PRINCIPIOS VARIACIONALES PARA EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS EN EL CAMPO CENTRAL DE BIRKHOFF.

Carlos Graef Fernández

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México.

(Recibido: Abril 15, 1953)

RESUMEN

En este artículo se demuestra que las trayectorias de los planetas en la teoría de la gravitación de Birkhoff son las extremales de un principio variacional. Existe un Lagrangiano para el movimiento de un planeta en torno del Sol. Se hace ver que ese Lagrangiano es muy aproximadamente igual al de la mecánica Newtoniana para el movimiento de los planetas reales en torno del Sol real.

Se demuestra también que las líneas de universo de los planetas en la teoría de Birkhoff son las extremales

de un principio variacional.

I. Ecuaciones diferenciales Birkhoffianas de las trayectorias de los planetas.

George D. Birkhoff[1] utiliza en su teoría de la gravitación los marcos de referencia inerciales de la teoría de la relatividad especial de Einstein. Cada uno de estos marcos consiste de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares x, y, z y de relojes que permiten asignar a los acontecimientos el tiempo t en que estos ocurren. Las coordenadas de un acontecimiento son entonces: (t, x, y, z).

El conjunto de todos los acontecimientos posibles es el espacio-tiempo de Minkowski. Nosotros usamos el segundo-luz para unidad de longitud, y el segundo para unidad de tiempo. Con estas unidades resulta el cuadrado del elemento de arco para el espacio-tiempo de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \; ; \qquad (1)$$

$$ds^2 = \Delta_{ij}\, dx^i dx^j \, . \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la expresión tensorial de la (1); habiéndose hecho las identificaciones:

$$t = x^1 \; , \quad x = x^2 \; , \quad y = x^3 \; , \quad z = x^4 \; .$$

El tensor Δ_{ij} es el tensor métrico fundamental[2] del espacio-tiempo de Minkowski. Sus componentes son:

$$\Delta_{11} = 1 \; ; \quad \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1 \quad ;$$

$$\Delta_{ij} = 0 \qquad \text{para} \quad i \neq j \quad .$$

El campo central gravitacional lo genera un punto masa, de masa M, colocado en el origen 0 del sistema de coordenadas de un marco de referencia inercial. A este punto masa lo llamamos "Sol". Designamos con r a la distancia de un punto de coordenadas x, y, z al Sol.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}. \quad (3)$$

El campo central generado por el Sol se describe por medio del tensor[3]:

$$h_{ij} = \frac{M}{r}\,\delta_{ij} \quad . \qquad (4)$$

Aquí δ_{ij} es la delta de Kronecker. Las unidades de masa se eligen de manera que la constante gravitacional G sea igual a uno.

Llamamos "planeta" a una partícula exploradora del campo gravitacional del Sol. En la teoría de Birkhoff, las ecuaciones diferenciales de las líneas de universo de las partículas exploradoras de un campo descrito por el tensor h_{ij} son:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \Delta^{im}\left(\frac{\partial h_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^m}\right)\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} \quad . \qquad (5)$$

Aquí Δ^{im} es el tensor doblemente contravariante aso ciado al covariante fundamental Δ_{ij} del espacio-tiempo de Minkowski. Las componentes correspondientes de estos dos tensores son numéricamente iguales.

$$\Delta^{im} = \Delta_{im} \quad . \tag{6}$$

[La ecuación (6) no es tensorial].

Para el campo del Sol (4), las ecuaciones (5) se convierten[4] en:

$$t'' = -\frac{Mr't'}{r^2} \quad ,$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\frac{Mx}{r^3} - \frac{2Mx}{r^3}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) + \frac{Mr'x'}{r^2} \quad , \\ y'' &= -\frac{My}{r^3} - \frac{2My}{r^3}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) + \frac{Mr'y'}{r^2} \quad , \\ z'' &= -\frac{Mz}{r^3} - \frac{2Mz}{r^3}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) + \frac{Mr'z'}{r^2} \quad . \end{aligned}\right. \tag{7}$$

En las ecuaciones (7) el acento denota a la derivada con respecto a la longitud de arco s en el espacio-tiempo.

Abandonamos ahora al espacio-tiempo (t, x, y, z) para fijar la atención en el espacio físico (x, y, z). Un planeta describe en el espacio físico una "trayectoria". Las ecuaciones diferenciales de las trayectorias de los planetas se obtienen eliminando de las tres últimas de las ecuaciones (7) el parámetro s, e introduciendo al tiempo t como nuevo parámetro. De la ecuación (1) se obtiene:

$$ds = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \; .$$

Si introducimos la velocidad v del planeta en su trayectoria, podemos escribir:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad ;$$

$$ds = \sqrt{1 - v^2} \quad dt \quad .$$

Esta relación nos permite transformar derivadas con respecto a s en derivadas con respecto a t. La relación operacional es:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{d}{dt} \quad . \tag{8}$$

Designamos con un punto escrito sobre el símbolo de la función a su derivada con respecto al tiempo. Al eliminar el tiempo de las tres últimas de las ecuaciones (7) se obtiene[5]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{M}{r^3} \left[-x - xv^2 + 2\,\dot{x}\, r\, \dot{r}\right] \quad , \\ \ddot{y} &= \frac{M}{r^3} \left[-y - yv^2 + 2\,\dot{y}\, r\, \dot{r}\right] \quad , \\ \ddot{z} &= \frac{M}{r^3} \left[-z - zv^2 + 2\,\dot{z}\, r\, \dot{r}\right] \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Salvo un error de imprenta, las ecuaciones (9) se reducen a las ecuaciones (15) del articulo del autor "Principios de Conservacion en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff" publicado en los Nos. 1-4 del Volumen V del Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (Enero a Octubre de 1948). Para efectuar esta reducción basta escribir

$$z = 0 \quad ; \quad \dot{z} = 0 \quad ; \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad ;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad .$$

II. Las trayectorias de los planetas en la teoría de Birkhoff como extremales de un principio variacional.

Las ecuaciones (9) se pueden obtener de un principio variacional. Esto significa que las trayectorias de los planetas en la teoría de la gravitación de Birkhoff son las extremales de un principio del cálculo de variaciones. Este principio tiene la siguiente expresión:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \, e^{2M/r} \, (1 + v^2) \, dt = 0 \tag{10}$$

Aquí m es la masa del planeta.

La ecuación (10) puede expresarse de un modo equivalente afirmando que el movimiento de los planetas en la teoría de Birkhoff admite el Lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2} \, e^{2M/r} \, (1 + v^2) \quad . \tag{11}$$

A continuación obtenemos una de las tres ecuaciones diferenciales de Euler que se deducen del principio (10). Elegimos la que se refiere a la coordenada x.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = me^{2M/r}\,\dot{x} \quad ;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = me^{2M/r}\left[\ddot{x} - \frac{2M\dot{r}\dot{x}}{r^2}\right] \quad ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -me^{2M/r}\left[\frac{Mx}{r^3}(1 + v^2)\right] \quad ;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 = me^{2M/r}\left[\ddot{x} - \frac{M}{r^3}\left\{- x - xv^2 + 2\dot{x}r\dot{r}\right\}\right]$$

Se ve que la ecuación de Euler correspondiente a la coordenada x, y obtenida del Lagrangiano (11), es equivalente a la primera de las ecuaciones (9). De un modo semejante se demuestra que las ecuaciones de Euler para las coordenadas y y z obtenidas del Lagrangiano (11), son rigurosamente equivalentes a las dos últimas de las ecuaciones diferenciales (9). Hemos demostrado entonces que las trayectorias de los planetas en la teoría de la gravitación de Birkhoff son las extremales del principio variacional (10). Esto es equivalente a haber demostrado que el movimiento de los planetas en la teoría de Birkhoff admite el Lagrangiano (11).

III. Aproximación Newtoniana.

En seguida haremos ver que el Lagrangiano (11) de la teoría de Birkhoff es muy aproximadamente igual al Lagrangiano de la Mecánica de Newton para el Sol real y los planetas reales. En las unidades que estamos usando, la masa del Sol real es igual a 0.0005. La distancia mínima a la que se puede acercar un planeta real al Sol real es igual al radio del Sol, que en segundos-luz es de 2.3. Para el movimiento de un planeta en el campo del Sol real:

$$\frac{2M}{r} < 0.0005 \ .$$

En el Lagrangiano (11) podemos substituir la exponencial $e^{2M/r}$ por su desarrollo en serie. Despreciando los términos de orden superior al primero, se obtiene:

$$L \doteq \frac{m}{2} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \left(1 + v^2\right) \quad . \tag{12}$$

Las velocidades de todos los planetas reales son inferiores a 60 Km/seg., o expresado en nuestras unidades, son inferiores a 0.0002 segundos-luz por segundo. En el Lagrangiano L podemos despreciar los diezmillonésimos ante cantidades del orden de diezmilésimos. Así obtenemos:

$$L \doteq \frac{m}{2} \left[1 + \frac{2M}{r} + v^2 \right] \quad ;$$

$$L = \frac{m}{2} + \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{Mm}{r} \quad . \tag{13}$$

El Lagrangiano aproximado (13) de la teoría de Birkhoff es idéntico -salvo la constante no esencial $\frac{m}{2}$- al Lagrangiano de la mecánica de Newton para el movimiento de los planetas reales en torno del Sol real.

El Lagrangiano aproximado (12) puede usarse para el movimiento de cualquier partícula exploradora en el campo del Sol real, pues no se ha hecho ninguna hipótesis sobre la velocidad de la misma.

IV. Las líneas de universo de los planetas en la teoría de Birkhoff como extremales de un principio variacional.

Alberto Barajas[8] demostró que las líneas de universo de las partículas exploradoras de un campo gravitacional de Birkhoff no son las geodésicas de ningún espacio-tiempo curvo de cuatro dimensiones. El teorema de Barajas se puede complementar en el caso particular del campo central, demostrando que las líneas de universo de los planetas son las extremales de un principio variacional. Estas líneas de universo son extremales, pero no geodésicas. Para pasar de las trayectorias a las líneas de universo basta considerar como funciones por determinarse a t, x, y, z y como variable de integración a la longitud de arco s. El principio variacional (10) sigue siendo válido, pero hay que tener en cuenta que el elemento de arco ds no es independiente de las diferenciales de las coordenadas del espacio-tiempo dt, dx, dy, dz. El elemento de arco ds y esas diferenciales están ligadas por la ecuación (1). Dividiendo ambos miembros de esa relación entre ds^2 se obtiene una ecuación que liga a las derivadas de las coordenadas con respecto a s:

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1 . \qquad (14)$$

Introduciendo en el principio variacional (10) la variable de integración s, podemos escribir:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'} \quad ;$$

$$dt = t'\ ds \quad ;$$

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \frac{m}{2}\, e^{2M/r} \left[1 + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} \right] t' ds = 0. \quad (15)$$

El principio variacional (10) es equivalente al principio variacional (15) con la condicion auxiliar (14).

Transformando con el método del multiplicador de Lagrange el principio (15) con su condición auxiliar (14), se obtiene:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{m}{2}\, e^{2M/r} \left[1 + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} \right] t' \right.$$
$$\left. + \lambda\, [t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 - 1] \right\} ds = 0 \quad . \qquad (16)$$

En el principio variacional (16) λ es una función de s que hay que elegir de manera que se satisfaga la condición auxiliar (14).

Obtengamos la ecuación de Euler correspondiente a x, del principio variacional (16):

$$me^{2M/r} \left[\frac{t'x''-x't''}{t'^2} + \frac{M}{r^3} \left\{ x\, \frac{t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'} - \frac{2rr'x'}{t'} \right\} \right] =$$

$$= 2\lambda x'' + 2\lambda' x' \qquad (17)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\ddot{x} = \frac{t'x'' - x't''}{t'^3} \quad ; \qquad v^2 = \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{t'^2} \quad ;$$

$$\dot{x} = \frac{x'}{t'} \quad ; \qquad \dot{y} = \frac{y'}{t'} \quad ; \qquad \dot{z} = \frac{z'}{t'} \quad ;$$

la ecuación (17) se puede escribir como sigue:

$$me^{2M/r}\, t'\left[\ddot{x} - \frac{M}{r^3}\left\{- x - xv^2 + 2\dot{x}r\dot{r}\right\}\right] = 2\lambda x'' + 2\lambda' x' \ . \qquad (18)$$

Comparando la ecuación (18) con la primera de las ecuaciones (9), se ve que en este caso

$$\lambda = \lambda' = 0 \ .$$

Obtengamos ahora la ecuación de Euler correspondiente a t, del principio variacional (16):

$$-\frac{m}{2}\frac{d}{ds}\left\{e^{2M/r}\left[1 - \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{t'^2}\right]\right\} = 2\lambda t'' + 2\lambda' t' \ . \qquad (19)$$

El primer miembro de la ecuación (19) es la derivada con respecto a s de:

$$-\frac{m}{2}\, e^{2M/r}\,(1 - v^2) \ . \qquad (20)$$

El autor demostró que en el movimiento de los planetas en la teoría de Birkhoff, se conserva la expresión

$$E = -\frac{M}{r} + \tfrac{1}{2}\, M \ln \frac{1}{1 - v^2} \ . \qquad (21)$$

Comparando la expresión (20) con la (21) se obtiene:

$$-\frac{m}{2}\, e^{2M/r}\,(1 - v^2) = -\frac{m}{2}\, e^{-2E} \quad . \tag{22}$$

Como el segundo miembro de la ecuación (22) es constante, se tine:

$$-\frac{m}{2}\,\frac{d}{ds}\left\{ e^{2M/r}\,(1 - v^2) \right\} = 0 \quad . \tag{23}$$

Comparando la ecuación (23) con la (9) se obtiene una vez más:

$$\lambda = \lambda' = 0 \quad .$$

Hemos demostrado entonces que las lineas de universo de los planetas en el campo central de Birkhoff son las extremales del principio variacional (16). Si no se utiliza la relación

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1$$

para alterar la forma del integrando en (16), λ tiene que elegirse igual a cero.

Para las lineas de universo de las particulas exploradoras del campo central de Birkhoff vale el principio variacional:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \frac{m}{2}\, e^{2M/r} \left[t' + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'} \right] ds = 0 \ ; \tag{24}$$

siempre y cuando no se utilice la relación entre t', x', y'

y z' para alterar la forma del integrando.

REFERENCIAS.

1. G.D.Birkhoff. Bol. Soc. Mat. Mexicana 1, 4,5, p.10, 1944
2. C.Graef Fernández. Revista Mexicana de Física 1, 1, p.12 1952.
3. C.Graef Fernández. Revista Mexicana de Física 1, 1, p.16 1952.
4. G.D.Birkhoff. Bol.Soc.Mat. Mexicana 1, 4,5, p.18, 1944.
5. C.Graef Fernández. Bol.Soc.Mat. Mexicana V, 1,2,3,4, p.12 1948.
6. A.Barajas. *Proceedings* of the National Academy of Sciences of the United States of America 30, 3, pp. 54-57 1944.