RELACIONES ENTRE LA MATRIZ R Y LA MATRIZ S

N.G. van Kampen

Institute for Advanced Study, Princeton, N.J.

(Recibido: Mayo 23, 1953)

RESUMEN

Se demuestra que las propiedades analíticas que Wigner encuentra para la matriz R son equivalentes a las propiedades de la matriz S que se pueden deducir de una condición de causalidad.

I. Introducción.

La presente nota trata el problema de dispersión elástica de partículas no relativistas por un centro dispersor fijo. Se considera un centro dispersor de tamaño finito que puede encerrarse dentro de una esfera de radio a. Por razones de simplicidad supondremos que el centro dispersor tiene simetría esférica y tomaremos en consideración solo las ondas S. La dispersión queda entonces completamente descrita ya sea por la "matriz S" (que en este caso se reduce a una función de p), o por la "matriz R", que esta relacionada con S por:

$$e^{2iap} S(p) = \frac{1+ip\ R(p^2)}{1-ip\ R(p^2)} \quad . \tag{1}$$

donde p es la magnitud del momento de la partícula incidente y p^2 es su energía, tomándose la masa igual a $\frac{1}{2}$.

Wigner[1] ha demostrado que si la interacción dentro del centro dispersor puede representarse por un operador auto-adjunto, la función $R(w)$ tiene las siguientes características:

(a) $R(w)$ es una función meromorfa de $w = u+iv$.

(b) $R(u)$ es real.

(c) Todos los polos de R estan sobre el eje real.

(d) La parte imaginaria de R es positiva en la parte superior del semi-plano y negativa en la parte inferior del semi-plano.

De acuerdo con un teorema de Herglotz[2] se concluye por un análisis muy general, que el siguiente desarrollo es válido:

$$R(w) = \alpha w + \beta + \Sigma \left\{ \frac{\gamma_n^2}{u_n - w} - \frac{\gamma_n^2}{u_n} \right\} \quad , \tag{2}$$

donde las constantes $\alpha, \beta, \gamma_n, u_n$ son reales y $\alpha \geqslant 0$. Los polos u_n pueden tender a ∞ en ambas direcciones del eje real, pero no pueden acumularse en ningún punto real.

Wigner y Eisenbund[3] mostraron que en realidad:

$$R(w) = \Sigma \frac{\gamma_n^2}{u_n - w} \quad , \tag{3}$$

lo que significa que agregamos una propiedad mas:

(e) La suma $\Sigma(\gamma_n^2/u_n)$ converge y es igual a β, y $\alpha = 0$

La pregunta que nos hacemos se refiere a las característica de S que corresponden a las propiedades (a) - (e) de R. De la relación (1) y de (a) y (b) se concluye que:

(a') $S(z)$ es una función meroforfa de $z = x+iy$.

(b') Sobre el eje real se tiene:

$$S(x)^{-1} = S(x)^* = S(-x) \quad . \tag{4}$$

Schützer y Tiomno[4] han mostrado que (d) implica:

(c') Los polos de S estan sobre la parte positiva del eje imaginario o en la parte inferior del semi-plano.

En un trabajo reciente[5] Wigner dedujo algunas propiedades de S de (a) - (d), pero ellas no fueron suficientes para obtener en forma inversa las propiedades de R. Por otro lado, se ha mostrado[6] que la llamada condición de causalidad implica las siguientes propiedades adicionales sobre S.

(d') En el primer cuadrante del plano z,

$$\text{Img } e^{2ias} S(z) \leqslant 1 \tag{5}$$

(e') $e^{2iaz} S(z)$ esta acotado en $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$.

Se ha mostrado tambien que (a') - (e') son condiciones suficientes para obtener (a) - (d). En el presente trabajo vamos a demostrar en primer lugar que (a') - (e') implican también (e), y posteriormente mostraremos que (a) - (e) implican (d') y (e'). El resultado final puede formularse en el siguiente teorema: Las propiedades (a) - (e) de R son equivalentes a las propiedades (a') - (e') de S. Se puede verificar fácilmente que las propiedades que Wigner deduce para la S están contenidas en (a') - (e').

II. (a') - (e') implican (e).

Con la abreviación $e^{2ias} S(z) = S_a(z)$, (1) nos da:

$$R(z^2) = \frac{1}{iz} \frac{S_a(z) - 1}{S_a(z) + 1} \quad . \tag{6}$$

Se concluye que $R(w)$ sobre el eje imaginario tiende a cero como:

$$R(iv) = 0(v^{-\frac{1}{2}}) \quad , \tag{7}$$

a menos que $S_a(re^{\pi i/4})$ tienda a -1 cuando $r \to \infty$. Para excluir esta posibilidad supondremos que a se toma ligeramente mayor que el radio de la esfera mas pequeña en la que el centro dispersor pueda encerrarse. Sabemos entonces que existe una pequeña ϵ tal que $e^{2i(a-\epsilon)s} S(z) = e^{-2i\epsilon s} S_a(z)$ esta acotada, y por lo tanto que con seguridad $S_a(re^{\pi i/4}) \to 0$. Por lo tanto para una a elegida en esa forma la validez de (7) está garantizada.

Ahora consideremos la parte imaginaria de $R(iv)$ dada por (2):

$$\text{Img } R(iv) = \alpha v + v\Sigma \frac{\gamma_n^2}{u_n^2 + v^2} .$$

Claramente Img $R(iv)/v \to \alpha$ si $v \to \infty$, de manera que de (7) se concluye que $\alpha = 0$. Tenemos además que[7]:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Img } R(iv)}{v} dv > \int_0^\infty \sum_{-N}^{+M} \frac{\gamma_n^2}{u_n^2+v^2} dv = \frac{\pi}{2} \sum_{-N}^{+M} \frac{\gamma_n^2}{|u_n|} .$$

Como la parte izquierda converge debido a (7), la suma de la parte derecha esta acotada cuando M y N tienden a ∞. Uno puede escribir por lo tanto:

$$R(w) = \left[\beta - \Sigma \frac{\gamma_n^2}{u_n} \right] + \Sigma \frac{\gamma_n^2}{u_n - w} ;$$

ya que tanto la parte izquierda como el último término de la parte derecha tienden a 0 cuando $w \to i\infty$; el término constante en el paréntesis cuadrado debe ser por tanto 0 y (3) queda demostrado.

Para esta demostración se supuso que $R(w)$ esta definida en función de un valor a que es ligeramente mayor que el valor mínimo para el que (5) se cumple. Se puede ver que esta suposición es inevitable con ayuda del ejemplo:

$$S(z) = \frac{i - z}{i + z} .$$

Esta S satisface (a') - (e') con $a = 0$. Sin embargo si uno define R con ayuda de (6) en donde $a = 0$, se obtiene que R es igual a 1; esta R satisface (a) - (d) y es de la forma

(2), pero no se puede escribir en la forma (3).

III. (a) - (e) implican (d')

Primero suponemos que R esta dada por (3) con un número finito de términos. En ese caso tanto R como S_a son funciones racionales y como $R(z^2) = 0(z^{-2})$ obtenemos:

$$\lim S_a(z) = 1 \qquad \text{para } |z| \to \infty$$

De (4) vemos que:

$$S_a(-z^*) = S_a(z)^* \quad ,$$

y que por lo tanto $S_a(z)$ es real sobre el eje imaginario. De aquí que Img S_a se haga 0 sobre el eje imaginario y en el infinito, y que satisfaga (5) sobre el eje real; como es una función harmónica en el primer cuadrante su máximo debe estar en la frontera, de manera que (5) se satisface en todo el cuadrante. Para hacer esta demostración rigurosa, debemos discutir con más cuidado lo que pasa en la vecindad de los polos sobre el eje imaginario. Estos polos son los puntos iy para los cuales:

$$yR(-y^2) + 1 = 0 \quad , \qquad y > 0 \quad .$$

Se sigue de (d) y más obviamente de (3) que $R'(u) > 0$ y que por tanto en cada uno de esos puntos:

$$\frac{d}{dy}\{\, yR(-y^2) + 1 \,\} = R(-y^2) + y\,\frac{d}{dy}R(-y^2)$$

$$= -\frac{1}{y} - 2y^2\,\frac{d}{du}R(u) \qquad ,$$

es negativo. En consecuencia el residuo de $S_a(z)$ en cada polo $i\kappa_n$ es $-ic_n$ con $c_n > 0$:

$$S_a(z) = \frac{-ic_n}{z - i\kappa_n} + g(z) \quad , \tag{8}$$

donde $g(z)$ es regular en la vecindad y también real sobre el eje imaginario. Esto muestra que es posible dibujar un pequeño semi-circulo en el primer cuadrante alrededor del polo, en el que $\mathrm{Img}\; S_a(z) \leqslant 0$. Por lo tanto el uso del principio del modulo máximo estaba justificado.

Consideremos ahora una R dada por (3) con un número infinito de términos. Podemos formar primero un R mutilada tomando los primeros N términos de la serie y la demostración anterior muestra que (5) es válida para la correspondiente S mutilada. Si ahora $N \to \infty$ es claro que (5) debe seguir siendo válida para la S límite.

IV. (a) - (e) implican (e')

Estableceremos primero la estimación preliminar:

$$S_a(z) = o(|z|^2) \quad \text{si} \quad |z| \to \infty\ , \quad 0 \leqslant \mathrm{Arg}\ z \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta \ . \tag{9}$$

De acuerdo con el teorema de Herglotz[2] se puede expresar los valores de la función $1-S_a(z)$ por medio de una integral de Poisson-Stieltjes, tomada alrededor de la frontera del primer cuadrante. Esto nos da:

$$1-S_a(z) = \alpha' z^2 + \beta' + \Sigma \left\{ \frac{\gamma_n'^2}{u_n'-z^2} - \frac{\gamma_n'^2}{u_n'} \right\} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1+\xi^2 z^2}{\xi^2 - z^2} \frac{1-\mathrm{Img}\ S_a(\xi)}{1+\xi^4} \xi \, d\xi \quad . \qquad (10)$$

Esta ecuación es el análogo de (2), pero la integral ahora aparece también en el miembro derecho, debido al hecho que $S_a(z)$ no es real sobre el eje real positivo. Como no hay polos para z real, todas las u_n' son negativas, de la forma $u_n' = -\kappa_n^2 (\kappa_n > 0)$. Comparando con (8) obtenemos $\gamma_n'^2 = +2\kappa_n c_n$. Después de algunos cálculos (10) se convierte en:

$$\frac{S_a(z) - S_a(o)}{z} + 2z\, \Sigma \frac{c_n}{\kappa_n(\kappa_n^2+z^2)} = -\alpha' z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Img}\ S_a(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi \; .$$

La parte derecha es una función que es regular en toda la parte superior del semi-plano y de orden $|z|$ cuando $|z| \to \infty$. El miembro izquierdo sobre el eje real es de orden menor que $|x|$. De acuerdo con el teorema de Phragmén y Lindelöf debe ser por lo tanto de orden menor que $|z|$ en toda la parte superior del plano complejo. De aquí se obtiene la relación (9) ya que la suma en el segundo término del miembro izquierdo tiende a 0 si z tiende a ∞ en el ángulo entre 0 y

$\frac{\pi}{2} - \delta$. También se concluye que $\alpha' = 0$.

Tomemos ahora la función:

$$S_b(z) = e^{2ibz} S(z) = e^{2i(b-a)z} S_a(z)$$

con $b \geqslant a$. La funcion $S_b(z)$ satisface (a') - (c'), de manera que $\operatorname{Img} S_b(z) \leqslant 1$ en la frontera del primer cuadrante. Además en el primer cuadrante no es mayor en valor absoluto que $S_a(z)$, de manera que:

$$S_b(z) = o(|z|^2) \quad , \qquad 0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta \; .$$

Por lo tanto podemos aplicar el teorema de Phragmén-Lindelöf a la función:

$$F(z) = \exp i\, S_b(z) \quad ,$$

con el resultado que $|F(z)| \leqslant e$ y por tanto que:

$$\operatorname{Img} S_b(z) \leqslant 1 \tag{11}$$

en todo el cuadrante.

Podemos ahora encontrar una cota para $|S_a(z)|$ de (11) escogiendo un valor apropiado para b. Para una z fija sea:

$$S_a(z) = |S_a|\, e^{i\Phi} \quad ,$$

y entonces (11) toma la forma:

$$e^{-2(b-a)y}|S_a| \operatorname{sen} \{2(b-a)x + \Phi\} \leqslant 1 \; . \tag{12}$$

Es posible escoger una $b \geqslant a$ tal que:

$$\operatorname{sen}\{2(b-a)x + \Phi\} = 1 \ , \qquad b-a < \pi/x \ .$$

Con este valor de b (12) toma forma:

$$|S_a(z)| \leqslant e^{2\pi(y/x)} \qquad ,$$

lo cual demuestra la condición (e').

APENDICE.

Wigner y Eisenbud[3] introducen un conjunto de soluciones $X_\lambda(r)$ de la ecuación de Schrödinger, que satisfacen $X_\lambda'(a) = 0$, y desarrollan una función arbitraria $\varphi(r)$ en la forma:

$$\varphi(r) = \Sigma\, A_\lambda\, X_\lambda(r) \quad . \qquad (o \leqslant r < a)$$

Para la demostración de (3) es esencial que este desarrollo sea también válido para $r = a$, lo que no es obvio. Sin embargo, se puede demostrar con facilidad en el caso que la interacción está dada por un potencial $V(r)$. Si $V \equiv 0$ la validez del desarrollo es demostrable a partir de la teoría de las series de Fourier, y es bien conocido que la presencia de un potencial no tiene influencia sobre la convergencia. De necho, en el caso de un potencial, (3) se puede demostrar más directamente usando las expresiones asintóticas[9]:

$$\varphi(p,r) \simeq \operatorname{sen} pr/p \quad , \qquad \varphi'(p,r) \simeq \cos pr \quad ,$$

para $p \to i\infty$, que dan

$$R(p^2) \simeq \tan pa/p = O\left(\frac{1}{p}\right) \quad ;$$

el análisis de la sección II muestra que esta relación implica (3)*.

* Véase la bibliografía al final del artículo siguiente.