DESCRIPCION DINAMICA DE LA DISPERSION POR UN POTENCIAL.

Juan Manuel Lozano.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Abril 12, 1953)

RESUMEN

In this paper we give the time dependent description of the scattering of a wave packet by a short range potential. We show that when the wave packet is initially outside the scatterer, it is posible to introduce an appropiate time dependent Green function to describe the scattering process. This Green function will be evaluated explicitly in term of error integral functions, and the only parameters that appear in the Green function will be the poles of the S matrix. From the asymptotic behavior of the Green function when $t \to \infty$, *we obtain restrictions on the position of the poles of the S matrix which agree with those due to the definition* *of the S in terms of the derivative matrix R. The present analysis is carried out for arbitrary angular momentum.*

I. Introducción.

La finalidad del presente trabajo es estudiar la dispersión nuclear por medio de un potencial de corto alcance según el formalismo general de la matriz S. Este problema tiene una solución bien conocida cuando se refiere solamente al estado estacionario del proceso, por lo que el interés de este estudio radica principalmente en describir en el tiempo el proceso de la dispersión y en encontrar su correlación con los polos de la matriz S.

En un trabajo reciente, se ha resuelto el problema del comportamiento dinámico de la dispersión nuclear por medio de condiciones a la frontera en un espacio de Fock convenientemente elegido. Este es el llamado proceso multinivelar[1].

La dispersión nuclear puede considerarse como dispersión por medio de un potencial de corto alcance, y describirla usando el formalismo de la matriz S. En un trabajo anterior se planteó el problema así considerado para el caso particular de momento angular cero, usando un tipo de transformada especial para ese caso. Ahora se extenderá el estudio de la dispersión por un potencial de corto alcance al caso de momento angular arbitrario y singularidad esencial al infinito en la función S. Concretando el problema, éste consiste en encontrar el comportamiento en el tiempo de un paquete de ondas arbitrario, originalmente situado fuera del potencial dispersor; con este objeto, se verá que es útil introducir una función de Green apropiada al problema, cuya forma analítica se obtendrá explícitamente.

El análisis que se desarrolla en este estudio, se restringe a energías no relativistas para la partícula incidente sobre el potencial.

Por simplicidad, se supondrá que el potencial dispersor tiene simetría esférica. En este trabajo, potencial de corto alcance significa que su acción termina a una cierta distancia fija finita a, la cual se llama alcance del potencial; en símbolos, si $V(r)$ es el potencial dispersor,

$$V(r) = \begin{cases} V(r) \neq 0 \quad , & \text{si} \quad r \leqslant a \ , \\ 0 \quad , & \text{si} \quad r > a \ . \end{cases}$$

Se supone además que el alcance a del potencial es comparable con la longitud de onda de la partícula incidente, de modo que la dispersión S no es preponderante y debe, en consecuencia, estudiarse el caso de momento angular arbitrario.

II. Planteamiento del problema.

Es cómodo usar el sistema natural de unidades $\hbar = c = 1$, y además se supondrá que la masa de la partícula incidente es $m = 1$.

La ecuación que satisface la función de onda ψ_1 que describe el estado del sistema es la ecuación de Schroedinger para momento angular 1 y con simetría esférica:

$$- \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi_l + V(r)\ \psi_l = i \frac{\partial \psi_l}{\partial t} , \qquad (1)$$

donde $V(r)$ es el potencial de corto alcance definido por

$$V(r) = \begin{cases} V(r) , & \text{si} \quad r \leqslant a , \\ 0 , & \text{si} \quad r > a . \end{cases} \qquad (2)$$

Para no complicar innecesariamente la manipulación matemática del problema, es conveniente que $V(r)$ sea una función continua y con derivada continua, aunque el análisis puede generalizarse fácilmente a potenciales que no tengan esta restricción.

Llamando k al número de onda de la partícula incidente y $E = \frac{1}{2} k^2$ a su energía, se tiene que en ausencia de potencial, la función $\psi_l(r,k,t)$ toma la forma

$$\psi_l(r,k,t) = j_l(kr) \exp\left(- i \tfrac{1}{2} k^2 t\right) , \qquad (3)$$

ya que la función $j_l(kr)$ satisface la ecuación

$$- \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] j_l(kr) - \tfrac{1}{2} k^2\ j_l(kr) = 0 .$$

Se sugiere entonces definir una función $u_l(\kappa,r)$ en la siguiente forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_l}{dr}\right) + \left[\kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2V(r) \right] u_l = 0 , \qquad (4)$$

y si $V(r) \to 0$, entonces $u_l(\kappa,r) \to j_l(\kappa r)$. $0 \leqslant r < \infty$.

Se introduce la función $w_l(\kappa,r)$ que satisface la ecuación

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dw_l}{dr}\right)+\left[\kappa^2-\frac{l(l+1)}{r^2}-2V(r)\right]w_l=0\ ,\quad 0\leq r\leq a\ . \tag{5}$$

y además la condición de que $w_l(\kappa,r)$ es regular en $r=0$.

Se define la función $R_l(\kappa^2)$ como sigue

$$R_l(\kappa^2)=\frac{w_l(\kappa,a)}{\left(\frac{dw_l}{dr}\right)_{r=a}}\ . \tag{6}$$

La función $R_l(\kappa^2)$ es esencialmente el recíproco de la función $f(E)$ introducida por Weisskopf[2] y otros en su formulación de la Teoría de las Reacciones Nucleares.

Con ayuda de $w_l(\kappa,r)$ se puede construir una $u_l(\kappa,r)$ que satisface la ecuación (4) y que tiene la forma

$$u_l(\kappa,r)=\begin{cases} A(\kappa)\ w_l(\kappa,r)\ , & 0\leqslant r\leqslant a\ ,\\[2ex] \frac{1}{2}\left[h_l^-(\kappa r)+S_l(\kappa)h_l^+(\kappa r)\right]\ , & r\geqslant a\ ,\end{cases} \tag{7}$$

donde $h_l^{\pm}(\kappa r)$ son las funciones de Hankel esféricas definidas en términos de las funciones de Bessel y de Neuman esféricas como sigue

$$h_l^{\pm}(x)=j_l(x)\pm in_l(x)\ , \tag{8}$$

y por tanto

$$j_l(x)=\frac{1}{2}\left[h_l^-(x)+h_l^+(x)\right]\ . \tag{9}$$

Usando el hecho de que las funciones $u_1(\kappa,r)$ y $\dfrac{du_1}{dr}$ son continuas en $r = a$, se puede poner la función $R_1(\kappa^2)$ en términos de las funciones $h_1^{\pm}(\kappa r)$ y de la función $S_1(\kappa)$:

$$R_1(\kappa^2) = \frac{1}{\kappa} \frac{h_1^-(\kappa a) + S_1(\kappa)\, h_1^+(\kappa a)}{h_1^{-\prime}(\kappa a) + S_1(\kappa) h_1^{+\prime}(\kappa a)} , \qquad (10)$$

donde $h_1^{\pm\prime}(\kappa a)$ significa la derivada de $h_1^{\pm}(\kappa r)$ respecto a su argumento y calculada para el valor $r = a$.

De la ecuación (10) se obtiene

$$S_1(\kappa) = -\frac{h_1^-(\kappa a) - \kappa h_1^{-\prime}(\kappa a)\; R_1(\kappa^2)}{h_1^+(\kappa a) - \kappa h_1^{+\prime}(\kappa a)\; R_1(\kappa^2)} . \qquad (11)$$

En el apéndice se demuestra que la función $u_1(\kappa r)$ tiene la propiedad siguiente

$$\int_0^{\infty} u_1^*(\kappa',r)\; u_1(\kappa'',r)\; r^2\, dr = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1+(-1)^{1+1}\, S_1(\kappa')}{\kappa'} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-(-1)^{1+1}\, S_1(\kappa'')}{\kappa''} \right] \delta\left(\frac{\kappa'^2}{2} - \frac{\kappa''^2}{2}\right) = B_1(\kappa',\kappa')\,\delta(\epsilon'-\epsilon''), \qquad (12)$$

donde $\epsilon = \dfrac{\kappa^2}{2}$.

Si se hace la transformación $u_1(\kappa,r) \rightarrow \dfrac{u_1(\kappa,r)}{\sqrt{B_1(\kappa',\kappa')}}$, las funciones $u_1(\kappa,r)$ para diferentes valores de κ, forman un sistema completo ortonormal de soluciones de la ecuación (4). Este hecho permite, en virtud del teorema de desarrollo de Dirac, expresar cualquier función de r como combinación lineal de las eigensoluciones $u_1(\kappa,r)$.

En consecuencia, con ayuda de las funciones $u_1(\kappa,r)$ se puede definir una transformada adecuada para estudiar el desarrollo en el tiempo de un paquete de ondas que incide sobre el potencial y es dispersado por éste.

En ausencia de potencial, la transformada de Fourier se emplea ordinariamente para encontrar el desarrollo temporal de un paquete; en forma análoga se puede utilizar la transformada generalizada para describir el desarrollo temporal de un paquete cuando se encuentra en presencia de un potencial de la forma (2).

En el momento $t = 0$, la función de onda $\psi_1(r,t)$ es

$$\psi_1(r,0) = f_1(r) \quad , \qquad (13)$$

entonces se define la transformada

$$F_1(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_1(r)\; u_1^*(\kappa,r)\; r^2\, dr \quad , \qquad (14)$$

y la función de onda dependiente del tiempo toma la forma

$$\psi_1(r,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_1(\kappa)\; u_1(\kappa,r) \exp(-i\, \tfrac{1}{2}\, \kappa^2 t)\kappa^2 d\kappa \; . \qquad (15)$$

La función de onda $\psi_1(r,t)$ obtenida en (15) satisface la ecuación (1) debido a que la función $u_1(\kappa,r)$ satisface la ecuación (4); entonces, si se comprueba que para $t = 0$ la ecuación (15) se reduce a la ecuación (13), queda demostrado que la función $\psi_1(r,t)$ dada por (15) describe el desarrollo en el tiempo del paquete de ondas inicial.

La transformada de Hankel del paquete inicial es

$$\bar{F}_1(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_1(r)\ j_1(kr)\ r^2dr \quad . \tag{16}$$

Ahora bien, sólo se quiere conocer el desarrollo en el tiempo de un paquete de onda inicialmente fuera del potencial dispersor, por lo que el paquete es nulo en el interior del potencial para $t = 0$, esto es,

$$f_1(r) = 0 \quad . \quad 0 \leqslant r \leqslant a \quad . \tag{17}$$

La inversa de la transformada de Hankel (16) es

$$f_1(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{F}_1(k)\ j_1(kr)\ k^2dk \quad . \tag{16a}$$

Substituyendo (16a) en (14), y teniendo en cuenta (17), se tiene

$$F_1(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_0^\infty \bar{F}_1(k)\ j_1(kr) k^2dk \right\} u_1^*(\kappa, r) r^2dr \ . \tag{18}$$

Esta ecuación puede ponerse, cambiando el orden de integración ,

$$F_1(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty H_1(k,\kappa)\ \bar{F}_1(k)\ k^2dk \quad , \tag{19}$$

donde

$$H_1(k,\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty j_1(kr)\ u_1^*(\kappa,r)\ r^2dr \quad . \tag{20}$$

Se puede ahora definir la función de Green del problema, que se designa por $\Omega_1(r,k,t)$ como sigue:

$$\Omega_1(r,k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty H_1(k,\kappa) u_1(\kappa,r) \quad \times$$

$$\times \exp\left(-i \tfrac{1}{2} \kappa^2 t\right) \kappa^2 d\kappa \ . \qquad r > a \ . \qquad (21)$$

La función $\Omega_1(r,k,t)$ satisface la ecuación (1) y, como se demostrará más adelante, para $t = 0$ toma la forma

$$\Omega_1(r,k,0) = j_1(kr) \quad , \quad r > a \quad , \qquad (22)$$

y por tanto, por la ecuación (16a),

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_1(k) \ \Omega_1(r,k,0) k^2 dk = f_1(r) \ , \quad \text{cuando} \quad r > a \ . \qquad (16b)$$

Del análisis anterior, por las ecuaciones (19) y (21), la función de onda $\psi_1(r,t)$ dada por la ecuación (17), se puede expresar

$$\psi_1(r,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \overline{F}_1(k) \ \Omega_1(r,k,t) \ k^2 dk \quad , \qquad (17a)$$

y por la ecuación (16b), la función $\psi_1(r,t)$ satisface la condición (13).

III. <u>Propiedades de las funciones</u> $R_1(\kappa^2)$ y $S_1(\kappa)$.

En esta sección se encuentran algunas propiedades de la función $S_1(\kappa)$ deducidas de las propiedades de la función $R_1(\kappa^2)$, que es una función R de Wigner.

Una función R de Wigner[3] es una función meromorfa, cuya parte imaginaria es no negativa cuando su argumento tiene parte imaginaria positiva, y es no positiva cuando su argumento tiene parte imaginaria negativa.

La función $R_1(\kappa^2)$ definida en la ecuación (6) es una función R de Wigner, como puede verse en la siguiente forma:

Multiplicando la ecuación (5) por w_1^*, la compleja conjugada de la ecuación (5) por w_1 y restando, se obtiene

$$\frac{d}{dr}\left[r\, w_1^* \frac{drw_1}{dr} - rw_1 \frac{drw_1^*}{dr} \right] = (\kappa^{*2}-\kappa^2)\, r^2 |w_1|^2 \quad . \tag{23}$$

Por otra parte, de la definición (6), se tiene

$$2i\,\mathrm{Im}R_1(\kappa^2) = \frac{w_1(\kappa,a)}{\left(\frac{dw_1}{dr}\right)_{r=a}} - \frac{w_1(\kappa,a)^*}{\left(\frac{dw_1^*}{dr}\right)_{r=a}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}\int_0^a \frac{d}{dr}\left[r\, w_1 \frac{drw_1^*}{dr} - rw_1^* \frac{drw_1}{dr}\right] dr}{\left[\frac{dw_1}{dr}\right]^2_{r=a}} ,$$

y por la ecuación (23), se tiene

$$2i\ \mathrm{Im}R_1(\kappa^2) = 2i\ \gamma(\kappa^2)\ \mathrm{Im}\ \kappa^2 \quad ,$$

donde

$$\gamma(\kappa^2) = \frac{\int_0^a r^2 |w_1|^2\, dr}{a^2\left[\frac{dw_1}{dr}\right]^2_{r=a}} > 0 \,.$$

Con esto queda demostrado que la función $R_1(\kappa^2)$ cumple la segunda parte de la definición de una función R. Para demostrar que la función $R_1(\kappa^2)$ es meromorfa, basta observar que, por un teorema muy conocido[4], las funciones w_1 y $\frac{dw_1}{dr}$ son funciones enteras de κ^2 y por tanto su razón es una función meromorfa.

Ahora pueden usarse las propiedades conocidas de la función R para encontrar algunas propiedades de la función $S_1(\kappa)$.

1- Los polos de la función $S_1(\kappa)$ están en la parte inferior del plano complejo o sobre el eje imaginario[5].

2- Los polos de $S_1(\kappa)$ están simétricamente colocados respecto al eje imaginario.

Demostración. Los polos de la función $S_1(\kappa)$ son las raices de la ecuación

$$h_1^+(\kappa a) - h_1^{+\prime}(\kappa a)\, R_1(\kappa^2) = 0 \quad .$$

Tomando la conjugada compleja de esta ecuación y usando las relaciones siguientes

$$h_1^+(\rho)^* = h_1^-(\rho^*) \; ; \quad h_1^+(-\rho) = (-1)^1 h_1^-(\rho) \; ; \; h_1^{+\prime}(-\rho) = (-1)^{1+1} h_1^{-\prime}(\rho);$$

$$R_1(\kappa^2)^* = R_1(\kappa^{2*}) = R_1[(-\kappa^*)^2] \quad ,$$

se obtiene la ecuación

$$h_1^+(-\kappa^* a) - (-\kappa^*)\, h_1^{+\prime}(-\kappa^* a)\, R_1[(-\kappa^*)^2] = 0 \; ,$$

la cual indica que si κ_a es un polo de $S_1(\kappa)$, $-\kappa_a^*$ tambien lo es.

3- Para κ real, $S_1(\kappa)\ S_1^*(\kappa) = 1$.

La demostración es inmediata.

4- La función $S_1(\kappa)\ \exp\ (i2\kappa a)$ es acotada cuando $\kappa \to \infty$ en la parte superior del plano complejo.

Demostración. De la ecuación (10) y del hecho de que

$$h_1^{\pm}(\kappa r) \xrightarrow[\kappa \to \infty]{} (\mp\ i)^{1}\ \frac{\exp(\pm\ i\kappa r)}{\pm\ i\kappa r} \quad ,$$

se sigue que

$$R_1(\kappa^2) \xrightarrow[\kappa \to \infty]{} -\frac{1}{i\kappa}\ \frac{1+(-1)^{1+1}\ S_1(\kappa)\ \exp(i2\kappa a)}{1+(-1)^{1}\ S_1(\kappa)\ \exp(i2\kappa a)} \quad ,$$

y si $S_1(\kappa)\ \exp(i2\kappa a) \to \infty$ cuando $\kappa \to \infty$ en la parte superior del plano complejo, se tiene que

$$R_1(\kappa^2) \xrightarrow[\kappa \to \infty]{} \frac{1}{i\kappa} = -\ \frac{\kappa_y}{|\kappa|^2} - i\ \frac{\kappa_x}{|\kappa|^2} \quad .$$

Pero debe cumplirse

$$\kappa_x\kappa_y\ \mathrm{Im}\ R_1(\kappa^2) \geq 0 \quad ,$$

esto es,

$$-\ \frac{\kappa_x^2\ \kappa_y}{|\kappa|^2} \geq 0 \quad ,$$

lo cual es contradictorio si $\kappa_y > 0$ y $\kappa_x \neq 0$.

5- El comportamiento asintótico de la función $S_1(\kappa)\exp(i2\kappa a)$ está dado por

$$S_1(\kappa)\exp(i2\kappa a) \xrightarrow[\kappa \to \infty]{} (-1)^{1+1} \left[\frac{2}{1-i\kappa R_1(\kappa^2)} - 1 \right] \quad .$$

La demostración se sigue de la definición.

IV. Determinación explícita de la función de Green del problema.

Por un procedimiento análogo al indicado en el apéndice. se puede calcular la función $H_l(k,\kappa)$ que se definió en la ecuación (20), obteniéndose el resultado siguiente:

$$H_l(k,\kappa) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4k\kappa}\left\{\left[1+S_l^*(\kappa)\right]\delta(\kappa-k) + (-1)^{l+1}\left[1+S_l^*(\kappa)\right]\delta(\kappa+k)\right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{k^2-\kappa^2}\left\{u_l^*(\kappa,a)\,[ka\,j_l(ka)]' - j_l(ka)\,[\kappa a\,u_l^*(\kappa,a)]'\right\}. \quad (25)$$

Ahora bien, de la ecuación (7) y de la propiedad 3 de la función $S_l(\kappa)$, se obtiene que

$$S_l(\kappa)\; H_l(k,\kappa) = (-1)^l H_l(k,-\kappa)\;. \qquad (26)$$

La función $\Omega_l(r,k,t)$ dada en (21) se puede poner, por la ecuación (7), bajo la forma

$$\Omega_l(r,k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty H_l(k,\kappa)S_l(\kappa)\; h_l^+(\kappa r)\exp(-i\,\tfrac{1}{2}\,\kappa^2 t)\kappa^2\,d\kappa\; + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty H_l(k,\kappa)h_l^-(kr)\exp(-i\,\tfrac{1}{2}\,\kappa^2 t)\;\kappa^2\,d\kappa\right\}\;.$$

y haciendo en la segunda integral el cambio de variable $\kappa \to -\kappa$, se obtiene, por la ecuación (26),

$$\Omega_l(r,k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,P\int_{-\infty}^{\infty} S_l(\kappa)H_l(k,\kappa)h_l^+(\kappa r)\;\exp(-i\,\tfrac{1}{2}\,\kappa^2 t)\;\kappa^2\,d\kappa\;. \qquad (27)$$

La P delante de la integral indica que se toma el valor principal de Cauchy debido a que la función $H_1(k,\kappa)$ tiene polos en $\kappa = \pm k$, como puede verse de la ecuación (25).

Al substituir el valor (25) de la función $H_1(k,\kappa)$ en la integral (27), pueden integrarse inmediatamente los términos que contienen funciones δ de Dirac, quedando únicamente por integrar el término que contiene el factor $\frac{1}{k^2-\kappa^2}$.

Se tiene entonces,

$$\Omega_1(r,k,t) = \tfrac{1}{4}\{[1+S_1(k)]h_1^+(kr)+[1+S_1(-k)]h_1^-(kr)\} \times$$
$$\times \exp(-i\,\tfrac{1}{2}\,k^2t) + I_1\,, \tag{a}$$

donde la Integral I_1 puede ponerse en la forma

$$I_1 = -\frac{1}{\pi}\,P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\kappa^2-k^2}\{u_1(\kappa,a)\,[kaj_1(ka)]' - j_1(ka)\,[\kappa a u_1(\kappa,a)]'\} \times$$
$$\times\, h_1^+(\kappa r)\,\exp\,(-i\,\tfrac{1}{2}\,\kappa^2t)\,\kappa^2\,d\kappa\ .$$

En conveniente considerar la integral anterior en la forma siguiente:

$$I_1 = -\frac{1}{\pi}\,P\int_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{\pi}\int_C - i\ \mathrm{Res}\ [\ ]_{\kappa=-k} - i\ \mathrm{Res}\ [\ ]_{\kappa=+k}$$

donde el contorno C está indicado en la figura 1.

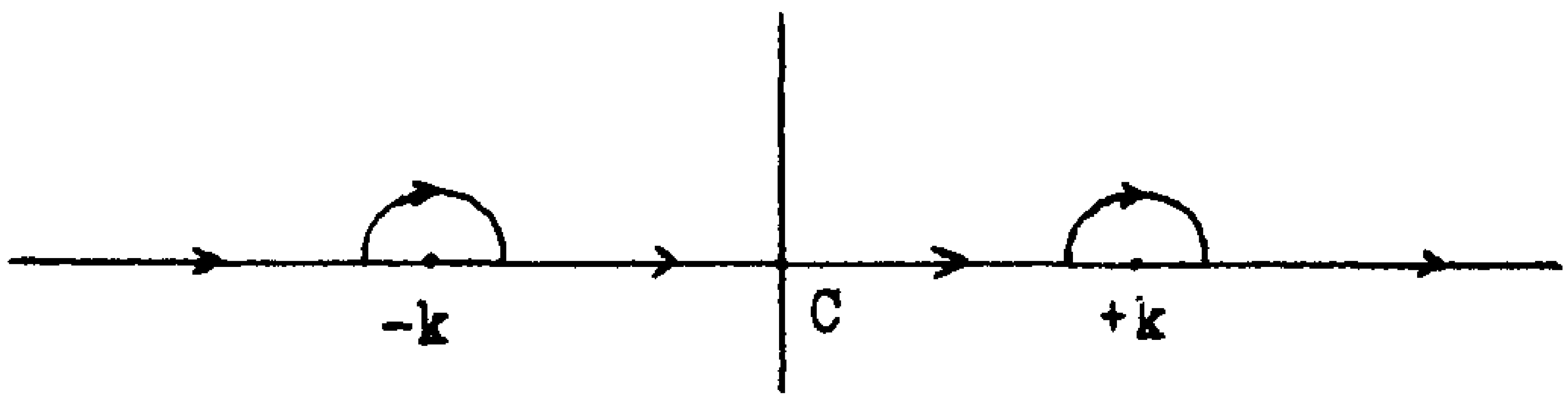

Fig. 1.

Calculando directamente los residuos, se obtiene finalmente

$$I_l = -\frac{1}{\pi}\int_C + \tfrac{1}{4}\{[1-S_l(-k)]h_l^-(kr) + [1-S_l(k)]\, h^+(kr)\} \times$$

$$\times \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ k^2 t) \quad ,$$

y substituyendo en la ecuación (a), se tiene

$$\Omega_l(r,k,t) = \tfrac{1}{2}\ [h_l^-(kr) + h_l^+(kr)]\ \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ k^2 t) - \frac{1}{\pi}\int_C =$$

$$= j_l(kr)\ \exp(-i\ E\ t) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_C \frac{au_l(\kappa a)}{\kappa^2 - k^2}\left\{ kaj_l'(ka) - j_l(ka)\ \frac{u_l'(\kappa,a)}{u_l(\kappa,a)}\right\} \times$$

$$\times\ h_l^+(\kappa r)\ \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ \kappa^2 t)\ \kappa^2\ d\kappa \quad , \qquad (28)$$

y puesto que[6]

$$h_l^{\pm}(\kappa r) = \frac{(\mp\ i)^l}{\pm\ i\kappa r}\ \exp(\pm\ i\kappa r) P_l[(\mp\ i\kappa r)^{-1}] =$$

$$= \frac{(\mp\ i)^l}{\pm\ i\kappa r}\ \exp(\pm\ i\kappa r)\ \sum_{p=0}^{l} \frac{c_p}{(\mp\ i\kappa r)^p} \quad ,$$

la integral queda

$$\int_C = (-i)^{l+1}\ \frac{a^2}{r} \sum_{p=0}^{l} \frac{c_p}{(-ir)^p} \int_C \frac{\phi_l(\kappa)}{\kappa^p}\ \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ \kappa^2 t) \times$$

$$\times\ \exp[i\kappa(r-a)]\ d\kappa \quad , \qquad (29)$$

donde la función $\phi_l(\kappa)$ está dada por

$$\phi_1(\kappa) = \kappa \exp(i\kappa a) \frac{u_1(\kappa,a)}{(\kappa+k)(\kappa-k)} \left[kj_1'(ka) - \frac{j_1(ka)}{R_1(\kappa^2)} \right] \quad . \qquad (30)$$

Se considera que los polos en $\pm k$ del integrando se pueden poner en $\kappa_1 = k-i\epsilon$, $\kappa_2 = -k-i\epsilon$, $\epsilon > 0$, tomando posteriormente el limite cuando $\epsilon \to 0$. La integral sobre el contorno C se convierte entonces en la integral de $-\infty$ a $+\infty$ y por el teorema de la convolución[7], se tiene

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa)G(\kappa)\exp(-i\kappa x)\,d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)f(x-\cdot)\,d\eta \quad , \qquad (31)$$

donde

$$F(\kappa) = \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ \kappa^2 t) \ ; \quad G(\kappa) = \frac{\phi_1(\kappa)}{\kappa^p} \ ; \qquad x = a-r \quad ,$$

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa)\exp(-i\eta\kappa)\,d\kappa \ ; \quad g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\kappa)\exp(-i\eta\kappa)\,d\kappa \quad .$$

La función $f(x-\eta)$ se puede evaluar inmediatamente:

$$f(x-\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ \kappa^2 t)\exp[-i(x-\eta)\kappa]\,d\kappa =$$

$$= \frac{\exp\left[i\ \frac{(x-\eta)^2}{2t}\right]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left[\kappa\sqrt{\frac{t}{2}} + \frac{(x-\eta)}{\sqrt{2t}}\right]^2\right\} d\kappa =$$

$$= \exp\left(-i\ \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{t}}\exp\left[i\ \frac{(x-\eta)^2}{2t}\right] \quad . \qquad (31a)$$

La función $g(\eta)$ es

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_1(\kappa)}{\kappa_p} \exp(-i\eta\kappa)\,d\kappa \quad . \qquad (31b)$$

Para evaluar la función $g(\eta)$ deben considerarse dos casos $\eta < 0$ y $\eta > 0$.

Por la propiedad 4 de la función $S_1(\kappa)$, la función $\phi_1(\kappa)$ está acotada en la parte superior del plano complejo y por tanto para $n > 0$, la integral se evalua cerrando el contorno por arriba; los únicos polos encerrados en esta forma son los polos de $S_1(\kappa)$ que estén sobre el eje imaginario, pero en la suposición de que no hay estados estacionarios, no hay polos en el eje imaginario y en consecuencia,

$$g(\eta) = 0 \qquad \text{si} \quad \eta > 0 \quad .$$

Por otra parte, la función $\phi_1(\kappa)$ para $\kappa \to \infty$, toma la forma

$$\phi_1(\kappa) \to \frac{i^{l+1}}{2a(\kappa+\kappa_1)(\kappa+\kappa_2)}\left[1+(-1)^{l+1}S_1(\kappa)\exp(i2\kappa a)\right]\left[kj_1'(ka) - \frac{j_1(ka)}{R_1(\kappa^2)}\right] ,$$

y por la propiedad 5 de la funcion $S_1(\kappa)$, se tiene que

$$\phi(\kappa) \xrightarrow[\kappa \to \infty]{} \frac{i^{l+1}}{a} \frac{1}{1-i\kappa R_1(\kappa^2)} \frac{1}{(\kappa+\kappa_1)(\kappa+\kappa_2)} \times$$

$$\times \left[kj_1'(ka) - \frac{j_1(ka)}{R_1(\kappa^2)} \right]$$

en consecuencia, para $\eta<0$, considerando que se tiene una sucesión de circunferencias que cierran el contorno y que no pasan por los polos de $S_1(\kappa)$, cuando el radio de esas circunferencias tiende a infinito, la integral sobre la circunferencia del integrando de (31b) tiende a cero, y entonces $g(\eta)$ se expresa, para $\eta < 0$, como

$$g(\eta) = \sqrt{2\pi} \quad i \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_\alpha}{\kappa_\alpha^p} \exp(-i\eta\kappa_\alpha) \quad ,$$

donde κ_α son los polos en κ_1 y κ_2 y los polos de la función $S_1(\kappa)$, y las constantes A_α son los residuos

$$A_\alpha = \text{Res } [\phi_1]_{\kappa=\kappa_\alpha} \quad .$$

Substituyendo los valores de $f(x-\eta)$ y de $g(\eta)$ en la ecuación (31), se tiene

$$I_2 = \sqrt{2\pi} \; i \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_\alpha}{\kappa_\alpha^p} \exp[i(x\kappa_\alpha - \tfrac{1}{2} \kappa_\alpha^2 t)] \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\left[i \; \frac{(\eta-x-t\kappa_\alpha)^2}{2t}\right] \exp(-i \; \frac{\pi}{4}) \; \frac{1}{\sqrt{t}} \, d\eta \quad ,$$

y entonces, usando la definición de la función $\chi(r,k,t)$ dada por Moshinsky[1], se tiene

$$I_2 = i\pi \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_\alpha}{\kappa_\alpha^p} \; \chi(r-a, \kappa_\alpha, t) \quad , \qquad (32)$$

y substituyendo (32) en (29), se tiene

$$\int_C = (-i)^{1+l} \; \frac{a^2}{r} \; i\pi \sum_{p=0}^{l} \left\{ \frac{c_p}{(-ir)^p} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_\alpha}{\kappa_\alpha^p} \chi(r-a, \kappa_\alpha, t) \right\} ;$$

y substituyendo este valor en la ecuación (28), se obtiene la forma explicita de la funcion de Green:

$$\Omega_1(r,k,t) = j_1(kr)\ \exp(-iEt)-(-i)^1 \frac{a^2}{r} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{1} \left\{ \frac{c_p}{(-ir)^p} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_\alpha}{\kappa_\alpha^p}\ \chi(r-a,\kappa_\alpha,t) \right\} =$$

$$= j_1(kr)\ \exp(-iEt) - \frac{a^2}{r} \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha\ \chi_1(r-a,\kappa_\alpha,t) \quad , \tag{33}$$

donde las funciones $\chi_1(r-a,\kappa_\alpha,t)$ están dadas por

$$\chi_1(r-a,\kappa_\alpha,t) = (-i)^1 \sum_{p=0}^{1} \frac{c_p}{(-ir)^p \kappa_\alpha^p}\ \chi(r-a,\kappa_\alpha,t) \quad , \tag{34}$$

y la forma explícita de la función $\chi(r,\kappa,t)$ en términos de funciones integrales de error es

$$\chi_1(r,\kappa,t) = \exp\ i[\kappa r - \tfrac{1}{2}\kappa^2 t]\ \mathrm{erfc}\ [\exp(-i\tfrac{\pi}{4})(2t)^{-\frac{1}{2}}(r-kt)] \tag{35}$$

donde la función $\mathrm{erfc}(z)$ está definida por

$$\mathrm{erfc}(z) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_z^{\infty} \exp(-z^2)\ dz \quad . \tag{36}$$

Ahora bien, cuando $r > 0$ y $t \to 0$, se tiene[1]

$$\chi(r,\kappa_\alpha,t) \to \exp\ (i\frac{r^2}{2t})\ \exp\ (\frac{i\pi}{4})\ \pi^{-\frac{1}{2}}\ r^{-1}(2t)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad ,$$

en consecuencia para $r > a$ y $t = 0$, la función de Green toma la forma

$$\Omega_1(r,k,0) = j_1(kr) \quad ,$$

que es la condición (22) que debe cumplirse.

Cuando $r > 0$ y $t \to \infty$, la función $X(r,\kappa_a,t)$ toma la forma asintótica siguiente:

$$X(r,\kappa_a,t) \to -\left(\frac{\pi\kappa_a^2 t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{ir^2}{2t}\right) \to 0 \;, \quad \frac{3\pi}{4} < \arg \kappa_a < \frac{7\pi}{4}$$

$$X(r,\kappa_a,t) \to 2 \exp(i\kappa_a r - i\,\tfrac{1}{2}\,\kappa_a^2 t) \;, \quad -\frac{\pi}{4} < \arg \kappa_a < \frac{3\pi}{4} \;.$$

Entonces la función $X(r,\kappa_a,t)$ tiende a cero cuando $t \to \infty$ y $r > a$, para todos los polos κ_a en la parte inferior del plano complejo, siendo diferente de cero sólo para el polo situado en la parte positiva del eje real, esto es, para el polo situado en el punto k. Para este polo, la función $X_1(r-a,k,t)$ toma la forma asintótica

$$X_1(r-a,\kappa,t) \xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ r>a}]{} 2 \exp(-ika)\; h_1^+(kr)\; \exp(-iEt) \;. \qquad (37)$$

Por otra parte, usando el hecho de que la expresión

$$ka^2 [h_1^-(ka) h_1^{+\prime}(ka) - h_1^+(ka) h_1^{-\prime}(ka)] = 2 \;,$$

como puede verse por el hecho que la expresión anterior es el Wronskiano y tiene un valor constante para todo valor del argumento, se tiene, substituyendo la ecuación (35) en la (33),

$$\Omega_1(r,k,t) \xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ r>a}]{} \tfrac{1}{2}\,[h_1^-(kr) + h_1^+(kr)]\, \exp(-iEt) -$$

$$- \tfrac{1}{2}\,[1-S_1(k)]\; h_1^+(kr)\, \exp(-iEt) \quad ,$$

y simplificando, se tiene, finalmente,

$$\Omega_1(r,k,t) \xrightarrow[\substack{t \to \infty \\ r > a}]{} \tfrac{1}{2}\,[h_1^-(kr) + S_1(k)\, h_1^+(kr)]\,\exp(-iEt) \;, \qquad (38)$$

que es el valor asintótico de la función de Green cuando $t \to \infty$ y $r > a$. Esta es la solución para el caso estacionario.

V. Conclusión.

En el presente trabajo se ha encontrado una solución al problema de describir el proceso dinámico de la dispersión de un paquete de onda incidente sobre un potencial de corto alcance, reduciendo el problema a encontrar una funcion de Green que permite expresar el desarrollo en el tiempo del paquete de ondas mediante la ecuación (17a). El procedimiento que se siguió consiste esencialmente en definir un tipo de transformada útil para el problema,y en aplicàr una serie de propiedades de la función $S_1(\kappa)$ de dispersión que se encontraron exclusivamente a partir del hecho de que la función $S_1(\kappa)$ se puede expresar en términos de la funcion $R_1(\kappa^2)$ de Wigner.

Debe notarse que las condiciones que sobre los polos de la función $S_1(\kappa)$, y sobre su comportamiento asintótico al infinito que permitieron dar la descripción del proceso dinámico que se investigó, y que provienen de su definición, posibilitan la descripcion causal del proceso, pues si los polos de la función $S_1(\kappa)$ tuvieron posibilidad de estar en la parte superior del plano complejo, las funciones - - --

$X(r-a,\kappa_*,t)$ que aparecen en la forma explícita de la función de Green $\Omega_l(r,k,t)$, serían divergentes cuando $t \to \infty$ y el proceso no se describiría causalmente.

La suposición que se hizo a lo largo de este trabajo acerca de que la función $S_l(\kappa)$ no tiene polos sobre el eje imaginario, y que equivale a afirmar que el potencial no tiene estados estacionarios, sólo se hizo por comodidad, ya que si se considera que existen tales estados estacionarios, sólo se modifica el resultado por la adición de unos términos que provienen de los residuos de la función $\phi_l(\kappa)$ definida en (30) en los polos de $S_l(\kappa)$ que están sobre el eje imaginario.

El autor agradece al Dr. Marcos Moshinsky su valiosa ayuda para la realización de este trabajo.

Apéndice.

Tomando el producto de $u_l(\kappa'',r)$ por la conjugada de la ecuación (5) para $\kappa = \kappa'$, el producto de $u_l^*(\kappa',r)$ por la ecuación (5) y restando se tiene

$$u_l^*(\kappa',r)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du_l(\kappa'',r)}{dr}\right) - u_l(\kappa'',r)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du_l^*(\kappa',r)}{dr}\right) =$$

$$= (\kappa'^2-\kappa''^2)\, u_l^*(\kappa',r)\, u_l(\kappa'',r),$$

integrando esta expresión entre 0 e ∞, se obtiene

$$(\kappa'^2-\kappa''^2)\int_0^\infty u_l^*(\kappa',r)u_l(\kappa'',r)\, r^2dr =$$

$$= \left[ru_l^*(\kappa',r)\,\frac{dru_l(\kappa'',r)}{dr} - ru_l(\kappa'',r)\,\frac{dru_l^*(\kappa',r)}{dr} \right]_{r\to\infty}, \quad \text{(a)}$$

por otra parte se sabe que

$$h_l^\pm(\kappa r) \xrightarrow[r\to\infty]{} (\mp\, i)^l\, \frac{\exp(\pm i\kappa r)}{\pm i\kappa r}$$

y de la ecuación (8) se obtienen las expresiones

$$ru_l(\kappa'',r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{2\kappa''}\left[i^{l+1}\exp(-i\kappa'' r) + S_l(\kappa'')(-i)^{l+1}\exp(i\kappa'' r)\right]$$

$$\frac{dru\ (\kappa'',r)}{dr} \xrightarrow[r\to\infty]{} \tfrac{1}{2}\left[i^l\exp(-i\kappa'' r) + (-i)^l\ S\ (\kappa'')\ \exp(i\kappa'' r)\right],$$

y substituyendo en la ecuación (a),

$$(\kappa'^2-\kappa''^2)\int_0^\infty u_l^*(\kappa',r)u_l(\kappa'',r)r^2dr = \frac{1}{4\kappa''\kappa'}\times$$

$$\times \lim_{r\to\infty}\{(-i)\exp[i(\kappa'-\kappa'')r](\kappa'+\kappa'') + iS_l^*(\kappa')S_l(\kappa'')\times$$

$$\times\exp[i(\kappa''-\kappa')r](\kappa'+\kappa'') + i(-1)^{l+1}(\kappa''-\kappa')S_l(\kappa'')\exp[i(\kappa'+\kappa'')r] -$$

$$-i(-1)^{l+1}(\kappa'-\kappa'')S_l^*(\kappa')\exp[i(\kappa'+\kappa'')r]\}$$

Pero $\lim_{r\to\infty}\exp(i\rho r) = i\pi\rho\delta(\rho)$,

y del inciso III,

$$S_l^*(\kappa')\; S_l(\kappa'')\,\delta(\kappa'-\kappa'') = S_l^*(\kappa'')S_l(\kappa'')\,\delta(\kappa'-\kappa'') = \delta(\kappa'-\kappa'')$$

$$S_l^*(\kappa')\;\delta(\kappa'+\kappa'') = S_l^*(-\kappa'')\;\delta(\kappa'+\kappa'') = S_l(\kappa'')\;\delta(\kappa'+\kappa'')\quad ,$$

por tanto

$$\int_0^\infty u_l^*(\kappa',r)\,u_l(\kappa'',r)\,r^2dr = \frac{\pi}{4\kappa'\kappa''}\Big[2\delta(\kappa'-\kappa'')+2(-1)^{l+1}S_l(\kappa'')\,\delta(\kappa'+\kappa'')\Big] =$$

$$= \frac{\pi}{4\kappa'\kappa''}\;\{[1+(-1)^{l+1}S_l(\kappa'')][\delta(\kappa'-\kappa'')+\delta(\kappa'+\kappa'')] \;+$$

$$+\;[1-(-1)^{l+1}S\;(\kappa'')][\delta(\kappa'-\kappa'')-\delta(\kappa'+\kappa'')]\;\}\qquad ,$$

pero

$$\frac{\delta(\kappa'+\kappa'')+\delta(\kappa'+\kappa'')}{2\kappa''} = \frac{\delta(\kappa'-\kappa'')-\delta(\kappa'+\kappa'')}{2\kappa'} \doteq \delta(\kappa'^2-\kappa''^2)$$

y

$$2\delta(x) = \delta\left(\frac{x}{2}\right)$$

En consecuencia,

$$\int_0^\infty u_l^*(\kappa',r)\,u_l(\kappa'',r)\,r^2dr = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1+(-1)^{l+1}S_l(\kappa')}{\kappa'} + \frac{1-(-1)^{l+1}S_l(\kappa'')}{\kappa''}\right]\times$$

$$\times\;\delta\left(\frac{\kappa'^2}{2}-\frac{\kappa''^2}{2}\right) = B(\kappa',\kappa'')\;\delta(\epsilon'-\epsilon'')\quad . \qquad (12)$$

REFERENCIAS.

1. M.Moshinsky, Phys.Rev. 84, 525 (1951)
   F.M.Medina, Rev. Mexicana Fis., II, 117 (1953).

2. Feshbach, Peaslee, Weisskopf, Phys.Rev. 71, 145 (1947).
3. E.P. Wigner, Ann.of Math. 53, 36, (1951).
4. E.L.Ince, Ordinary Differencial Equations, pag. 72, Dover Publications.
5. M.Moshinsky, comunicación privada.
6. J.A.Stratton, Electromagnetic Theory, pág. 406, McGraw-Hill Book Co. Inc. (1941).
7. I.N. Snedon, Fourier Transforms, pág. 23, McGraw-Hill Book Co. Inc. (1951).