

DISPERSION MULTINIVELAR EN EL ESPACIO DE FOCK I.

F.M. Medina Nicolau

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica
(Recibido: Abril 10, 1953)

RESUMEN

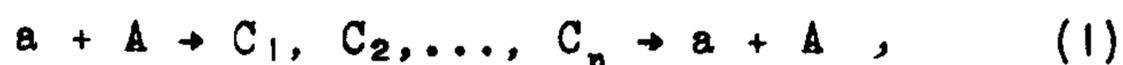
In the present paper, the first of a series, we discuss the time-dependent description of the many level scattering. The interaction is assumed to take place through the formation of a compound nucleus, and the description is given in an appropriate Fock space. In particular we derive in this paper the Hamiltonian of the problem and give the quantum mechanical representation of the potential, this potential having no classical analog.

El trabajo completo aparecerá publicado en varias partes.

I. Introducción.

La intención del presente trabajo es discutir detalladamente el proceso de la dispersión de una partícula por otra y la desintegración de un núcleo compuesto en dos partículas y, finalmente, estudiar los efectos transitorios en la corriente dispersada y desintegrada respectivamente.

Suponiendo que la dispersión de la partícula a por la partícula A se lleva a cabo mediante la formación de una partícula C la cual puede encontrarse en diferentes niveles de energía, el proceso puede representarse esquemáticamente por



en que C_1, C_2, \dots, C_n , representan los diferentes niveles de energía en los cuales puede encontrarse la partícula C .

En el caso de desintegración, en que originalmente se tiene la partícula compuesta C en alguno de sus niveles de energía, el proceso es representado por



Con el objeto de resolver el problema dentro del formalismo de la mecánica cuántica, se establece una función de onda que describa convenientemente el sistema formado por las partículas a y A o por el núcleo compuesto C . A continuación se establecen las ecuaciones dinámicas que rigen al proceso por medio de condiciones a la frontera, la cual está formada por la superficie que limita al núcleo

compuesto C. Estas ecuaciones substituyen a las que se obtendrían si la interacción entre las dos partículas se llevara a cabo mediante un potencial.

Utilizando los métodos usuales de la mecánica cuántica se puede establecer una representación del hamiltoniano del sistema y de éste deducir la representación del potencial asociado a la interacción, el cual no tiene análogo clásico.

Después de obtenidas las soluciones se discuten sus características, las cuales están íntimamente ligadas con la posición de los polos de la matriz S asociada al proceso.

Se discuten posteriormente las características que presenta la corriente de partículas dispersadas o desintegradas en función del tiempo.

Puesto que el análisis anterior se ha hecho cuando el momento angular relativo entre las partículas a y A es igual a cero, se discute finalmente la generalización de este formalismo cuando el momento angular es arbitrario.

II. Notación.

El sistema formado por las partículas a y A puede encontrarse en cualquiera de las $n + 1$ etapas siguientes: en la etapa cero, cuando el sistema aparece en forma de dos partículas separadas a y A; en la etapa i ($i=1, \dots, n$), cuando aparece formando el núcleo compuesto C_i . Cada una de estas etapas se describirá por una función de onda: ψ_0 es la función de onda que describe la etapa cero y ψ_i la que describe a la etapa i .

Si se utiliza el sistema centro de masa de las partículas a y A , la función ψ_0 dependerá del vector r de posición relativa de las partículas y del tiempo t , y las demás funciones ψ_1 dependerán solamente del tiempo.

En esta forma el sistema quedará completamente descrito por las $n + 1$ funciones de onda

$$\psi_0(\bar{r}, t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t), \quad (3)$$

con las cuales se puede construir la función de Fock del sistema

$$\Psi(\bar{r}, t) = \begin{bmatrix} \psi_0(\bar{r}, t) \\ \psi_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n(t) \end{bmatrix} \quad (3a)$$

La interpretación que se da a las componentes de (3a) es la siguiente: $\psi_0^*(\bar{r}, t)\psi_0(\bar{r}, t)d\bar{r}$ representa la probabilidad de encontrar, al tiempo t , a la partícula a con relación a A en la vecindad $d\bar{r}$ del punto \bar{r} , y $\psi_1^*(t)\psi_1(t)$ es la probabilidad de encontrar al sistema en forma de la partícula compuesta C_1 al tiempo t . La probabilidad de encontrar al sistema en cualquiera de sus etapas debe ser una constante y está dada por

$$P(t) = (\Psi, \Psi) = \int \psi_0^*(\bar{r}, t)\psi_0(\bar{r}, t)d\bar{r} + \sum_{j=1}^n \psi_j^*(t)\psi_j(t). \quad (4)$$

La función (3a) que describa el proceso (1) descrito en la introducción, se denotará por $\Psi_1(\bar{r}, t)$, y la que describa el proceso (2) por $\Psi_2(\bar{r}, t)$. Mientras no se indique lo contrario, la función $\Psi(r, t)$ describirá ambos procesos.

Con el objeto de simplificar el análisis que sigue, es conveniente representar estados del tipo (3a) en la notación bra y ket de Dirac. Con este objeto se introduce una observable que toma los valores $0, 1, \dots, n$, que indica la etapa en la cual se encuentra el sistema. Estados de la forma (1) o (2) estarán dados por un ket $|>$ cuya representación está dada por el vector

$$|> = \begin{bmatrix} \langle 0\bar{r}| > \\ \langle 1 | > \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle n | > \end{bmatrix} \quad (5)$$

La aparición de \bar{r} en la componente $\langle 0\bar{r}| >$ de (5), indica que la etapa cero del sistema está dada en la representación de configuración relativa.

El estado bra $\langle |$ correspondiente a (5) estará representado por el vector

$$\langle | = [\langle |0\bar{r} > \langle |1 > \dots \langle |n >] \quad (5a)$$

En adelante se omitirá el índice cero en $\langle 0\bar{r}|$ poniéndose simplemente $\langle \bar{r}|$, sin introducir ninguna confusión.

El producto escalar de los estados $\langle P|$ y $|Q >$ se define como:

$$\langle P|Q \rangle = \int \langle P|\bar{r} \rangle d\bar{r} \langle \bar{r}|Q \rangle + \sum_{j=1}^N \langle P|j \rangle \langle j|Q \rangle . \quad (6)$$

Si en vez de describir el proceso en la representación de configuración relativa se le quiere describir en la representación de momento bastará transformar solamente la primera componente de (5) de una representación a otra quedando las demás componentes sin alterarse pues representan a una partícula que está en reposo.

La transformación antes mencionada se lleva a cabo mediante la función¹:

$$\langle \bar{k}|\bar{r} \rangle = \langle \bar{r}|\bar{k} \rangle^* = (2\pi)^{-3/2} e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} , \quad (7)$$

donde \bar{k} es el momento relativo entre las dos partículas.

En esta forma, en la representación momental, el ket (5) está dado por:

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{k}| \rangle \\ \langle | \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle n| \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \langle \bar{r}|\bar{k} \rangle^* d\bar{r} \langle \bar{r}| \rangle \\ \langle | \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle n| \rangle \end{bmatrix} \quad (8)$$

Cualquier operador lineal \tilde{F} que actúa sobre un estado de Fock (5), está dado, en la representación momental, por la matriz

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \langle \bar{k} | F | \bar{k}' \rangle & \dots & \langle \bar{k} | F | n \rangle \\ \langle 1 | F | \bar{k}' \rangle & \dots & \langle 1 | F | n \rangle \\ \dots & & \dots \\ \langle n | F | \bar{k}' \rangle & \dots & \langle n | F | n \rangle \end{bmatrix}. \quad (9)$$

El ket base $|\bar{k}'\rangle$ representa un estado en el cual las dos partículas se mueven con momento relativo \bar{k}' , y el ket base $|i\rangle$ representa el estado correspondiente al núcleo C_1 . Estos están dados por:

$$|\bar{k}'\rangle = \begin{bmatrix} \delta(\bar{k}-\bar{k}') \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |i\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{in} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

De (10) se pueden deducir los bras base en la representación momental. Los kets base en la representación de configuración relativa están dados por

$$|\bar{r}'\rangle = \begin{bmatrix} \delta(\bar{r}-\bar{r}') \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |i\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{in} \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

El operador unidad \tilde{I} en el espacio de Fock está dado por (9) poniendo $F = 1$.

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} \delta(\bar{k}-\bar{k}') & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad (11)$$

donde I_n es la matriz idéntica $n \times n$.

Todos los estados representados hasta ahora han sido estacionarios. Para indicar estados dependientes del tiempo se hará por medio del ket $|Pt\rangle$ tal que $|P0\rangle = |P\rangle$.

III. Ecuaciones Dinámicas del Sistema.

Suponiendo que las partículas a y A no tienen espín, para $\bar{r} \neq 0$ la función $\psi_0(\bar{r}, t)$ debe satisfacer la ecuación de Schrodinger para partícula libre.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi_0(\bar{r}, t) + (m_a + m_A) c^2 \psi_0(\bar{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi_0(\bar{r}, t)}{\partial t}, \quad (12)$$

donde m_a y m_A son las masas de las partículas a y A respectivamente, c la velocidad de la luz y

$$\mu = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A}, \quad (12a)$$

es la masa reducida del sistema.

Las demás componentes del estado (3a), suponiendo que no hay interacción entre las diferentes etapas i ($i = 1, \dots, n$), deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$M_1 c^2 \psi_1(t) = i\hbar \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

puesto que los núcleos C_1 están en reposo. Por M_1 se ha designado la masa de la partícula compuesta C_1 .

Tanto en la ecuación (12) como en la (13) el operador $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ es el operador de energía total.

Puesto que la probabilidad de encontrar al sistema en cualquiera de sus etapas debe ser una constante, se debe tener

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0 \quad (14)$$

donde el valor de $P(t)$ está dado por (4).

Siguiendo un razonamiento análogo, expuesto en una publicación anterior², y utilizando el sistema natural de unidades $\hbar = c = \mu = 1$, se obtienen las siguientes ecuaciones dinámicas del sistema:

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_0(\bar{r}, t) = i \frac{\partial \psi_0(\bar{r}, t)}{\partial t} \quad \text{para } r \neq 0 \quad (15a)$$

$$(r\psi_0)_{r=0} = \sum_{j=1}^n C_{0j} \psi_j \quad (15b)$$

$$-i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + E_1 \psi_1 = 2\pi C_{10} \left(\frac{\partial r\psi_0}{\partial t} \right)_{r=0} \quad (15c)$$

Si $|Qt\rangle$ representa, en la notación de Dirac, el estado (3a) del sistema, las ecuaciones (15) se pueden poner en la forma:

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \langle \bar{r} | Q_t \rangle = i \frac{\partial \langle \bar{r} | Q_t \rangle}{\partial t} \quad \text{para } \bar{r} \neq 0, \quad (16a)$$

$$\langle r < \bar{r} | Q_t \rangle_{r=0} = \sum_{j=1}^n C_{0j} \langle j | Q_t \rangle, \quad (16b)$$

$$-i \frac{\partial \langle i | Q_t \rangle}{\partial t} + E_i \langle i | Q_t \rangle = 2\pi C_{i0} \left(\frac{\partial r \langle \bar{r} | Q_t \rangle}{\partial r} \right)_{r=0} \quad (16c)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Las ecuaciones (15) ó (16) determinan el comportamiento del sistema en el tiempo.

IV. Representación del Hamiltoniano y de la energía potencial.

El problema ha sido resuelto por medio de ecuaciones que expresan condiciones a la frontera. Es posible, sin embargo, encontrar la representación del Hamiltoniano y de la energía potencial asociados al sistema con el auxilio de las ecuaciones (15).

Se define el Hamiltoniano H como un operador lineal en el espacio de Fock tal que:

$$i \left(\frac{d | Q_t \rangle}{dt} \right) = H | Q_t \rangle \quad (17)$$

La componente de (17) con respecto a un bra $\langle P |$ constante y arbitrario está dado por:

$$i \left(\frac{d \langle P | Q_t \rangle}{dt} \right) = \langle P | H | Q_t \rangle \quad (17a)$$

donde la componente $\langle P|\bar{r} \rangle$ de $\langle P|$ es acotada en $r = 0$ y tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

Utilizando (6) y excluyendo el origen de la integral con respecto al volumen, por las ecuaciones (16a) y (16c) el miembro izquierdo de (17a) adquiere la forma siguiente:

$$i \frac{d \langle P|Qt \rangle}{dt} = -\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \langle P|\bar{r} \rangle \nabla^2 \langle \bar{r}|Qt \rangle d\bar{r} +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \left[\langle P|j \rangle E_j \langle j|Qt \rangle - 2\pi C_{j0} \langle P|j \rangle \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial r \langle \bar{r}|Qt \rangle}{\partial r} \right)_{r=0} \right]. \quad (17b)$$

Aplicando el teorema de Green a la integral que aparece en (17b), suponiendo que $r \langle \bar{r}|Qt \rangle$ sea finito en el origen, puesto que $\langle \bar{r}|Qt \rangle$ se anula cuando $r \rightarrow \infty$, el valor de la integral está dado por:

$$\frac{1}{2} \int (\nabla^2 \langle P|\bar{r} \rangle) \langle \bar{r}|Qt \rangle d\bar{r} + 2\pi \left[\frac{\partial r \langle P|\bar{r} \rangle}{\partial r} r \langle \bar{r}|Qt \rangle \right]_{r=0} \quad (17c)$$

Con el auxilio de (17c) y de (16b) la ecuación (17b) queda finalmente como

$$i \frac{d \langle P|Qt \rangle}{dt} = \int \frac{1}{2} k^2 \langle P|\bar{k} \rangle \langle \bar{k}|Qt \rangle d\bar{k} -$$

$$- 2\pi \sum_{j=1}^N \left[C_{0j} \frac{\partial r \langle P|\bar{r} \rangle}{\partial r} \langle j|Qt \rangle + C_{j0} \langle P|j \rangle \frac{\partial r \langle \bar{r}|Qt \rangle}{\partial r} \right]_{r=0} +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \langle P|j \rangle E_j \langle j|Qt \rangle = \langle P|H|Qt \rangle, \quad (18)$$

donde la integral que aparece en (17c) se ha expresado en

la representación momental.

De (18) es fácil ver que el operador H es hermitiano, esto es:

$$\langle P|H|Qt \rangle^* = \langle Qt|H|P \rangle . \quad (19)$$

Los operadores \tilde{H} , \tilde{L}_i y \tilde{L}^2 son constantes de movimiento y se puede demostrar que conmutan entre sí³.

El operador \tilde{L}_i es el asociado a la i -ésima componente del momento angular relativo L . En la representación de momento relativo está dado por

$$\tilde{L}_i = \begin{bmatrix} -i \epsilon_{ij1} k'_j & \frac{\partial}{\partial k'_i} \delta(\bar{k}' - \bar{k}'') & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde ϵ_{ij1} es un operador antisimétrico que es distinto de cero solamente cuando $ij1$ es una permutación de los números 1,2,3, teniendo un valor $+1$ cuando la permutación es par y -1 cuando es impar.

El operador \tilde{L}^2 está dado por:

$$\tilde{L}^2 = \sum_{i=1}^3 \tilde{L}_i^2 . \quad (21)$$

Hay que demostrar que los operadores

$$\tilde{H}, \tilde{L}_3, \tilde{L}^2, \quad (22)$$

forman un conjunto completo de observables que conmutan entre sí. En tal caso cualquier estado de Fock puede desa-

rollarse en términos de los estados propios simultáneos de este conjunto.

Poniendo en (18)

$$\langle P | = \langle \bar{r} | = [\delta(\bar{r} - \bar{r}') \ 0 \ \dots \ 0],$$

se obtiene:

$$\langle \bar{r} | H | Q_t \rangle = - \frac{1}{2} \nabla^2 \langle \bar{r} | Q_t \rangle - 2\pi \sum_{j=1}^n C_{0j} \langle j | Q_t \rangle \delta(\bar{r}). \quad (23a)$$

Por otra parte si

$$\langle P | = \langle i | = [0 \ \delta_{i1} \ \dots \ \delta_{in}],$$

la expresión (18) queda:

$$\langle i | H | Q_t \rangle = - 2\pi C_{0i} \left(\frac{\partial_r \langle \bar{r} | Q_t \rangle}{\partial r} \right)_{r=0} + E_i \langle i | Q_t \rangle. \quad (23b)$$

Designando por $|Elm\rangle$ el estado propio simultáneo de las constantes de movimiento \tilde{H} , \tilde{L}^2 y \tilde{L}_3 con los valores propios $E, l(l+1)$ y m respectivamente se tiene, de (23), lo siguiente:

$$- \frac{1}{2} \nabla^2 \langle \bar{r} | Elm \rangle - 2\pi \sum_{j=1}^n C_{0j} \langle j | Elm \rangle \delta(\bar{r}) = E \langle \bar{r} | Elm \rangle, \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} - 2\pi C_{0i} \left(\frac{\partial_r \langle \bar{r} | Elm \rangle}{\partial r} \right)_{r=0} + E_i \langle i | Elm \rangle &= \\ &= E \langle i | Elm \rangle, \end{aligned} \quad (24b)$$

$$y \quad L^2 \langle \bar{r} | Elm \rangle = l(l+1) \langle r | Elm \rangle, \quad (24c)$$

$$L_s \langle \bar{r} | Elm \rangle = m \langle \bar{r} | Elm \rangle . \quad (24d)$$

La solución que satisface (24a,c,d) cuando $\bar{r} \neq 0$ está dada por:

$$\langle \bar{r} | Elm \rangle = [a_{1m} j_1(kr) + b_{1m} n_1(kr)] P_1^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (25)$$

donde k es el número de onda relativo y está relacionado con la energía por $\frac{1}{2} k^2 = E$.

Puesto que $n_1(kr)$ tiene una singularidad de orden $l+1$, la cual es demasiado alta para satisfacer (24a) para $\bar{r} = 0$, se debe tener que para $l \neq 0$, $b_{1m} = 0$. La expresión (25) adquiere la forma:

$$\langle \bar{r} | Elm \rangle = a_{1m} j_1(kr) P_1^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (25a)$$

Por (24b) se tiene inmediatamente que:

$$\langle i | Elm \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (25b)$$

o sea, que si las dos partículas a y A tienen un momento angular relativo mayor que cero, no es posible que interaccionen.

Cuando $l = 0$ la expresión (25) tiene la forma:

$$\langle \bar{r} | E00 \rangle = a_{00} j_0(kr) + b_{00} n_0(kr). \quad (26a)$$

Substituyendo (26a) en (24a) para $l, m = 0$, y teniendo en cuenta que

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\bar{r}),$$

se obtiene:

$$[r \langle \bar{r} | E00 \rangle - \sum_{j=1}^n C_{0j} \langle j | E00 \rangle] \delta(\bar{r}) = 0 . \quad (26b)$$

Para que sea válida la relación (26b) es necesario que:

$$(r \langle \bar{r} | E00 \rangle)_{r=0} = \sum_{j=1}^n C_{0j} \langle j | E00 \rangle . \quad (26c)$$

Substituyendo (24b) en (26c) se tiene finalmente

$$(r \langle \bar{r} | E00 \rangle)_{r=0} = R(E) \left(\frac{\partial r \langle \bar{r} | E00 \rangle}{\partial r} \right)_{r=0} , \quad (26d)$$

donde

$$R(E) = \sum_{j=1}^n \frac{2 \pi C_{0j}^2}{E_j - E} \quad (26e)$$

es una R de Wigner⁴.

Las relaciones (24b), (26a) y (26d) determinan las componentes del ket propio $|E00\rangle$:

$$\langle \bar{r} | E00 \rangle = a_{00}(k) [j_0(kr) - k R(k^2) n_0(kr)] , \quad (27a)$$

$$\langle j | E00 \rangle = a_{00}(k) \frac{1}{2} \frac{\partial R(k^2)}{\partial C_{0j}} . \quad (27b)$$

Se ha demostrado, entonces, que el conjunto de constantes de movimiento (22) forma un conjunto completo de observables, puesto que los kets propios simultáneos a ellos han sido determinados hasta un factor multiplicativo $a_{00}(k)$.

Este factor puede determinarse por la condición de normalización

$$\langle E' l' m' | E'' l'' m'' \rangle = \delta(E' - E'') \delta_{l' l''} \delta_{m' m''} \quad .$$

Poniendo $l' = l'' = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle E' 00 | E'' 00 \rangle &= \int \langle \bar{r} | E' 00 \rangle^* \langle \bar{r} | E'' 00 \rangle d\bar{r} + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \langle j | E' 00 \rangle^* \langle j | E'' 00 \rangle = \delta(E' - E'') \quad . \end{aligned} \quad (28)$$

Substituyendo las expresiones (27) en (28) se obtiene el factor de normalización. (véase apéndice)

$$a_{00}(k') = \sqrt{\frac{k'}{2\pi^2}} \frac{1}{1 - i k' R(k'^2)} \quad . \quad (29)$$

Con la ayuda de (27) y (29) se puede obtener la representación de la energía potencial en la representación hamiltoniano-momento angular.

Por analogía en el caso clásico se tiene que:

$$\langle P | H | Q \rangle = \langle P | \frac{1}{2} P^2 | Q \rangle + \langle P | V | Q \rangle \quad , \quad (30)$$

donde $\frac{1}{2} P^2$ representa a la energía cinética y V a la potencial, siendo $\langle P |$ y $| Q \rangle$ un bra y un ket arbitrarios y constantes.

Haciendo $\langle P | = \langle E' l' m' |$ y $| Q \rangle = | E'' l'' m'' \rangle$, puesto que

$$\langle E' l' m' | \frac{1}{2} P^2 | E'' l'' m'' \rangle = \int \frac{1}{2} k^2 \langle E' l' m' | \bar{k} \rangle \langle \bar{k} | E'' l'' m'' \rangle d\bar{k} \quad ,$$

por (19) se obtiene la representación del potencial.

$$\begin{aligned}
 \langle E'l'm'|V|E'l''m'' \rangle = & -2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_{0j} \frac{\partial_r \langle E'l'm'|\bar{r} \rangle}{\partial r} \langle j|E'l''m'' \rangle + \right. \\
 & \left. + C_{j0} \langle E'l'm'|j \rangle \frac{\partial_r \langle \bar{r}|E'l''m'' \rangle}{\partial r} \right]_{r=0} + \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} \langle E'l'm'|j \rangle E_j \langle j|E'l''m'' \rangle . \quad (31)
 \end{aligned}$$

Es fácil ver que si $l' \neq 0$ ó $l'' \neq 0$ o ambas $l', l'' \neq 0$

$$\langle E'l'm'|V|E'l''m'' \rangle = 0 . \quad (31a)$$

Entonces no hay interacción cuando el momento angular relativo es distinto de cero, lo cual ya se había encontrado en (25b).

Cuando $l' = l'' = 0$, la representación del potencial está dada por

$$\langle E'00|V|E''00 \rangle = \frac{\sqrt{k'k''}}{\pi(k'^2 - k''^2)} \frac{k''^2 R(k'^2) - k'^2 R(k''^2)}{(1+i k' R(k'^2))(1-i k'' R(k''^2))} . \quad (31b)$$

El potencial tiene una representación no diagonal.

Con el objeto de comparar la expresión (31b) con la representación del potencial que se obtendría si la dispersión se llevara a cabo mediante un pozo rectangular de potencial, de alcance a y de profundidad $-|V_0|$, supóngase que $u(k,r)$ es la función que describe la dispersión para momento angular cero de la partícula a por el dispersor A .

La función $R(k^2)$ de Wigner⁵ asociada a este pozo de potencial está dada por

$$R(k^2) = \left[\frac{1}{\frac{d}{dr} \log r u(k, r)} \right]_{r=a} = \frac{\tan \sqrt{k^2 + k_0^2} a}{\sqrt{k^2 + k_0^2} a} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{(n - \frac{1}{2}) \pi^2 - (k_0^2 + k^2) a^2}, \quad (32)$$

donde $\frac{1}{2} k_0^2 = |V_0|$.

La representación del potencial estará dada por:

$$\langle E'00 | V | E''00 \rangle = \int_0^a u(k', r)^* V u(k'', r) r^2 dr =$$

$$= -2|V_0| e^{i(k' - k'')a} \frac{\sqrt{k'k''}}{\pi(k'^2 - k''^2)} \frac{R(k'^2) - R(k''^2)}{(1 + i k' R(k'^2)) (1 - i k'' R(k''^2))}. \quad (33)$$

Las expresiones (31) y (33) son muy semejantes en cuanto a forma, pero difieren esencialmente en cuanto a la expresión que se tiene para la función R de Wigner: en el primer caso es una serie con un número finito de términos y en segundo caso una serie con un número infinito de términos.

Por otra parte los polos de la función R de Wigner están determinados al dar la profundidad y anchura del pozo de potencial como lo muestra la ecuación (32). Cuando no se utiliza el concepto de potencial para describir la interacción entonces estos polos pueden elegirse arbitrariamente, con la condición que estos sean reales, como se puede observar en la ecuación (26e), en la cual hay n cons-

tantes a determinar.

Apéndice.

Cálculo de la constante de normalización $a_{00}(k)$

Substituyendo (27) en (28) y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^{\infty} j_0(k'r) j_0(k''r) r^2 dr = \int_0^{\infty} n_0(k'r) n_0(k''r) r^2 dr =$$

$$= \frac{\pi}{2k'} \delta(E' - E''),$$

$$\int_0^{\infty} j_0(k'r) n_0(k''r) r^2 dr = -\frac{1}{k''(k'^2 - k''^2)},$$

se obtiene que:

$$\langle E'00 | E''00 \rangle = \frac{2\pi^2}{k''} |a_{00}|^2 [1 + k''^2 R(k''^2) R(k'^2)] \delta(E' - E'').$$

De aquí resulta inmediatamente que

$$a_{00}(k) = \sqrt{\frac{k}{2\pi^2}} \frac{1}{1 - i k R(k^2)}$$

REFERENCIAS.

1. P.A.M. Dirac, Quantum Mechanics (Claredon Press, Oxford, 1947) tercera edición, p.97.

2. M. Moshinsky, Phys.Rev., 81, 347 (1951).
3. idem., Phys.Rev., 84, 533 (1951).
4. E.P. Wigner, Ann.of Math., 53, 36, (1951).
5. J.M.Lozano, Rev.Mex.Fis., II, 155 (1953).