

TEORIA DE LOS REACTORES NUCLEARES HOMOGENEOS II*

Efecto del espectro de neutrones en las condiciones dinámicas
de un reactor.

Alejandro Medina

Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Abril 10, 1953)

RESUMEN

In this paper the effect of the fissior neutron spectrum on the dynamic conditions of a pile is examined. The diffusional approximation leads to integrodifferential equations that can be solved by taking Laplace transforms. A general inhour equation results describing the conditions of thermal and intermediate piles when the Fredholm determinant of the original equations does not vanish. Fast pile appears as a special case when the determinant vanishes, corresponding to the absence of an equilibrium thermal neutron density in the pile.

*Trabajo presentado en el Congreso Científico Mexicano, Septiembre, 1951.

1.- La Dinámica de la pila.

En el trabajo anterior* se resolvieron las ecuaciones de la pila para condiciones estacionarias y se determinaron las condiciones críticas. Ahora procederemos al examen del caso general en que las condiciones varían con el tiempo y consideramos las ecuaciones completas establecidas en I(44) con las condiciones (A), (B) y (C). Se trata de encontrar la solución que inicialmente, es decir, para $t = 0$, se reduce a una distribución arbitrariamente asignada para cada densidad de neutrones. Supondremos pues que

$$q'(\underline{r}, \tau, 0) = Q'(\underline{r}, \tau)$$

$$c_i(\underline{r}, 0) = C_i(\underline{r}) \quad (1)$$

$$n_t(\underline{r}, 0) = N(\underline{r})$$

son funciones conocidas que satisfacen la condición de anularse en la frontera extrapolada de la pila.

Introduciremos la transformada de Laplace de cualquier función $\varphi(\underline{r}, \tau, t)$ de las que se consideran en el reactor (que puede ser independiente de τ):

$$L \varphi(\underline{r}, \tau, t) = \bar{\varphi}(\underline{r}, \tau, \lambda) = \int_0^{\infty} \varphi(\underline{r}, \tau, t) e^{-\lambda t} dt \quad (2)$$

$$L^{-1} \bar{\varphi}(\underline{r}, \tau, \lambda) = \varphi(\underline{r}, \tau, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \bar{\varphi}(\underline{r}, \tau, t) e^{-\lambda t} dt \quad (2a)$$

*Rev. Mex. Fis. 2, 1, (1953) que de aquí en adelante se designará como I.

en donde la integral (2a) se efectúa en el plano complejo λ a lo largo del contorno de Bromwich.

El transformado de I(44a) se obtiene multiplicando por $e^{-\lambda t}$, integrando sobre t de 0 a ∞ , empleando la conocida expresión

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(\underline{x}, \tau, t)}{\partial t} e^{-\lambda t} dt = -\varphi(\underline{x}, \tau, 0) + \lambda \bar{\varphi}(\underline{x}, \tau, \lambda)$$

y teniendo en cuenta (1). Se tiene así:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \frac{\partial \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda)}{\partial \tau} - \frac{\lambda}{D} \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \\ - \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \bar{q}(\underline{x}, \tau', \lambda) d\tau' + \frac{k_t(\tau)}{T_0 p(\tau)} \bar{n}_t(\underline{x}, \lambda) + \\ + \sum_i \frac{\bar{c}_i(\underline{x}, \lambda)}{T_i p(\tau_i)} \delta(\tau - \tau_i) + \frac{1}{D} Q'(\underline{x}, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Transformando del mismo modo I(44c) se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{c}_i(\underline{x}, \lambda) = \frac{T_i}{1 + \lambda T_i} \left\{ - \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \bar{q}'(\underline{x}, \tau', \lambda) d\tau' + \right. \\ \left. + \frac{k_{it}}{T_0} \bar{n}_t(\underline{x}, \lambda) + C_i(\underline{x}) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Substituyendo (4) en (3) resulta:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \frac{\partial \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda)}{\partial \tau} - \frac{\lambda}{D} \bar{q}'(\underline{x}, \tau, \lambda) - \\ - \int_0^{\tau_t} \left\{ \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} + \sum_i \frac{k_i(\tau')}{p(\tau_i)} \frac{\delta(\tau - \tau_i)}{1 + \lambda T_i} \right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \bar{q}'(\underline{x}, \tau', \lambda) d\tau' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)} + \sum_i \frac{k_{1t}}{p(\tau_i)} \frac{\delta(\tau-\tau_i)}{1+\lambda T_i} \right\} \frac{\bar{n}_t(\underline{r}, \lambda)}{T_0} + \frac{Q'(\underline{r}, \tau)}{D} + \\
& + \sum_i \frac{C_i(\underline{r}) \delta(\tau-\tau_i)}{p(\tau_i)(1+\lambda T_i)} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Hágase

$$\bar{q}'(\underline{r}, \tau, \lambda) = u(\underline{r}, \tau, \lambda) e^{-\lambda\theta(\tau)} \tag{6}$$

en donde $\theta(\tau)$ se define por

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{D'} = \int_E^\infty \frac{dE'}{v' \Sigma' \xi E'} = \theta(E) \tag{7}$$

y satisface las ecuaciones

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{D} \quad \frac{d\theta(E)}{dE} = - \frac{1}{v \Sigma \xi E} \tag{8}$$

Se advierte que $\theta(\tau)$, cuya introducción en (6) tiene por objeto eliminar el término $-\frac{\lambda}{D} \bar{q}'(\underline{r}, \tau, \lambda)$ de (5), es el tiempo de desceleración, es decir, el tiempo que tarda un neutrón para envejecer de la edad 0 a la edad τ por colisión con núcleos del material de la pila.

Substituyendo (6) en (5) se obtiene la ecuación integrodiferencial que satisface u :

$$\begin{aligned}
\Delta u(\underline{r}, \tau, \lambda) - \frac{\partial u(\underline{r}, \tau, \lambda)}{\partial \tau} + \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau, \tau', \lambda) u(\underline{r}, \tau', \lambda) d\tau' + \\
+ \kappa_0(\tau, \lambda) \frac{\bar{n}_t(\underline{r}, \lambda)}{T_0} + M(\underline{r}, \tau, \lambda) = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

con

$$\kappa_0(\tau, \tau', \lambda) = - \left\{ \frac{k(\tau, \tau')}{p(\tau)} e^{\lambda[\theta(\tau) - \theta(\tau')]} + \sum_i \frac{k_i(\tau')}{p(\tau_i)} e^{-\lambda[\theta(\tau_i) - \theta(\tau')]} \frac{\delta(\tau - \tau_i)}{1 + \lambda T_i} \right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \quad (9a)$$

$$\kappa_0(\tau, \lambda) = \frac{k_t(\tau)}{p(\tau)} e^{\lambda\theta(\tau)} + \sum_i \frac{k_{it}}{p(\tau_i)} e^{\lambda\theta(\tau_i)} \frac{\delta(\tau - \tau_i)}{1 + \lambda T_i} \quad (9b)$$

$$M(\underline{r}, \tau, \lambda) = \frac{1}{D} Q'(\underline{r}, \tau) e^{\lambda\theta(\tau)} + \sum_i \frac{C_i(\underline{r})}{P(\tau_i)} \frac{e^{\lambda\theta(\tau_i)}}{1 + \lambda T_i} \delta(\tau - \tau_i) \quad (9c)$$

Para una pila de forma y dimensiones dadas, la ecuación

$$\Delta S(\underline{r}) + \kappa^2 S(\underline{r}) = 0 \quad (10)$$

con la condición

$$[S(\underline{r})]_{S'} = 0 \quad (10a)$$

siendo S' la frontera extrapolada de la pila, determina una infinidad de funciones propias $S_m(\underline{r})$ y de valores propios κ_m^2 , ($m = 0, 1, 2, \dots$) es decir, una fundamental $S_0(\underline{r})$ y sus armónicas $S_m(\underline{r})$ ($m > 0$), que satisfacen

$$\Delta S_m(\underline{r}) + \kappa_m^2 S_m(\underline{r}) = 0 \quad (11)$$

Supondremos que las funciones propias han sido debida-

mente normalizadas para establecer una base ortonormal en el espacio de Hilbert de las funciones cuyo recinto de definición es la región ocupada por la pila extrapolada. Así pues

$$\int_V S_m(\underline{r}) S_n(\underline{r}) d\underline{r} = \delta_{mn} \quad (12)$$

Hagamos ahora:

$$u(\underline{r} \tau \lambda) = \sum_m u_m(\tau \lambda) S_m(\underline{r})$$

$$\bar{n}_t(\underline{r} \lambda) = \sum_m \bar{n}_m(\lambda) S_m(\underline{r}) \quad (13)$$

$$M(\underline{r} \tau \lambda) = \sum_m M_m(\tau \lambda) S_m(\underline{r})$$

Substituyendo estos desarrollos en (9) teniendo presente el caracter completo de las $S_m(\underline{r})$ y la propiedad (11) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m(\tau \lambda)}{\partial \tau} + \kappa_m^2 u_m(\tau \lambda) &= k_0(\tau \lambda) \frac{\bar{n}_m(\lambda)}{T_0} + M_m(\tau \lambda) + \\ &+ \int_0^{\tau_t} \kappa_0(\tau \tau' \lambda) u_m(\tau' \lambda) d\tau' \end{aligned} \quad (14)$$

que es la ecuación integrodiferencial satisfecha por u_m y que debe resolverse con la condición

$$u_m(0 \lambda) = 0 \quad (14a)$$

Aplicando el mismo método seguido en I para ecuaciones de este tipo es fácil ver que u_m debe ser una solu-

ción de la ecuación de Fredholm

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{n_m(\lambda)}{\Gamma_0} h_m(\tau\lambda) + I_m(\tau\lambda) + \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau, \tau', \lambda) u_m(\tau'\lambda) d\tau' \quad (15)$$

con

$$I_m(\tau\lambda) = \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} M_m(\tau'\lambda) d\tau' \quad (16)$$

$$\begin{aligned} h_m(\tau\lambda) &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} k_0(\tau'\lambda) d\tau' = \\ &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} \frac{k_t(\tau')}{p(\tau')} e^{\lambda\theta(\tau')} d\tau' + \\ &+ \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau_i)} \frac{k_{it}}{p(\tau_i)} e^{\lambda\theta(\tau_i)} \frac{1}{1 + \lambda\Gamma_i} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \kappa_m(\tau, \tau', \lambda) &= \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau'')} \kappa_0(\tau'', \tau', \lambda) d\tau'' = \\ &= - \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau'')} \frac{k(\tau''\tau')}{p(\tau'')} e^{\lambda[\theta(\tau'')-\theta(\tau')]} d\tau'' + \right. \\ &\left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau_i)} \frac{k_i(\tau')}{p(\tau_i)} e^{\lambda[\theta(\tau_i)-\theta(\tau')]} \frac{1}{1 + \lambda\Gamma_i} \right\} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} \quad (18) \end{aligned}$$

Utilizando I(65) se puede escribir

$$\kappa_m(\tau, \tau', \lambda) = \frac{1}{f_t} h_m(\tau\lambda) \xi_m(\tau'\lambda) \quad (19)$$

con

$$g_m(\tau\lambda) = - e^{-\lambda\theta(\tau)} f(\tau) \frac{dp(\tau)}{d\tau} = \frac{v\Sigma_m}{D} f(\tau) p(\tau) e^{-\lambda\theta(\tau)} \quad (20)$$

La ecuación (15) puede resolverse por el método seguido en I para ecuaciones semejantes, obteniéndose la solución

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{\frac{\bar{n}_m(\lambda)}{T_0} + \frac{1}{f_t} \int_0^{\tau_t} g_m(\tau\lambda) I_m(\tau\lambda) d\tau}{1 - \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau, \tau, \lambda) d\tau} h_m(\tau\lambda) + I_m(\tau\lambda) \quad (21)$$

cuya validez requiere que el determinante de Fredholm

$$D(\kappa_m^2, \lambda) = 1 - \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau, \tau, \lambda) d\tau \quad (22)$$

no se anule idénticamente.

Considérese ahora la ecuación de los neutrones térmicos. La transformada de Laplace de I(44b) puede escribirse en la forma

$$L_t^2 \Delta \bar{n}_t(\underline{r}\lambda) - (1 + \lambda T_0) \bar{n}_t(\underline{r}\lambda) + p T_0 \bar{q}'(\underline{r}\tau_t\lambda) + T_0 N(\underline{r}) = 0 \quad (23)$$

que con la ayuda de (6), (13) y el desarrollo

$$N(\underline{r}) = \sum_m N_m S_m(\underline{r}) \quad (24)$$

de la ecuación de la enésima armónica,

$$-(1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0) \bar{n}_m(\lambda) + p T_0 e^{-\lambda\theta(\tau_t)} u_m(\tau_t\lambda) + T_0 N_m = 0 \quad (25)$$

(21) y (25) son dos ecuaciones simultáneas en $u_n(\tau\lambda)$ y $\bar{n}_n(\lambda)$. Para obtener la solución, se hace en (21) $\tau = \tau_t$ y el valor de $u_n(\tau_t\lambda)$ así obtenido se substituye en (25) despejando $\bar{n}_n(\lambda)$. Esta expresión se substituye en (21) para obtener la forma explícita de $u_n(\tau\lambda)$. Después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\bar{n}_n(\lambda) = \frac{pT_0 e^{-\lambda\theta(\tau_t)} [J_n(\lambda)h_n(\tau_t\lambda) + D(\kappa_n^2\lambda)I_n(\tau_t\lambda)] + T_0 N_n D(\kappa_n^2\lambda)}{D(\kappa_n^2\lambda) [1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_n(\tau_t\lambda)} \quad (26)$$

$$u_n(\tau\lambda) = \frac{p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} I_n(\tau_t\lambda) + [1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0] J_n(\lambda) + N_n}{D(\kappa_n^2\lambda) [1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_n(\tau_t\lambda)} h_n(\tau\lambda) + I_n(\tau\lambda) \quad (27)$$

en donde se ha hecho

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{f_t} \int_0^{\tau_t} g_n(\tau\lambda) I_n(\tau\lambda) d\tau \quad (28)$$

De (6) y (13) se sigue que

$$\bar{q}^*(\underline{r}\tau\lambda) = \sum_n S_n(\underline{r}) u_n(\tau\lambda) e^{-\lambda\theta(\tau)} \quad (29)$$

$$\bar{n}_t(\underline{r}\lambda) = \sum_n S_n(\underline{r}) \bar{n}_n(\lambda)$$

y substituyendo en (4) resulta

$$\bar{c}_i(\underline{r}\lambda) = \sum_n S_n(\underline{r}) \bar{c}_{in}(\lambda) \quad (30)$$

con

$$\bar{c}_{i\mathbf{m}}(\lambda) = \frac{T_1}{1+\lambda T_1} \left\{ - \int_0^{\tau_t} k_1(\tau) \frac{dp(\tau)}{d\tau} u_{\mathbf{m}}(\tau\lambda) e^{-\lambda\theta(\tau)} d\tau + \frac{k_{1t}}{T_0} \bar{n}_{\mathbf{m}}(\lambda) + C_{i\mathbf{m}} \right\} \quad (30a)$$

$$C_{i\mathbf{m}} = \int_{\mathbf{v}} C_i(\underline{\mathbf{r}}) S_{\mathbf{m}}(\underline{\mathbf{r}}) d\underline{\mathbf{r}} \quad (30b)$$

de esta manera la transformada de la solución queda completamente determinada. Para exhibir la solución final hay tan solo que invertir las ecuaciones (29) y (30). Resulta así

$$\begin{aligned} q'(\underline{\mathbf{r}}\tau t) &= \sum_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}}(\underline{\mathbf{r}}) q_{\mathbf{m}}(\tau t) \\ n_t(\underline{\mathbf{r}}t) &= \sum_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}}(\underline{\mathbf{r}}) n_{\mathbf{m}}(t) \\ c_i(\underline{\mathbf{r}}t) &= \sum_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}}(\underline{\mathbf{r}}) c_{i\mathbf{m}}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

siendo

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{m}}(\tau t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} e^{\lambda\tau t - \theta(\tau)} u_{\mathbf{m}}(\tau\lambda) d\lambda \\ n_{\mathbf{m}}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} e^{\lambda t} \bar{n}_{\mathbf{m}}(\lambda) d\lambda \\ c_{i\mathbf{m}}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} e^{\lambda t} c_{i\mathbf{m}}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (32)$$

2.- La Pila con un hendimiento inicial.

Como una aplicación de la teoría general expuesta en la sección anterior, estudiaremos el comportamiento de una pila cuya operación se inicia cuando al tiempo $t = 0$ ocurre un hendimiento en el punto $P(\underline{r}_0)$ en el interior de la misma. Como resultado del hendimiento se producen en el punto $P(\underline{r}_0)$, $\eta(E)$ neutrones inmediatos de energía E por unidad de banda y η_i neutrones latentes del grupo i . Será entonces

$$n(\underline{r}, E, 0) = \eta(E) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$c_i(\underline{r}, 0) = \eta_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) \quad (33)$$

$$n_t(\underline{r}, 0) = 0$$

puesto que inicialmente no hay neutrones térmicos. Claramente

$$q(\underline{r}, E, 0) = v \Sigma_f E \eta(E) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

y

$$q(\underline{r}, \tau, 0) = D \eta(\tau) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

de modo que

$$Q'(\underline{r}, \tau) = \frac{D\eta(\tau)}{P(\tau)} \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$C_i(\underline{r}) = \eta_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) \quad (34)$$

$$N(\underline{r}) = 0$$

y por (9c) será

$$M(\underline{r}, \tau, \lambda) = \left\{ \frac{e^{\lambda\theta(\tau)}}{p(\tau)} \eta(\tau) + \sum_i \frac{\eta_i}{p(\tau_i)} \frac{e^{\lambda\theta(\tau_i)}}{1+\lambda T_i} \delta(\tau-\tau_i) \right\} \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \\ = \frac{k_0(\tau\lambda)}{f_t} \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \quad (35)$$

como puede verse facilmente de (9b). De (13) se obtiene

$$M_m(\tau\lambda) = \int_V S_m(\underline{r}) M(\underline{r}, \tau, \lambda) d\underline{r} = \frac{k_0(\tau\lambda)}{f_t} S_m(\underline{r}_0) \quad (36)$$

y de (16), previa comparación con (17),

$$I_m(\tau\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} h_m(\tau\lambda) \quad (37)$$

En virtud de (19), (20) y (28) puede escribirse

$$J_m(\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\lambda) d\tau = \frac{1-D(\kappa_m^2\lambda)}{f_t} S_m(\underline{r}_0) \quad (38)$$

además

$$N_m = \int_V S_m(\underline{r}) N(\underline{r}) d\underline{r} = 0 \quad (39)$$

Substituyendo estos valores en (26) y (27) pueden calcularse $\bar{n}_m(\lambda)$ y $u_m(\tau\lambda)$ obteniéndose

$$n_m(\lambda) = \frac{\frac{pT_0}{f_t} e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_m(\tau_t\lambda) S_m(\underline{r}_0)}{D(\kappa_m^2\lambda) [1+\kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda\theta(\tau_t)} h_m(\tau_t\lambda)} \quad (40)$$

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{\frac{1}{f_t} [1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0] S_m(\underline{r}_0) h_m(\tau\lambda)}{D(\kappa_m^2 \lambda) [1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0] - p e^{-\lambda \theta(\tau_t)} h_m(\tau_t \lambda)} \quad (41)$$

En virtud de (30b) será

$$C_{im} = \eta_i S_m(\underline{r}_0) \quad (42)$$

Substituyendo (40), (41) y (42) en (30a), después de algunas reducciones y transformaciones se llega a la expresión

$$\bar{c}_{im}(\lambda) = \frac{T_i k_{it}}{1 + \lambda T_i} \frac{u_m(\tau\lambda)}{h_m(\tau\lambda)} \quad (43)$$

Resta solamente invertir la transformación: de (41) y (32) resulta

$$q_m(\tau_t) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{\lambda t} H_m(\tau\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} d\lambda \quad (44)$$

siendo

$$\begin{aligned} H_m(\tau\lambda) &= e^{-\lambda \theta(\tau)} h_m(\tau\lambda) = \\ &= \int_0^\tau e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} \frac{k_t(\tau')}{p(\tau')} e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau')]} d\tau' + \\ &+ \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau_i)} \frac{k_{it}}{p(\tau_i)} \frac{e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau_i)]}}{1 + \lambda T_i} \end{aligned} \quad (44a)$$

$$\Delta_m(\lambda) = 1 - \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\lambda) d\tau - \frac{p H_m(\tau_t \lambda)}{1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0} \quad (44b)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\lambda) d\tau &= \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v\Sigma_a}{D} \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} p(\tau'\tau) \times \\
&\times e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau')]} k(\tau'\tau) d\tau' + \sum_{\tau_1 < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau_1)} \times \\
&\times p(\tau_1\tau) e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau_1)]} \frac{k_1(\tau)}{1+\lambda T_1} \quad (44c)
\end{aligned}$$

Sea

$$\varphi_m(\tau\lambda) = \frac{H_m(\tau\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} e^{\lambda t} \quad (44d)$$

el integrando de (44).

Si $\lambda \sim -\frac{1}{T_1}$ se ve que $H_m \sim \frac{\text{const.}}{1+\lambda T_1}$ y $\Delta_m \sim \frac{\text{const.}}{1+\lambda T_1}$ así que $\varphi_m(\tau\lambda)$ no tiene singularidades cuando $1+\lambda T_1 = 0$. El integrando tendrá polos correspondientes a los ceros de $\Delta_m(\lambda)$. Debe pues estudiarse la ecuación

$$\Delta_m(\lambda) = 0 \quad (45)$$

que en virtud de (44a) y (44b) puede escribirse bajo la forma

$$\frac{p h_m(\tau_t\lambda) e^{-\lambda\theta(\tau_t)}}{1 + \kappa_m^2 L_t^2 + \lambda T_0} + \int_0^{\tau_t} \kappa_m(\tau\lambda) d\tau = 1 \quad (45a)$$

Esta es la ecuación de enhoras. Introduciendo la probabilidad de escape a la fuga térmica

$$l_{tm} = \frac{1}{1 + \kappa_m^2 L_t^2} \quad (46)$$

y utilizando (17) y (18) puede escribirse

$$\begin{aligned}
 & \frac{l_{tR}}{1+T_0} \frac{1}{l_{tR}\lambda} \int_0^{\tau_t} \left\{ e^{-\kappa_m^2(\tau_t-\tau)} p(\tau, \tau_t) e^{-\lambda[\theta(\tau_t)-\theta(\tau)]} k_t(\tau) d\tau + \right. \\
 & \left. + \sum_i e^{-\kappa_m^2(\tau_t-\tau_i)} p(\tau_i, \tau_t) e^{-\lambda[\theta(\tau_t)-\theta(\tau_i)]} \frac{k_{it}}{1+\lambda T_i} \right\} + \\
 & + \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v\Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau')} p(\tau', \tau) e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau')]} k(\tau', \tau) d\tau' + \right. \\
 & \left. + \sum_{\tau_i < \tau} e^{-\kappa_m^2(\tau-\tau_i)} p(\tau_i, \tau) e^{-\lambda[\theta(\tau)-\theta(\tau_i)]} \frac{k_i(\tau)}{1+\lambda T_i} \right\} = 1 \quad (47)
 \end{aligned}$$

Así como en la ecuación crítica de la pila estacionaria, se advierte que en la ecuación de enhoras aparecen dos términos, el primero debido a la acción de los neutrones térmicos y el segundo a los neutrones rápidos. Cabe observar que si se hace $\lambda = 0$ en (47) se obtiene precisamente la ecuación crítica I(80) que corresponde al caso $k_{ef} = 1$. Para cada m hay una ecuación de enhoras (47) que tendrá ciertas raíces λ_{mj} ($j = 1, 2, 3, \dots$). Las cantidades

$$\pi_{mj} = \frac{1}{\lambda_{mj}} \quad (48a)$$

son los periodos de la pila. Los periodos reales se llaman crecientes si son positivos, decrecientes si son negativos, lentos si $|\pi_{mj}|$ es grande y rápidos si $|\pi_{mj}|$ es pequeño.

Consideremos primero el caso de la pila térmica. El segundo término del primer miembro de (47) es en este caso un valor correctivo pequeño en el que puede hacerse $\lambda = 0$.

Simbólicamente la ecuación (47) se puede escribir

$$\frac{l_{tm}}{1 + T_0 l_{tm} \lambda} \{ \} + \int = 1$$

y considerando que la integral es muy pequeña se puede escribir

$$l_{tm} (1 + \int) \{ \} = 1 + T_0 l_{tm} \lambda$$

pero la expresión $1 + \int$ con $\lambda = 0$ no es otra cosa que el factor de utilización rápida ϵ definido en I eqs. (98), (104) y (106). Resulta pues

$$l_{tm} \epsilon_m \{ \} = 1 + T_0 l_{tm} \lambda \quad (a)$$

De nuevo, si se hace $\lambda = 0$ en esta ecuación, se obtendría la condición crítica $k_{of} = 1$ con k_{of} dada por I(109). Por continuidad, si (a) deberá tener una raíz positiva pequeña correspondiente a un período creciente lento, k_{of} no deberá diferir mucho de la unidad.

Introduciendo las probabilidades de escape a la fuga rápida

$$l_{fmo}(\tau) = e^{-\kappa_m^2(\tau_t - \tau)} \quad l_{fmi} = e^{-\kappa_m^2(\tau_t - \tau_i)} \quad (48b)$$

y las probabilidades de escape a la absorción

$$p_0(\tau) = p(\tau, \tau_t) \quad p_1 = p(\tau_i, \tau_t) \quad (49)$$

de acuerdo con I (108) se puede definir

$$k_{efn} = l_{tn} \epsilon_n \int_0^{\tau_t} \left\{ l_{fno}(\tau) p_o(\tau) k_t(\tau) d\tau + \sum_i l_{fni} p_i k_{it} \right\} \quad (50)$$

de es la constante efectiva de reproducción para la enésima armónica. El valor particular de k_{efn} para la fundamental es la constante de reproducción efectiva de la pila.

Es conveniente introducir la magnitud

$$k_{prn} = \frac{k_{efn}}{l_{tn} \epsilon_n} = \int_0^{\tau_t} l_{fno}(\tau) p_o(\tau) k_t(\tau) d\tau + \sum_i l_{fni} p_i k_{it} \quad (51)$$

con cuya ayuda se pueden formar las cantidades

$$\alpha_{no}(\tau) = \frac{k_t(\tau)}{k_{prn}} \quad \alpha_{ni} = \frac{k_{it}}{k_{prn}} \quad (52)$$

que se llamarán fracciones efectivas de neutrones inmediatos y retardados, respectivamente. Introduciremos también la reactividad para la enésima armónica

$$\rho_n = \frac{k_{on}}{k_{efn}} = \frac{k_{efn} - 1}{k_{efn}} \quad (53)$$

cuyo valor para la fundamental es la reactividad de la pila, y los tiempos de relajamiento

$$t_{ro}(\tau) = \theta(\tau_t) - \theta(\tau) \quad t_{ri} = \theta(\tau_t) - \theta(\tau_i) \quad (54)$$

Con auxilio de las definiciones anteriores la ecuación de enhoras (a) puede escribirse en la forma más conveniente

$$\begin{aligned}
\frac{k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}} &= \sum_i \frac{T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi}}{\frac{1}{\lambda} + T_i} e^{-\lambda t_{ri}} + \frac{T_0 l_{tm}}{k_{\text{eff}}} \lambda - \\
&- \int_0^{\tau_t} (e^{-\lambda t_{ro}(\tau)} - 1) l_{f_{m0}}(\tau) p_0(\tau) \alpha_{m0}(\tau) d\tau - \\
&- \sum_i (e^{-\lambda t_{ri}} - 1) l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} \quad (55)
\end{aligned}$$

Para el análisis de esta expresión hay que tener presente que en una pila típica, los tiempos de generación T_i de los neutrones retardados se encuentran dentro de una zona que, a grosso modo, va de 100 a 0.05 seg. El tiempo de generación T_0 de los neutrones inmediatos es del orden de 10^{-3} seg. y los tiempos de relajamiento del orden de 10^{-6} seg.

Designemos por $f_m(\lambda)$ el segundo miembro de (55) y consideremos su comportamiento para valores reales de λ .

$$\text{Si } |\lambda| \ll \frac{1}{T_i},$$

$$f_m(\lambda) \sim \lambda \sum_i T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi} \quad (56a)$$

$$\text{Si } |\lambda| \sim \frac{1}{T_i} \text{ pero } |\lambda| \ll \frac{1}{T_0}$$

$$f_m(\lambda) \sim \sum_i \frac{T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi}}{\frac{1}{\lambda} + T_i} \quad (56b)$$

$$\text{Si } |\lambda| \sim \frac{1}{T_0} \text{ pero aún } |\lambda| \ll \frac{1}{t_{ro}},$$

$$f_m(\lambda) \sim \sum_i \frac{T_i l_{f_{mi}} p_i \alpha_{mi}}{\frac{1}{\lambda} + T_i} + \frac{T_0 l_{tm}}{k_{\text{eff}}} \lambda \quad (56c)$$

En la zona en que $|\lambda| \sim \frac{1}{t_{r0}}$, $f_m(\lambda)$ está dada por el segundo miembro de (55) incluyendo todos sus términos. Si $\lambda \rightarrow +\infty$

$$f_m(\lambda) \sim \frac{T_0 l_{tm}}{k_{efm}} \lambda \quad (56d)$$

asi que $f_m(\lambda) \rightarrow +\infty$ linealmente con λ . Finalmente si $\lambda \rightarrow -\infty$

$$f_m(\lambda) \sim - \int_0^{\tau_t} e^{-\lambda t_{r0}(\tau)} l_{fmo}(\tau) p_0(\tau) \alpha_{mo}(\tau) d\tau \quad (56e)$$

de manera que $f_m(\lambda) \rightarrow -\infty$ exponencialmente con λ . Es además de notarse que $f_m(\lambda)$ tiene singularidades en cada uno de los valores $\lambda = -\frac{1}{T_i}$ correspondientes a los distintos tiempos de generación retardada. Así pues, para valores reales de λ , $f_m(\lambda)$ consiste de $l + 1$ ramas (ver Fig. 1) que corren de $-\infty$ a $+\infty$, una a la izquierda de todos los $-\frac{1}{T_i}$, otra a la derecha de los mismos y una entre cada par de valores consecutivos de $-\frac{1}{T_i}$. Esta curva se asemeja mucho, pero difiere en varios importantes aspectos, de la que resulta considerando la teoría ordinaria¹.

Las raíces reales de la ecuación de enhoras se obtienen, de la manera usual, trazando en la gráfica de $f_m(\lambda)$ una recta horizontal a una distancia $\frac{k_{en}}{k_{efm}}$ del origen. Puesto que según (50) siempre es $k_{efm} > 0$, la posición de la recta depende del signo de k_{en} . En cualquier caso habrá $l + 1$ periodos reales. Si $k_{en} > 0$, habrá un periodo positivo y l negativos; si $k_{en} = 0$ un periodo es infinito y

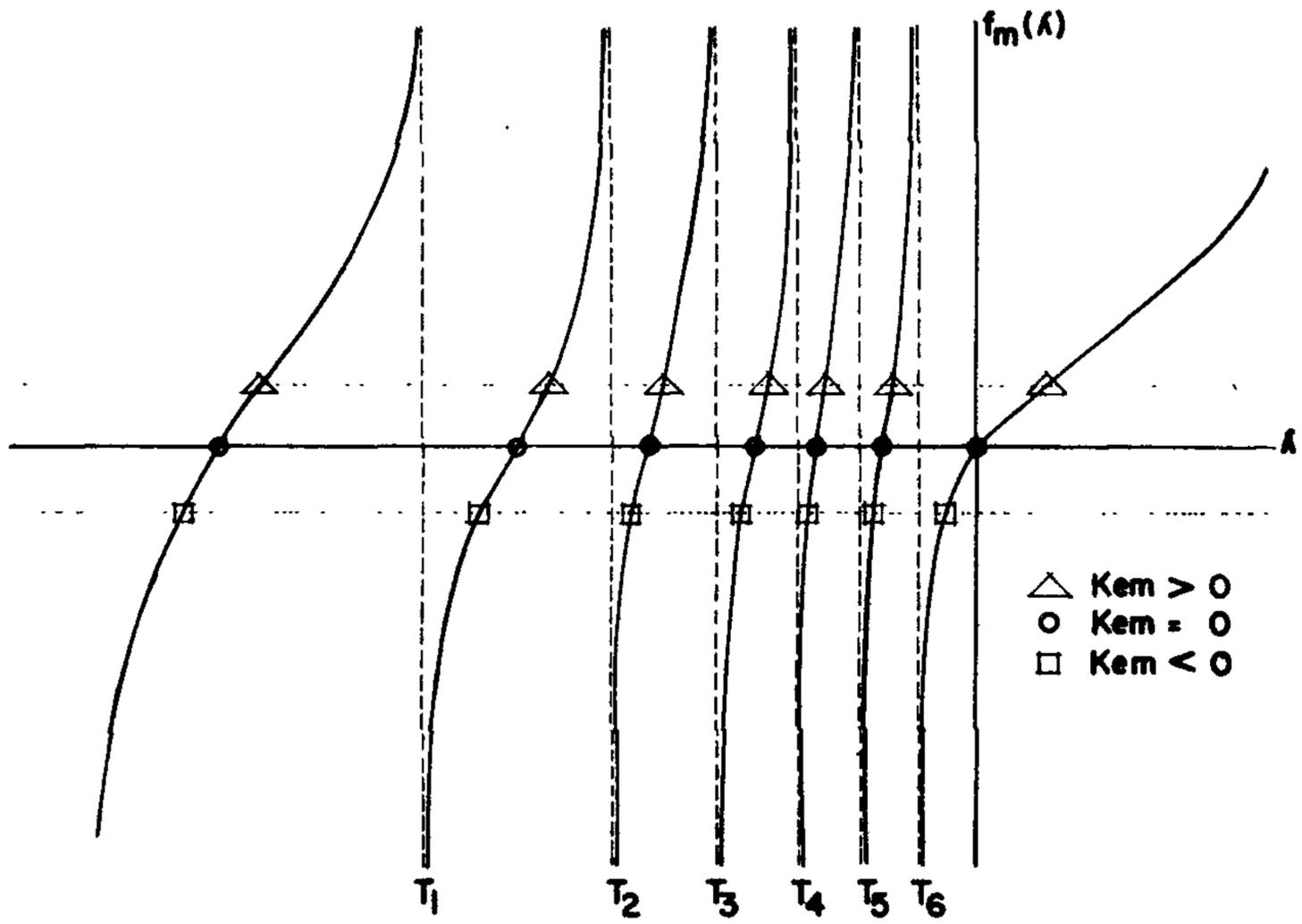


FIG 1

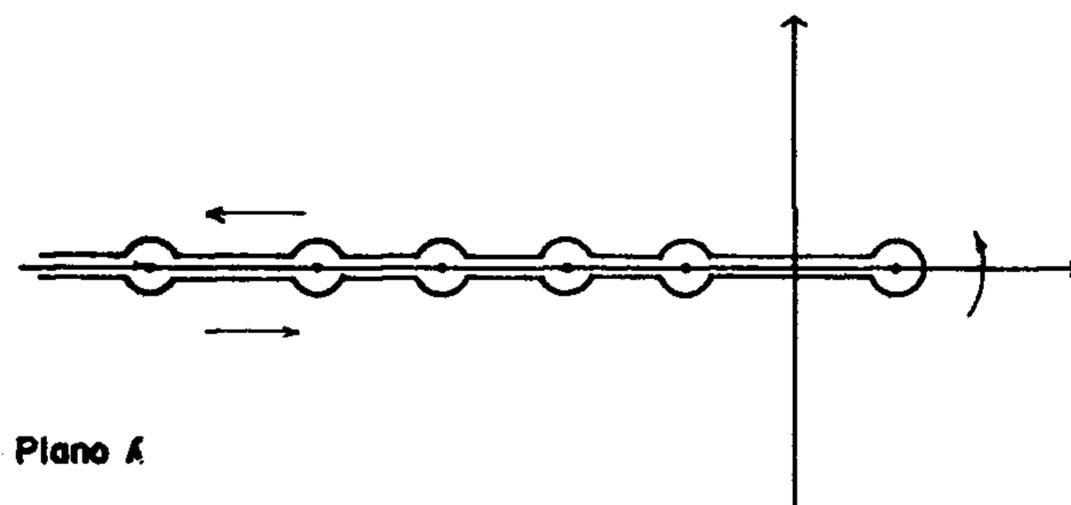


FIG 2

l son negativos; si $k_{en} < 0$ todos los periodos son negativos.

Ahora bien, la ecuación (10) con la condición (10a) de termina un espectro numerable de valores propios κ_m^2 . Supondremos que el indice m ha sido escogido de manera de ordenar los valores propios en sucesion creciente, $\kappa_0^2 < \kappa_1^2 < \kappa_2^2 < \dots$. Además utilizaremos la convención de suprimir el indice para todas las cantidades que se refieran a la fundamental. Así por ejemplo, $\kappa_0 = \kappa$, $l_{t_0} = l_t$, $l_{f_0} = l_f$, $k_{ef_0} = k_{ef}$, $k_{e_0} = k_e$, etc.

De (48) y (50) es fácil ver que con la convención adoptada, k_{efm} es una función decreciente de m , es decir que $k_{ef} = k_{ef_0} > k_{ef_1} > k_{ef_2} > \dots$. Del mismo modo todas las reactividades $k_{en} = k_{efn} - 1$ serán funciones decrecientes de m . Si $k_{ef} = 1$, la reactividad de la pila k_e es nula, en tanto que todas las restantes k_{en} serán negativas. Se sigue que habrá un periodo infinito en la fundamental (solución estacionaria) en tanto que todos los demás periodos π_{mj} serán negativos. Se dice en este caso que la pila es crítica. Si $k_{ef} > 1$, $k_e > 0$ y hay un periodo creciente en la fundamental. Generalmente k_{ef} es tan poco mayor que la unidad, que todos los restantes k_{efm} son menores que uno y por tanto todas las reactividades armónicas son negativas. En este caso hay un solo periodo creciente en tanto que todos los demás son negativos: la pila es supercrítica. Finalmente, si $k_{ef} < 1$, todos los periodos, incluida la fundamental, son negativos y la pila es subcrítica.

Nos preguntamos ahora si la ecuación de enhoras

$$f_m(\lambda) = \frac{k_{en}}{k_{efm}} \quad (a)$$

tiene raíces complejas. Desde luego cabe considerar que si λ es una solución de (a), $\bar{\lambda}$ deberá satisfacer la misma ecuación,

$$f_m(\bar{\lambda}) = \frac{k_{em}}{k_{ofm}} \quad (b)$$

y de aquí se sigue que

$$f_m(\lambda) - f_m(\bar{\lambda}) = 0 \quad (c)$$

Este criterio aplicado a las formas asintóticas (56) muestra que, en virtud de las diferencias tan considerables que existen entre los tiempos de generación retardada e inmediata y los tiempos de relajamiento, $f_m(\lambda)$ no tiene mas que los polos reales anteriormente mencionados ya que, debido a las dichas diferencias es posible dividir el plano complejo λ en anillos circulares en cada uno de los cuales $f_m(\lambda)$ está representada, con bastante buena aproximación por las formas asintóticas (56), ninguna de las cuales admite raíces complejas. En la zona en que $|\lambda| \sim \frac{1}{t_{ro}}$ (55) se puede expresar con buena aproximación como

$$f_m(\lambda) \sim \frac{T_0 l_{tm}}{k_{ofm}} \lambda - \int_0^{\tau_t} (e^{-\lambda t_{ro}(\tau)} - 1) l_{fmo}(\tau) p_0(\tau) \alpha_{mo}(\tau) d\tau + \sum_i l_{fmi} p_i \alpha_{mi} \quad (56f)$$

que tampoco admite raíces complejas. Supondremos pues que para los tiempos característicos que se presentan en las pilas usuales, (55) no tiene mas que raíces reales. Volviendo

entonces a la ecuación (44d) cabe observar que en el semiplano $\text{Re } \lambda < 0$, $H_m(\tau\lambda)$ aumenta, conforme $\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty$, mas lentamente que $\exp\{|\lambda| \cos \alpha \theta(\tau_t)\}$ siendo $\alpha = \text{amp } \lambda$ y que $\Delta_m(\lambda)$ tiene un término dominante, el tercero, que aumenta como $\exp\{|\lambda| \cos \alpha \theta(\tau_t)\}$ de manera que el cociente $\frac{H_m(\tau\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} e^{\lambda t}$ va a cero si $\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty$. Se sigue que $\varphi_m(\tau\lambda)$ es regular en la semicircunferencia infinita izquierda y que el contorno de Bromwich puede deformarse de la manera indicada en la Fig.2 así que la integral (44) se reduce a una suma sobre los residuos de los polos, todos los cuales son obviamente simples. El residuo R_{mj} del polo $\lambda_{mj} = \frac{i}{\pi_{mj}}$ será el coeficiente de $(\lambda - \lambda_{mj})^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $\varphi_m(\tau\lambda)$, o sea

$$R_{mj} = \left[(\lambda - \lambda_{mj}) \frac{H_m(\tau\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} e^{\lambda t} \right]_{\lambda = \lambda_{mj}} = \left[\frac{\lambda - \lambda_{mj}}{\Delta_m(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_{mj}} H_m(\tau\lambda_{mj}) e^{\lambda_{mj} t} = \frac{H_m(\tau\lambda_{mj})}{\left(\frac{d\Delta_m(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda_{mj}}} e^{\lambda_{mj} t} = \frac{H_m(\tau\lambda_{mj})}{\Delta'_m(\lambda_{mj})} e^{\lambda_{mj} t}$$

de modo que

$$q_m(\tau t) = \frac{S_m(\epsilon_0)}{f_t} \sum_j \frac{H_m(\tau\lambda_{mj})}{\Delta'_m(\lambda_{mj})} e^{\lambda_{mj} t} \quad (57)$$

y será entonces

$$q'(\epsilon \tau t) = \frac{1}{f_t} \sum_{mj} S_m(\epsilon_0) S_m(\epsilon) \frac{H_m(\tau\lambda_{mj})}{\Delta'_m(\lambda_{mj})} e^{\lambda_{mj} t} \quad (58)$$

Substituyendo (40) en (32) se obtiene

$$n_n(t) = \frac{pT_0}{f_t} S_n(\underline{r}_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{H_n(\tau_t \lambda) e^{\lambda t} d\lambda}{(1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0) \Delta_n(\lambda)} \quad (59)$$

y recordando que $\frac{1}{1 + \kappa_n^2 L_t^2 + \lambda T_0} = \frac{l_{nt}}{1 + \lambda l_{nt} T_0}$, un análisis semejante al anterior muestra que

$$n_n(t) = \frac{pT_0}{f_t} S_n(\underline{r}_0) \sum_j \frac{l_{nt} H_n(\tau_t \lambda_{nj})}{(1 + \lambda_{nj} l_{nt} T_0) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\pi_{nj} t} \quad (60)$$

obteniéndose

$$n_t(\underline{r}t) = \frac{pT_0}{f_t} \sum_{nj} S_n(\underline{r}_0) S_n(\underline{r}) \frac{l_{nt} H_n(\tau_t \lambda_{nj})}{(1 + \lambda_{nj} l_{nt} T_0) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\pi_{nj} t} \quad (61)$$

Del mismo modo se demuestra que

$$c_i(\underline{r}t) = \frac{1}{f_t} \sum_{nj} S_n(\underline{r}_0) S_n(\underline{r}) \frac{T_i k_{it}}{(1 + \lambda_{nj} T_i) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\pi_{nj} t} \quad (62)$$

Los términos que contienen periodos decrecientes representan transitorios cuya vida media es $|\pi_{nj}|$. Si la pila es subcrítica todos los términos serán transitorios: cualquier proceso de hendimientos iniciado en el reactor se apagará con una vida media igual a $\max\{|\pi_{nj}|\}$ de manera que éste no puede mantener una reacción en cadena. Si la pila es crítica hay un término estático y todos los restantes son transitorios: a un tiempo suficientemente grande, $t \gg \max\{|\pi_{nj}|\}$, el reactor se encontrará en estado de

equilibrio. Por último, en la pila supercrítica habrá un periodo creciente de manera que todos los restantes son transitorios. El comportamiento del reactor para tiempos suficientemente grandes como para que el efecto de las condiciones transitorias haya substancialmente desaparecido, puede describirse tomando el primer componente de la fundamental en (58), (61) y (62). Esta solución, que podríamos llamar permanente en contraposición a los términos transitorios, aumenta con el tiempo como $e^{t/\pi_0 1}$.

Si $E_f(E)$ designa la energía producida cuando un neutrón de energía E produce un hendimiento y E_{ft} es el valor correspondiente para un neutrón térmico, la potencia de la pila será

$$P(t) = \int_V d\mathbf{r} \left\{ \int_{E_t}^{\infty} n(\mathbf{r}, E, t) v \Sigma_f E_f dE + n_t(\mathbf{r}, t) v_t \Sigma_{ft} E_{ft} \right\} \quad (63)$$

que se puede escribir como

$$P(t) = \int_V d\mathbf{r} \left\{ \int_0^{\tau_t} q'(\mathbf{r}, \tau, t) \frac{v \Sigma_a}{D} p(\tau) f(\tau) E_f(\tau) d\tau + \frac{n_t(\mathbf{r}, t)}{\Gamma_0} f_t E_t \right\} \quad (64)$$

Utilizando (58) y (61) se ve que

$$P(t) = \sum_{mj} S_m(\mathbf{r}_0) V_m (P_{mj} + P_{tmj}) e^{t/\pi_{mj}} \quad (65)$$

con

$$V_m = \int_V S_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (65a)$$

$$P_{mj} = \int_0^{\tau_t} \frac{H_m(\tau \lambda_{mj})}{\Delta'_m(\lambda_{mj})} \frac{v \Sigma_a}{D} P(\tau) \frac{f(\tau)}{f_t} E_f(\tau) d\tau \quad (65b)$$

$$P_{tmj} = \frac{pl_{mt} H_m(\tau_t \lambda_{mj}) E_{tr}}{(1 + \lambda_{mj} l_{mt} T_0) \Delta'_m(\lambda_{mj})} \quad (65c)$$

como la pila es térmica, puede suponerse $P_{mj} \ll P_{tmj}$ con lo cual será aproximadamente

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{mj} S_m(\epsilon_0) V_m P_{tmj} \times e^{t/\pi_{mj}} = \\ &= P E_{ft} \sum_{mj} \frac{S_m(\epsilon_0) V_m l_{mt} H_m(\tau_t \lambda_{mj})}{(1 + \lambda_{mj} l_{mt} T_0) \Delta'_m(\lambda_{mj})} \times e^{t/\pi_{mj}} \end{aligned} \quad (66)$$

En una pila supercrítica, a tiempos suficientemente grandes, la potencia se puede expresar aproximadamente por el primer término de este desarrollo. Se ve entonces que la potencia aumenta como $e^{t/\pi_{01}}$. Así pues, para que la pila sea controlable es necesario que π_{01} sea suficientemente grande, lo cual, como resulta inmediatamente de la Fig. 1, requiere una reactividad positiva pero pequeña. Si fuera $-k_0 = \sum_i l_{r1} p_1 \alpha_1$, la raíz positiva de la ecuación de enhoras caería justamente en la región en que la influencia de los neutrones inmediatos empieza a hacerse sentir. Para valores menores de k_0 , la raíz caería en una región en que $f_0(\lambda)$ depende preponderantemente del mecanismo de retardación. Se sigue que con el objeto de asegurar un periodo creciente suficientemente largo a modo de que la pila esté controlada por los neutrones retardados deberá tenerse

$$0 < \frac{k_0}{k_{0f}} < \sum_i l_{r1} p_1 \alpha_1 \quad (67)$$

que es la "condición de seguridad".

Demostraremos ahora que la ecuación de enhoras (55) se reduce a la forma usual cuando se hacen las aproximaciones ordinarias. Si el espectro se supone de la forma I(84), $k_t(\tau)$ estará dada por (86) y k_{of} por (111), con ϵ definido por (108). Haciendo

$$(pl_f)_{pr} = (1 - \beta) p_0 l_{f0} + \sum_i \beta_i p_i l_{fi} \quad (68)$$

será

$$k_{of} = k_t l_t \epsilon (pl_f)_{pr} \quad (69)$$

$$k_{pr} = \frac{k_{of}}{l_t \epsilon} = k_t (pl_f)_{pr} \quad (70)$$

$$\alpha_0(\tau) = \frac{(1-\beta)}{(pl_f)_{pr}} \delta(\tau-\tau_0) \quad \alpha_i = \frac{\beta_i}{(pl_f)_{pr}} \quad (71)$$

y la ecuación de enhoras se reduce a

$$\frac{k_o}{k_{of}} = \sum \frac{\beta_i T_i}{\frac{1}{\lambda} + T_i} e^{-t_{ri}\lambda} \frac{p_i l_{fi}}{(pl_f)_{pr}} + \frac{T_0 l_t}{k_{of}} \lambda - \\ - (e^{-t_{r0}\lambda} - 1) (1-\beta) \frac{p_0 l_{f0}}{(pl_f)_{pr}} - \sum_i (e^{-t_{ri}\lambda} - 1) \frac{l_{fi} p_i}{(pl_f)_{pr}} \beta_i \quad (72)$$

en tanto que la condición de seguridad se puede escribir como

$$0 < \frac{k_o}{k_{of}} < \sum_i \beta_i \frac{p_i l_{fi}}{(pl_f)_{pr}} \quad (73)$$

la cual, haciendo

$$(pl_f)_r = \frac{1}{\beta} \sum_i \beta_i p_i l_{r1} \quad (74)$$

se transforma en

$$k_e < \frac{\beta \frac{(pl_f)_r}{p_0 l_{r0}}}{1 - \beta} \quad (75)$$

Se puede obtener una mayor simplificación si se desprecian las diferencias entre las energías correspondientes a los neutrones inmediatos y retardados. Será entonces $p_0 = p_i = p$, $l_{r0} = l_{r1} = l_r$, $t_{r0} = t_{r1} = t_r$, $(pl_f)_{pr} = pl_f$. k_{ef} estará dada por I(112) y la ecuación de enhoras se simplifica a

$$\frac{k_e}{k_{ef}} = \sum_i \frac{\beta_i T_i}{\frac{1}{\lambda} + T_i} + \frac{T_0 l_t}{k_{ef}} \lambda + (e^{-\lambda t_r} - 1) \left(\frac{T_0 l_t}{k_{ef}} \lambda + \frac{1}{k_{ef}} \right) \quad (76)$$

Cuando $\pi = \frac{1}{\lambda}$ es muy grande, (76) da

$$k_e = \frac{\sum_i \beta_i T_i}{\pi} = \frac{0.0943}{\pi} \quad (77)$$

con una constante independiente de la pila particular. Así, una pila con una reactividad de una enhora tiene $k_e = 2.62 \times 10^{-5}$. La condición de seguridad a esta aproximación es

$$k_e < \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (78)$$

o sea $k_e < 7.59 \times 10^{-3}$.

La ecuación (50) aplicada a la fundamental ($m = 0$) nos da la $k_{o,r}$ de la pila. El segundo miembro, considerado como una función $\varphi(\kappa^2)$ del valor propio κ^2 , es una función monótonamente decreciente de esta variable. Para un valor propuesto de k_o o $k_{o,r}$, la ecuación $k_{o,r} = \varphi(\kappa^2)$ determina el valor de κ^2 y por tanto las dimensiones de la pila que son proporcionales a $L = \frac{1}{\kappa}$. Si $k_{o,r} = 1$, $\varphi(\kappa^2) = 1$ tiene por raíz $\kappa^2 = \kappa_0^2$, el valor característico de la pila crítica cuyas dimensiones son proporcionales a la longitud característica $L_0 = \frac{1}{\kappa_0}$. Si la pila es supercrítica, es decir, si $k_o > 0$ ó $k_{o,r} > 1$, debido al carácter monótonamente decreciente de $\varphi(\kappa^2)$ la raíz de $\varphi(\kappa^2) = k_{o,r}$ será $\kappa^2 < \kappa_0^2$ de donde se infiere que $L > L_0$, lo cual implica que las dimensiones de la pila deberán ser mayores que las correspondientes a la pila crítica. Del mismo modo se demuestra que una pila sub-crítica con $k_o < 0$ ó $k_{o,r} < 1$ deberá tener $\kappa^2 > \kappa_0^2$ ó $L < L_0$ y es por tanto mas pequeña que la pila crítica.

3.- La Pila con un número arbitrario de hendimientos iniciales.

El comportamiento de un reactor cuya operación se inicia no con uno, sino con cualquier número de hendimientos iniciales puede obtenerse fácilmente de los resultados de la sección anterior aprovechando la circunstancia de que las ecuaciones integrodiferenciales de la pila, son lineales. Si se supone pues que al tiempo $t = 0$ ocurren varios hendimientos en los puntos r_μ ($\mu = 1, 2, 3, \dots$), la solución será meramente la suma de las soluciones obtenidas previa-

mente, para $\epsilon_0 = \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$. Así, de (58), (61) y (62) se obtiene

$$q'(\epsilon, t) = \frac{1}{f_t} \sum_{\mu \neq j} S_n(\epsilon_\mu) S_n(\epsilon) \frac{H_n(\tau \lambda_{nj})}{\Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\frac{t}{\pi_{nj}}}$$

$$n_t(\epsilon, t) = \frac{pT_0}{f_t} \sum_{\mu \neq j} S_n(\epsilon_\mu) S_n(\epsilon) \frac{l_{nt} H_n(\tau_t \lambda_{nj})}{(1 + \lambda_{nj} l_{nt} T_0) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\frac{t}{\pi_{nj}}} \quad (79)$$

$$o_1(\epsilon, t) = \frac{1}{f_t} \sum_{\mu \neq j} S_n(\epsilon_\mu) S_n(\epsilon) \frac{T_1 \cdot k_{1t}}{(1 + \lambda_{nj} T_1) \Delta'_n(\lambda_{nj})} e^{\frac{t}{\pi_{nj}}}$$

La potencia desarrollada por la pila será

$$P(t) = \sum_{\mu \neq j} S_n(\epsilon_\mu) V_n(P_{nj} + P_{t_{nj}}) e^{t/\pi_{nj}} \quad (80)$$

Es obvio que la efectividad de un hendimiento para hacer marchar la pila depende considerablemente de la posición en que ocurre. Un hendimiento inicial en el punto ϵ_μ no podrá excitar aquellas armónicas que tengan un nodo en ϵ_μ . En cualquier caso la amplitud de la excitación es proporcional a $S_n(\epsilon_\mu)$.

4.- Pila Epitérmica.

El comportamiento dinámico de la pila epitérmica no es esencialmente diferente al de la pila térmica, por lo menos en lo que se refiere a la reactividad. La constante de reproducción efectiva está dada por I(119) y la ecuación de

enhoras por (47). Además de las definiciones (48) y (49) es conveniente introducir las funciones

$$\left. \begin{aligned} l_{fo\mathfrak{M}}(\tau', \tau) &= e^{-\kappa_{\mathfrak{M}}^2(\tau - \tau')} & l_{fi\mathfrak{M}}(\tau) &= e^{-\kappa_{\mathfrak{M}}^2(\tau - \tau_1)} \\ p_0(\tau', \tau) &= p(\tau', \tau) & p_1(\tau) &= p(\tau_1, \tau) \\ t_{fo}(\tau', \tau) &= \theta(\tau) - \theta(\tau') & t_{ri}(\tau) &= \theta(\tau) - \theta(\tau_1) \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

de modo que

$$\begin{aligned} k_{of\mathfrak{M}} &= l_{it} \left\{ \int_0^{\tau_t} l_{fo\mathfrak{M}}(\tau) p_0(\tau) k_t(\tau) d\tau + \sum_i l_{fmi} p_i k_{it} \right\} + \\ &+ \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v \Sigma_{\mathfrak{M}}}{D} \left\{ \int_0^{\tau} d\tau' l_{fo\mathfrak{M}}(\tau', \tau) p_0(\tau', \tau) k(\tau', \tau) + \right. \\ &\left. + \sum_{\tau_1 < \tau} l_{fi\mathfrak{M}}(\tau) p_1(\tau) k_1(\tau) \right\} \end{aligned} \quad (82)$$

Introduciendo las magnitudes

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{no}(\tau) &= \frac{l_{tn} k_t(\tau)}{k_{of\mathfrak{M}}} & \alpha_{ni} &= \frac{l_{tn} k_{it}}{k_{of\mathfrak{M}}} \\ \alpha_{no}(\tau', \tau) &= \frac{k(\tau', \tau)}{k_{of\mathfrak{M}}} & \alpha_{ni}(\tau) &= \frac{k_1(\tau)}{k_{of\mathfrak{M}}} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Después de alguna manipulación algebraica, la ecuación de enhoras puede escribirse en la siguiente forma:

$$\rho_{\mathfrak{M}} = \frac{k_{on}}{k_{of\mathfrak{M}}} = \sum_i \frac{T_i}{\frac{1}{\lambda} + T_i} l_{fmi} p_i \alpha_{ni} e^{-t_{ri}\lambda} +$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + T_0 l_{tm} \lambda) \int_{\tau_1}^{\tau_t} l_{f_{m1}}(\tau) p_1(\tau) \alpha_{m1}(\tau) e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau + \\
& + T_0 l_{tm} \lambda \left\{ \frac{1}{k_{eff}} - \int_0^{\tau_t} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \left(\int_0^{\tau} l_{f_{0m}}(\tau' \tau) p_0(\tau' \tau) \alpha_{m0}(\tau' \tau) d\tau' + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} l_{f_{11}}(\tau) p_1(\tau) \alpha_{m1}(\tau) \right) \right\} - \\
& - \int_0^{\tau_t} (e^{-\lambda t_{r0}(\tau)} - 1) l_{f_{0m}}(\tau) p_0(\tau) \alpha_{m0}(\tau) d\tau - \\
& - \sum_1 (e^{-\lambda t_{r1}} - 1) l_{f_{m1}} p_1 \alpha_{m1} - \\
& - (1 + T_0 l_{tm} \lambda) \int_0^{\tau_t} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \left\{ \int_0^{\tau} (e^{-\lambda t_{r0}(\tau' \tau)} - 1) l_{f_{0m}}(\tau' \tau) p_0(\tau' \tau) \alpha_{m0}(\tau' \tau) d\tau' + \right. \\
& \left. + \sum_{\tau_1 < \tau} (e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} - 1) l_{f_{m1}}(\tau) p_1(\tau) \alpha_{m1}(\tau) \right\} \quad (84)
\end{aligned}$$

Llamando de nuevo $f_m(\lambda)$ la función que aparece en el segundo miembro de esta ecuación se observa que si $|\lambda| \ll T_1$

$$f_m(\lambda) \sim \lambda \sum_1 T_1 (l_{f_{m1}} p_1 \alpha_{m1} + \int_{\tau_1}^{\tau_t} l_{f_{m1}}(\tau) p_1(\tau) \alpha_{m1}(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau) \quad (85a)$$

$$\text{Si } |\lambda| \sim \frac{1}{T_1},$$

$$f_m(\lambda) \sim \sum_1 \frac{T_1}{\frac{1}{\lambda} + T_1} \left\{ l_{f_{m1}} p_1 \alpha_{m1} + \int_0^{\tau_t} f_{f_{m1}}(\tau) p_1(\tau) \alpha_{m1}(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \right\} \quad (85b)$$

Se observa que el efecto de los neutrones rápidos se manifiesta en la alteración de los valores numéricos de los coeficientes de estas ecuaciones y no en la estructura fun-

cional de las mismas. Para valores reales y muy pequeños de λ , $f_m(\lambda)$ varía linealmente con λ en tanto que para valores un poco mas grandes aparece ya la estructura típica consistente en varias ramas separadas. El comportamiento de $f_m(\lambda)$ para valores mayores de λ depende en gran parte de las relaciones de magnitud que existan entre el tiempo de generación inmediata T_0 y los tiempos de relajamiento. El tiempo de relajamiento tiene por valor

$$t_{r_0} = \theta(\tau_t) = \int_{E_t}^{E_0} \frac{dE}{v \Sigma \xi E} \approx \frac{l_n(E_0/E_t)}{v \Sigma \xi}$$

y siendo $T_0 = \frac{l}{v_t \Sigma_{at}}$, en orden de magnitud será

$$\frac{t_r}{T_0} \sim \frac{v_t}{v} l_n \frac{E_0}{E_t} \frac{\Sigma_{at}}{\Sigma \xi}$$

Hemos dicho que la pila térmica se caracteriza por la condición $\frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi} \ll 1$, cuya condición implica, según la ecuación anterior, que en esta pila será $t_{r_0} \ll T_0$. En una pila epitérmica, sin embargo, $\frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi}$ no necesita ser muy pequeño y cabe pensar que llegara a ser del orden de uno. En tal caso sería $t_{r_0} \sim T_0$ de suerte que los tiempos de generación inmediata y de relajamiento entrarían en juego casi simultáneamente. En cualquier caso, por un argumento semejante al que fue empleado en el caso de la pila térmica se concluye que la condición de seguridad para el caso epitérmico es

$$0 < \frac{k_e}{k_{ef}} < \sum_i (l_{fi} p_i \alpha_i + \int_{\tau_i}^{\tau_t} l_{fi}(\tau) p_i(\tau) \alpha_i(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau) \quad (86)$$

Un análisis detallado del comportamiento de un reactor epitérmico sólo es posible cuando se conoce en detalle el curso de las secciones con la energía y sus valores relativos. Por lo pronto nos limitaremos a señalar dos características que se infieren directamente de las ecuaciones generales establecidas: la ecuación (65) muestra que, a igualdad de flujo térmico, la pila epitérmica desarrolla mas potencia que la pila térmica y I(118) muestra que el tamaño crítico de la primera es menor que el de esta última.

5:- Pila Rápida.

Supongamos ahora que la absorción de neutrones es tan intensa que éstos no llegan a establecer equilibrio térmico con el material de la pila. Podemos hacer $p = 0$, $n_t(rt) = 0$ en nuestras ecuaciones fundamentales I(44) obteniendo así el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de un reactor que trabaja tan solo con neutrones rápidos. Resulta de este modo,

$$\frac{1}{D} \frac{\partial q'(\underline{x} \tau t)}{\partial t} = \Delta q'(\underline{x} \tau t) - \frac{\partial q'(\underline{x} \tau t)}{\partial \tau} - \int_0^{\tau_t} \frac{k(\tau\tau')}{p(\tau)} \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{x} \tau' t) d\tau' + \sum_i \frac{c_i(\underline{x}t)}{T_i p(\tau_i)} \delta(\tau - \tau_i) \quad (87a)$$

$$\frac{\partial c_i(\underline{x}t)}{\partial t} = - \int_0^{\tau_t} k_i(\tau') \frac{dp(\tau')}{d\tau'} q'(\underline{x} \tau' t) d\tau' - \frac{c_i(\underline{x}t)}{T_i} \quad (87b)$$

que deben resolverse con las condiciones

$$A) \quad [q'(\underline{x} \tau t)]_{S'} = [c_i(\underline{x}t)]_{S'} = 0$$

$$B) \quad q'(\underline{r} \tau 0) = Q'(\underline{r} \tau)$$

$$c_1(\underline{r} 0) = C_1(\underline{r}) \quad \text{dadas}$$

$$C) \quad q'(\underline{r} 0 t) = 0$$

Estas ecuaciones pueden resolverse por el mismo método que se siguió en la primera sección. Se encuentra el transformado de Laplace y se substituyen las $\bar{c}_1(\underline{r} \lambda)$ en la ecuación de los neutrones rápidos obteniéndose una expresión que es idéntica a (5) con $\bar{n}_t(\underline{r} \lambda) = 0$. Se efectúan luego las substituciones (6) y (7) obteniéndose para $u(\underline{r} \tau \lambda)$ una ecuación integrodiferencial que resulta de (9) haciendo $\bar{n}_t(\underline{r} \lambda) = 0$. Se emplea entonces el desarrollo (13) con el resultado de que $u_m(\tau\lambda)$, que también en este caso debe cumplir la condición (14a), debe ser una solución de la ecuación integral (15) con $\bar{n}_m(\lambda) = 0$. Resolviendo esta ecuación (para lo cual basta hacer $\bar{n}_m(\lambda) = 0$ en (21)) se obtiene

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{J_m(\lambda)}{D(\kappa_m^2 \lambda)} h_m(\tau\lambda) + I_m(\tau\lambda) \quad (88)$$

en donde $J_m(\lambda)$, $D(\kappa_m^2 \lambda)$, $h_m(\tau\lambda)$ e $I_m(\tau\lambda)$ son las funciones definidas por (28), (22), (17) y (16) respectivamente.

La solución es ahora

$$\left. \begin{aligned} q'(\underline{r} \tau t) &= \sum_m S_m(\underline{r}) q_m(\tau t) \\ c_1(\underline{r} t) &= \sum_m S_m(\underline{r}) c_{1m}(t) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

con $q_m(\tau t)$ y $c_{1m}(t)$ dadas por (32).

Considerando el caso discutido en la sección 2 al que corresponden las condiciones iniciales (33), substituyendo (37) y (38) en (88) se obtiene

$$u_m(\tau\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{h_m(\tau\lambda)}{D(\kappa_m^2\lambda)} \quad (90)$$

en tanto que de (43) resulta

$$\bar{c}_{im}(\lambda) = \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{T_i k_{it} h_m(\tau\lambda)}{(1+\lambda T_i) D(\kappa_m^2\lambda)} \quad (91)$$

obteniéndose así

$$\left. \begin{aligned} q_m(\tau\lambda) &= \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{e^{\lambda t} H_m(\tau\lambda)}{D(\kappa_m^2\lambda)} d\lambda \\ c_{ik}(t) &= \frac{S_m(\underline{r}_0)}{f_t} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{T_i k_{it} e^{\lambda t} H_m(\tau\lambda)}{(1+\lambda T_i) D(\kappa_m^2\lambda)} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

que describen completamente la solución.

Se reconoce de inmediato que $H_m(\tau\lambda)$ es la misma función definida en (44a) y que $D(\kappa_m^2\lambda)$ es el valor particular de $\Delta_m(\lambda)$ en (44b) cuando $p = 0$. La ecuación de enhoras (45) se reduce ahora a

$$D(\kappa_m^2\lambda) = 0 \quad (93)$$

que puede escribirse bajo la forma

$$\int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v\Sigma_m}{D} \left\{ \int_0^{\tau} l_{fom}(\tau'\tau) p_o(\tau'\tau) e^{-\lambda t_{ro}(\tau'\tau)} k(\tau'\tau) d\tau' + \right.$$

$$+ \left. \sum_{\tau_i < \tau} l_{f_{iM}}(\tau) p_i(\tau) e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} \frac{k_i(\tau)}{1 + \lambda T_i} \right\} = 1 \quad (94)$$

Como en este caso

$$k_{efM} = \int_0^{\tau_t} d\tau \frac{v \Sigma_a}{D} \left\{ \int_0^{\tau} l_{f_{oM}}(\tau' \tau) p_o(\tau' \tau) k(\tau' \tau) d\tau' + \right. \\ \left. + \sum_{\tau_i < \tau} l_{f_{iM}}(\tau) p_i(\tau) k_i(\tau) \right\} \quad (95)$$

utilizando (83) se demuestra fácilmente que la reactividad tiene por valor

$$\rho_M = \frac{k_{eM}}{k_{efM}} = \sum_i \frac{T_i}{\frac{1}{\lambda} + T_i} \int_{\tau_i}^{\tau_t} l_{f_{iM}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{Mi}(\tau) e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau - \\ - \int_0^{\tau_t} \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \left\{ \int_0^{\tau} (e^{-\lambda t_{r0}(\tau' \tau)} - 1) l_{f_{oM}}(\tau' \tau) p_o(\tau' \tau) \alpha_{Mo}(\tau' \tau) d\tau' + \right. \\ \left. + \sum_{\tau_i < \tau} (e^{-\lambda t_{r1}(\tau)} - 1) l_{f_{iM}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{Mi}(\tau) \right\} \quad (96)$$

El comportamiento de la función $f_M(\lambda)$ que aparece en el segundo miembro de (96) para valores reales de λ , es bien distinto al de los casos anteriores. Si $|\lambda| \ll \frac{1}{T_i}$

$$f_M(\lambda) \sim \lambda \sum_i \int_{\tau_i}^{\tau_t} l_{f_{iM}}(\tau) p_i(\tau) \alpha_{Mi}(\tau) \frac{v \Sigma_a}{D} d\tau \quad (97a)$$

En la región en que $|\lambda| \sim \frac{1}{T_i}$ pero $|\lambda| \ll \frac{1}{t_{r1}}$

lestar la atención del lector con llamadas bibliograficas referentes a nociones y definiciones de un caracter tan fundamental dentro de la especialidad, que no podrian dejar de ser bien conocidas por el mismo.