h}_j^i$ en el nuevo sistema.

También puede aprovecharse la observación de la tabla III, y aceptando que el ángulo V es muy probablemente recto (el promedio de valor es 89°15') se puede tomar OH_2 como eje OZ, OH_1 como eje OX y OH_0 como eje OY, en este sistema la ecuación (1) puede escribirse:

$$V = \bar{g}_1^0 P_1^0 + (\bar{g}_1^1 \cos\lambda + \bar{h}_1^1 \operatorname{sen}\lambda) P_1^1 + \bar{g}_2^1 \cos\lambda\, P_2^1 \quad .$$

En el modelo c) tomando todo el sistema ortogonal de los tres ejes del dipolo y cuadripolo como ejes de un sistema coordenado, puede escribirse la ecuación (1) como:

$$V = \frac{\bar{g}_1^0 a^3}{r^2} P_1^0 + \frac{\bar{h}_2^2 a^4}{r^3} \operatorname{sen} 2\lambda\, P_2^2$$

con r, λ_1, θ, en el nuevo sistema.

El modelo b) como está presentado por Macht no ofrece gran simplificación en un nuevo sistema de coordenadas. Con una ligera variación; vg.: Si en el punto $Q(x_q, y_q, z_q)$ en vez de hacer $z_q = 0$, se hace $z_q = z_p$, cambia ligeramente de posición cada uno de los dipolos, pero el modelo con este cambio tiene la ventaja de que los dos dipolos residen en un mismo plano parálelo al ecuador geográfico, en este caso tomando la dirección $\bar{g}_1^0$ como eje OZ, con O residente en P el eje OX paralelo a la dirección $\bar{C}_1^1$; entonces, en este sistema de coordenadas puede escribirse la ecuación (1):

$$V = \frac{a^3}{r^2}(\bar{g}_1^0 P_1^0 + \bar{C}_1^1 \cos\lambda\, P_1^1) + \frac{a^4}{r^3}\{\bar{g}_2^0 P_2^0 +$$

$$+ (\bar{g}_2^2 \cos 2\lambda + \bar{h}_2^2 \operatorname{sen} 2\lambda)\, P_2^2\} \quad .$$

El contenido del párrafo 8 se expuso en el Congreso Científico del IV Centenario de la Universidad en Septiembre, 1951.

Para la ejecución de este trabajo se recibió ayuda del Instituto Nacional de la Investigación Científica. Este trabajo se presentó en la primera reunión de la Sociedad Mexicana de Física, en Abril de 1952.

REFERENCIAS

1 S.Chapman and J. Bartels, Geomagnetism, II, 639, Claredon Press, Oxford (1940).
2 V.I.Afanasieva, Terr.Mag., 51, 26, Table 6 (1946).
3 N.Umow, Terr.Mag., 9, 105 (1904).
4 H.G.Macht, Trans.Amer.Geophys. Union, V. 32, 555 (1952).
5 J.Bartels, Terr.Mag., 41, 248 (1936).
6 A.Chargoy, Journal of Geophys.Res., 55, 47 (1950).
7 Obra citada en 1 pag. 651.
8 Obra citada en 5 pag. 246.
9 W.M.Elssaser, Trans.Amer.Geophys. Union, V.31, 454 (1950).
10 Stratton, Electromagnetic Theory, 179, McGraw-Hill, 1945.

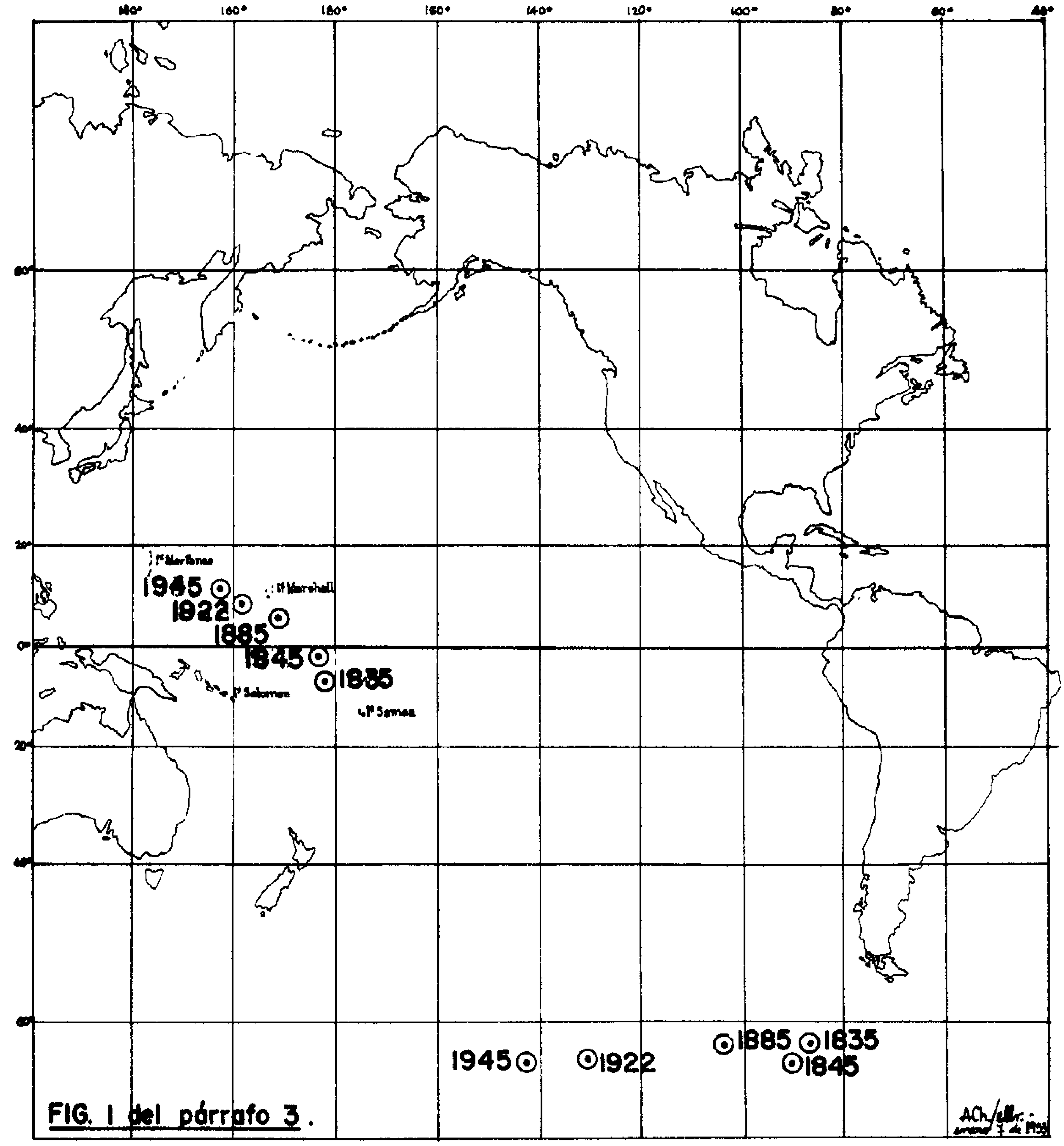

FIG. 1 del párrafo 3.

⊙1835

Posiciones del centro magnético C, definido por Schmidt, en el plano mas aproximado según párrafo 6. La distancia en las posiciones 1835-1945 es de 258 Km. Datos de la Tabla V.

⊙1845

⊙1885

⊙1880

⊙1922

⊙1945

ACh/llr
enero 8 de 1953