

REACCIONES NUCLEARES ENTRE PARTICULAS CON CARGA*

Marcos Moshinsky

Institutos de Física y de Geofísica, Universidad de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Agosto 18, 1953)

RESUMEN

In the present paper we generalize to charged particles, the formalism for the description of resonance reactions in Fock space, that the author developed previously for particles without coulomb interaction. In particular we show that the distribution of poles of the S matrix for the reaction, is not affected by the presence of the long range electrostatic interaction. For low energies the phase shifts can be expressed in terms of the scattering length and effective range, as in

*Trabajo presentado en el III Congreso Nacional de Matemáticas San Luis Potosí, S.L.P., Junio 1953.

the analysis of Bethe and Teichmann. The effect of the coulomb barrier on the width of the resonance levels is also discussed.

I.- INTRODUCCION.

En el presente trabajo se tratará de generalizar la teoría de reacciones nucleares propuesta por el autor¹ para partículas sin carga (reacciones entre neutrones y nucleos), a las interacciones entre partículas con carga, en las cuales existe una repulsión electrostática sobrepuesta a la interacción propiamente nuclear.

En el caso de partículas sin carga, se supuso que la interacción tenía lugar a través de un proceso de formación de un núcleo compuesto, y la función de onda que representaba al estado era una función de Fock^{1,2,3} cuyas componentes representaban las diferentes etapas de la reacción, v.gr. las dos partículas iniciales, el núcleo compuesto, etc. Las ecuaciones dinámicas de interacción para el proceso se obtuvieron del concepto de conservación de probabilidad aplicado a las funciones de Fock.

Para el caso de interacciones nucleares entre partículas con carga, se mantendrá el mismo formalismo indicado en el párrafo anterior, con la diferencia de que en los estados en que tenemos las dos partículas iniciales o las partículas provenientes de la desintegración del núcleo compuesto, se tiene una interacción coulombiana entre las partículas. De aquí que las funciones de onda en las etapas en que hay pares de partículas, estarán dadas en términos de las funciones de onda asociadas a potenciales coulombianos, y no en términos de las

funciones de onda asociadas con partículas libres como sucede en el caso de partículas sin carga.

En este trabajo desarrollaremos primero los procesos de dispersión de resonancia entre partículas con carga, tanto para el caso uninivelar como para el multinivelar. Obtendremos explícitamente la función S para estos casos y veremos que a pesar de la interacción electrostática de largo alcance, la función S obedece las mismas restricciones que la función S para dispersión de partículas sin carga, en lo que respecta a la posición de los polos de dicha función S . Posteriormente, analizamos el caso en donde hay varios canales, esto es, el caso de reacciones de resonancia entre partículas con carga, y obtendremos la matriz S asociada al problema y de allí las secciones de dispersión y reacción. Discutiremos en particular, el caso en que hay dos canales, uno en que además del núcleo blanco tenemos un neutrón, y el otro en que las dos partículas del canal tienen carga. Este caso sencillo va a mostrar el efecto que la barrera de potencial coulombiano tiene sobre la anchura del nivel de resonancia. Como el análisis desarrollado en este trabajo restringe las interacciones nucleares al punto de coincidencia de las dos partículas^{1,3} se tiene que el efecto propiamente nuclear en las dispersiones y reacciones se producen sólo para estados de momento angular orbital relativo cero. Es posible sin embargo, generalizar el análisis a casos de momento angular relativo distinto de 0, y mostrar que las propiedades esenciales de la matriz S discutidas en este trabajo continúan siendo válidas en estos casos.

II.- DISPERSION DE RESONANCIA PARA PARTICULAS CON CARGA.

Empezaremos por discutir el caso de dispersión de resonancia uninivelar, en el que de acuerdo con el análisis de un artículo anterior¹ la función de Fock tiene dos etapas, la primera en que tenemos las dos partículas originales, y la segunda en que tenemos el núcleo compuesto. Escogiendo el sistema del centro de masa, esta función de Fock tiene la forma:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1(\bar{r}, t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde \bar{r} es el vector de posición relativa entre las dos partículas de la primera etapa, y la función de onda de la segunda etapa solo depende del tiempo, ya que representa una partícula en reposo en el sistema del centro de masa.

Como las dos partículas en la primera etapa tienen cargas que indicaremos por Ze y ze , y como la interacción propiamente nuclear va a tener lugar solo en el punto $\bar{r} = 0$ de coincidencia de las dos partículas, vemos que para $\bar{r} \neq 0$, ψ_1 satisface la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi_1 + \frac{Zze^2}{r} \psi_1, \quad \bar{r} \neq 0, \quad (2)$$

donde μ es la masa reducida para las dos partículas en la primera etapa. De (2) se ve que la función de onda en la primera etapa tendrá que expresarse en términos de las funciones confluentes hipergeométricas^{4,5} que resuelven el problema de interacción coulombiano, y que tanto la solución regular como

la irregular del problema coulombiano aparecerán en el análisis ya que el punto $\vec{r} = 0$ está excluido en (2).

Como en el caso de partículas sin carga¹, el producto escalar de dos funciones de Fock Ψ y Ψ' está definido por:

$$(\Psi, \Psi') = \int \psi_1^*(\vec{r}, t) \psi_1'(\vec{r}, t) d\vec{r} + \psi_2^*(t) \psi_2'(t) \quad , \quad (3)$$

y las ecuaciones de interacción se van a obtener del hecho que el producto escalar de dos funciones de Fock, ambas soluciones del problema dinámico, es independiente del tiempo, esto es que:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} (\Psi, \Psi') \equiv & \left[\frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \left(\frac{\partial r \psi_1}{\partial r} \right)^* (r \psi_1') - (r \psi_1)^* \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \left(\frac{\partial r \psi_1'}{\partial r} \right) \right]_{r=0} \\ & + \psi_2^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2'}{\partial t} \right) - \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)^* \psi_2' = 0 \quad . \quad (4) \end{aligned}$$

Para obtener la relación (4) se procedió en forma similar al caso de partículas sin carga¹. Se rodeó el punto $r = 0$ por una esfera cuyo radio $a \rightarrow 0$ y en la región exterior a esa esfera se hizo uso de la ecuación (2). Finalmente, como la interacción propiamente nuclear es puntual, solo nos interesa considerar¹ funciones de onda ψ_1 que correspondan a momento angular relativo cero, esto es, ψ_1 es función de $|\vec{r}| \equiv r$ exclusivamente, y la integración sobre la esfera de radio a que proviene del teorema de Green es inmediata dando lugar a la relación (4).

La forma bilineal (4) es del tipo¹:

$$x_1^* y_2 - x_3^* y_1 + x_2^* y_4 - x_4^* y_2 = 0 \quad , \quad (5)$$

y para su solución podríamos proponer las mismas relaciones lineales utilizadas en el caso de partículas sin carga¹. La presencia del potencial coulombiano introduce una divergencia logarítmica para $(\partial r \psi_1 / \partial r)_{r=0}$ como indicaremos mas abajo, y nos vemos obligados a modificar la forma de la expresión bilineal (4) antes de poder formular las relaciones lineales que nos dan las ecuaciones dinámicas de nuestro problema.

Para ver como debemos reformular la expresión bilineal (4), necesitamos conocer las propiedades de la eigenfunción de (2) para una energía E y momento angular 0. Si esta eigenfunción se designa por $r^{-1} \varphi_{\mathbb{N}}(r)$, vemos de (2) que $\varphi_{\mathbb{N}}(r)$ satisface la ecuación:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2}{Dr} \right) \right] \varphi_{\mathbb{N}}(r) = 0, \quad \text{si } r \neq 0, \quad (6)$$

$$\text{donde } k^2 = (2\mu E / \hbar^2); \quad D = (\hbar^2 / \mu e^2) (Zz)^{-1} \quad . \quad (7)$$

La ecuación (6) admite dos soluciones linealmente independientes que se designan en la literatura⁶ por* F y G , y que tienen las siguientes propiedades asintóticas^{6,7}: si $r \rightarrow 0$,

$$F \rightarrow Ckr, \quad G \rightarrow C^{-1} \left\{ 1 + \frac{2r}{D} \left[\ln \left(\frac{2r}{D} \right) + \frac{1}{2} g(\alpha) + \gamma - 1 \right] \right\}, \quad (8a)$$

donde:

$$C^2 = 2\pi\alpha [\exp(2\pi\alpha) - 1]^{-1}, \quad \alpha = (kD)^{-1}, \quad (8b)$$

$$g(\alpha) = -2 \ln \alpha + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + \alpha^2)}, \quad \gamma = 0.5772\dots \quad (8c)$$

*Por comodidad omitimos en lo que sigue los índices \mathbb{N} de F y G ya que estas son funciones tanto de r como de E .

Si $r \rightarrow \infty$:

$$F \rightarrow \text{sen} [kr - \alpha \log 2kr + \eta] \quad , \quad (9a)$$

$$G \rightarrow \text{cos} [kr - \alpha \log 2kr + \eta] \quad , \quad (9b)$$

donde:

$$\eta = \arg \Gamma(1+i\alpha) \quad \text{o} \quad \exp(i\eta) = \Gamma(1+i\alpha) |\Gamma(1+i\alpha)|^{-1} \quad , \quad (9c)$$

y $\Gamma(z)$ es la función gama.

La solución más general $\varphi_{\mathbb{N}}$ de (6) sería una combinación lineal de F y G , y por razones que se verán más adelante, conviene escribirla en la forma:

$$\varphi_{\mathbb{N}}(r) = A(E)C [G + F \cot \delta] \quad , \quad (10)$$

donde A y δ son funciones arbitrarias de la energía E , y C está dado por (8b). Ahora bien, la función $r\psi_1$ más general debería formarse a partir de las eigenfunciones $\varphi_{\mathbb{N}}$ de (10), ya que ψ_1 satisface (2) para $r \neq 0$ y corresponde a momento angular 0. De aquí que la $r\psi_1$ más general pueda expresarse como:

$$r\psi_1 = \int A(E)C [G + F \cot \delta] \exp(-iEt/\hbar) dE \quad . \quad (11)$$

De las propiedades asintóticas (8) de F y G vemos que si $r \rightarrow 0$, $r\psi_1$ dado por (11) tiende a:

$$r\psi_1 \rightarrow \int A(E) \exp(-iEt/\hbar) dE \quad . \quad (12)$$

Por otro lado, si tomamos la derivada de $r\psi_1$ con respecto a r y consideramos su forma asintótica cuando $r \rightarrow 0$, vemos de (8) que:

$$\frac{\partial r\psi_1}{\partial r} \rightarrow \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) \int A(E) \exp(-iEt/h) dE + \\ + \int [D^{-1}g(\alpha) + C^2k \cot \delta] A(E) \exp(-iEt/h) dE . \quad (13)$$

De (13) se tiene que $(\partial r\psi_1/\partial r)$ diverge logarítmicamente cuando $r \rightarrow 0$, pero por otro lado, de (13) y (12) vemos que:

$$\frac{\partial r\psi_1}{\partial r} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) (r\psi_1) , \quad (14)$$

tiende a un valor finito cuando $r \rightarrow 0$.

Si reemplazamos $(\partial r\psi_1/\partial r)$ por (14) en (4), y en forma similar reemplazamos $(\partial r\psi'_1/\partial r)$, vemos que la forma bilinear (4) no se altera y puede escribirse como:

$$\frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \left[\frac{\partial r\psi_1}{\partial r} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) (r\psi_1) \right]_{r=0}^* (r\psi'_1)_{r=0} \\ - (r\psi_1)_{r=0}^* \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \left[\frac{\partial r\psi'_1}{\partial r} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) (r\psi'_1) \right]_{r=0} \\ + \psi_2^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi'_2}{\partial t} \right) - \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)^* \psi'_2 = 0 . \quad (15)$$

La expresión (15) es equivalente a la (4) y también es una forma bilinear del tipo (5). Se ha demostrado anteriormente¹ que la forma bilinear (5) se anula idénticamente si las

x_p , $p = 1, 2, 3, 4$ satisfacen las relaciones lineales:

$$x_3 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 ; \quad x_4 = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 ; \quad (16)$$

donde la matriz $\|c_{\alpha\beta}\|$, $\alpha, \beta = 1, 2$ es una matriz constante hermitiana. De (15) y (16) vemos entonces que las ecuaciones de interacción entre las dos componentes de la función de Fock toman la forma¹:

$$(r\psi_1)_{r=0} = c_{11} (2\pi\hbar^2\mu^{-1}) \left[\frac{\partial r\psi_1}{\partial r} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) (r\psi_1) \right]_{r=0} + c_{12}\psi_2, \quad (17a)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = c_{21} (2\pi\hbar^2\mu^{-1}) \left[\frac{\partial r\psi_1}{\partial r} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) (r\psi_1) \right]_{r=0} + c_{22}\psi_2. \quad (17b)$$

Las ecuaciones (17) se reducen a las ecuaciones discutidas previamente, en ausencia de carga, ya que si $z \rightarrow 0$ D dado por (7) tiende a ∞ y el paréntesis que multiplica a c_{11} y c_{21} se reduce a $(\partial r\psi_1/\partial r)_{r=0}$. Comparando esta forma asintótica de (17) cuando $D \rightarrow \infty$ con los resultados obtenidos para interacción entre partículas sin carga¹, vemos que c_{22} debe interpretarse como $c_{22} = -E_1$, donde E_1 es la energía de resonancia.

Para un proceso estacionario tenemos que:

$$\psi_1(r, t) = r^{-1} \varphi_{\mathbb{H}}(r) \exp(-iEt/\hbar); \quad \psi_2 = \psi_{20} \exp(-iEt/\hbar), \quad (18)$$

donde ψ_{20} es una constante. Sustituyendo (18) en (17) y eliminando ψ_{20} entre las dos ecuaciones (17), obtenemos la condición a la frontera en $r = 0$ para la función de onda estacionaria $\varphi_{\mathbb{H}}(r)$, bajo la forma:

$$(\varphi_{\mathbb{N}})_{r=0} \left[\frac{d\varphi_{\mathbb{N}}}{dr} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) \varphi_{\mathbb{N}} \right]_{r=0}^{-1} = \frac{\gamma_1^2}{E_1 - E} + R_0, \quad (19)$$

donde: $R_0 = 2\pi\hbar^2 \mu^{-1} c_{11}$, $\gamma_1^2 = 2\pi\hbar^2 \mu^{-1} |c_{12}|^2$, $E_1 = -c_{22}$.

Teniendo en cuenta la expresión general (10) de $\varphi_{\mathbb{N}}(r)$, vemos que la ecuación (19) determina el ángulo de fase δ que aparece en (10). Antes de obtener δ explícitamente, conviene generalizar (19) al caso multinivelar. La manera de hacer esa generalización en el espacio de Fock ya fué indicada en el caso de partículas sin carga¹, y ha sido discutida en detalle por F. Medina Nicolau³. Utilizando los resultados de los trabajos anteriores^{1,3}, se concluye de inmediato que en el caso multinivelar basta reemplazar el miembro derecho de (19) por la función $R(E)$ de Wigner⁶ definida por:

$$R(E) \equiv \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E} + R_0. \quad (20)$$

Del comportamiento asintótico (8) de F y G cuando $r \rightarrow 0$, se ve que (19, 20) nos da la ecuación:

$$D^{-1} g(\alpha) + C^2 k \cot \delta = [R(E)]^{-1}. \quad (21)$$

De (21) obtenemos el ángulo de fase δ del problema, en términos de la función $R(E)$, la cual contiene parámetros tales como E_{λ} , γ_{λ}^2 que están relacionados exclusivamente con la estructura del núcleo compuesto, ya que son respectivamente los niveles de resonancia y las semianchuras reducidas de estos niveles.

Como $R(E)$ es una función meromorfa de E , su recíproco también lo será, y suponiendo que $R(0) \neq 0$ podemos desarrollar

$[R(E)]^{-1}$ en una serie de potencias, para E en la vecindad de 0. Reemplazando E por k^2 dada por la relación (7), se tiene que en la vecindad de $E = 0$, (21) toma la forma:

$$D^{-1}g(\alpha) + C^2k \cot \delta = -a^{-1} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots, \quad (22)$$

donde los coeficientes del desarrollo en serie, se han puesto en una notación similar a la utilizada por Bethe⁷ en el análisis de la dispersión de protones por protones, esto es, a es la longitud de dispersión y r_0 es el alcance efectivo. Para el caso de interacciones de partículas cargadas con otros núcleos que no sean protones, la expresión (22) continua siendo válida como lo ha demostrado Teichmann⁹.

De las expresiones asintóticas (9) de F y G , vemos que si $r \rightarrow 0$, $\varphi_{\mathbb{N}}(r)$ tiende a:

$$\varphi_{\mathbb{N}}(r) \rightarrow A(E)C(\sin \delta)^{-1} \sin [kr - \alpha \log 2kr + \eta + \delta] . \quad (23)$$

El desfásamiento total de la función de onda debido a la dispersión coulombiana mas la nuclear, está dado por $\eta + \delta$. Teniendo en cuenta que tratamos aquí solo con dispersión con momento angular relativo 0, vemos que la sección total de dispersión σ está dada por:

$$\sigma = 4\pi k^{-2} \sin^2(\eta + \delta) = \pi k^{-2} |1 - \exp i2(\eta + \delta)|^2 . \quad (24)$$

De la relación entre la sección y la función S que sera discutida más detalladamente en la sección IV, se concluye que la función S del problema de dispersión de resonancia entre par-

tículas con carga está dada por:

$$S = \exp i2(\eta + \delta) = \exp i2\eta \cdot \exp i2\delta . \quad (25)$$

De la ecuación (2') podemos despejar $\exp i2\delta$ y utilizando la definición (9c) de η , vemos que S toma la forma:

$$S = \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{\Gamma(1-i\alpha)} \frac{1 + [iC^2k - D^{-1} g(\alpha)] R(E)}{1 - [iC^2k + D^{-1} g(\alpha)] R(E)} . \quad (26)$$

Por el hecho que $\alpha = (kD)^{-1}$ y de la definición de $g(\alpha)$ dada en (8c), vemos que como función del número de onda k , S tiene un punto ramal logarítmico en $k = 0$, y que fuera de ese punto la función S es una función meromorfa de k . Introduciendo un corte en el plano k desde 0 a $-\infty$ a lo largo del eje real, hacemos que S sea una función uniforme de k . Los polos de S en cada hoja de la superficie de Riemann del número de onda k , son por un lado los polos de $\exp(2i\eta)$, y por otro los polos de $\exp(2i\delta)$. Debido a que la función $\Gamma(z)$ no tiene ceros en el plano z y solo polos para $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, se concluye que los polos de $\exp(2i\eta)$ están dados por:

$$k = -i [D(n+1)]^{-1} , \quad (27)$$

y todos están sobre la parte negativa del eje imaginario. Los polos de $\exp(2i\delta)$ no pueden coincidir con los polos del numerador del segundo factor en (26) porque estos sólo pueden ser los polos de C , $g(\alpha)$ o de $R(E)$ que aparecen también en de-

nominador. Por lo tanto, los polos de $\exp(2i\delta)$ son los ceros del denominador y estarán dados por la ecuación:

$$R(E) = [iC^2k + D^{-1} g(\alpha)]^{-1} \quad . \quad (28)$$

Como los polos (27) y los dados por la ecuación (28) son todos polos de la S definida por (26), se concluye que todos los polos de S en la parte superior de las hojas de la superficie de Riemann k , están dados por la ecuación (28). En la sección siguiente mostraremos que para la parte superior de la superficie de Riemann k , la ecuación (28) no tiene solución para k fuera del eje imaginario.

III.- DISTRIBUCION DE POLOS DE LA FUNCION S .

Para poder analizar la distribución de los polos de la función S definida por (26), es conveniente introducir una función de onda $H(r)$ que satisfaga la ecuación (6), y que presente exclusivamente ondas salientes afectadas por la deformación coulombiana⁴, cuando $r \rightarrow \infty$. Como H es necesariamente combinación de F y G , vemos de la forma asintótica (9) de F y G que H puede expresarse como:

$$H = \exp(-i\eta) (G+iF) \quad , \quad (29)$$

de donde se tiene que si $r \rightarrow \infty$, la función H tiende a:

$$H \rightarrow \exp i[kr - \alpha \log 2kr] \quad . \quad (30)$$

Excepto por una constante multiplicativa, vemos que pa-

ra k real la $\varphi_{\mathbb{H}}(r)$ de (10) puede expresarse como:

$$\varphi_{\mathbb{H}}(r) = H^*(r) - S(E) H(r) \quad . \quad (31)$$

De las propiedades asintóticas de G y F cuando $r \rightarrow 0$, vemos que si $r \rightarrow 0$, H tiende a la forma:

$$H \rightarrow C^{-1} e^{-i\eta} \quad (32a)$$

$$\left[\frac{dH}{dr} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) H \right] \rightarrow C^{-1} e^{-i\eta} [iC^2k + D^{-1}g(\alpha)] \quad . \quad (32b)$$

De (32) se ve que la ecuación (28) para los polos de la función S toma la forma:

$$R(E) = (H)_{r=0} \left[\frac{dH}{dr} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) H \right]_{r=0}^{-1} \quad . \quad (33)$$

Por su definición (29) vemos que para cualquier k compleja H satisface la ecuación:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2}{Dr} \right) \right] H = 0 \quad . \quad (34a)$$

Tomando el conjugado de la ecuación tenemos que:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(k^{*2} - \frac{2}{Dr} \right) \right] H^* = 0 \quad . \quad (34b)$$

Multiplicando la primera ecuación por H^* , la segunda por H restando e integrando entre los límites a y b se obtiene:

$$\left[H^* \frac{dH}{dr} - H \frac{dH^*}{dr} \right]_a^b = -(k^2 - k^{*2}) \int_a^b HH^* dr \quad . \quad (35)$$

Ahora bien, el miembro izquierdo en (35) converge cuando $r \rightarrow 0$ porque se puede reemplazar la (dH/dr) que aparece allí por (32b), y la expresión dentro del paréntesis cuadrado no cambia. Por otro lado, si $k = k_x + ik_y$ y $k_y > 0$, vemos de la forma asintótica de H dada por (30) que cuando $r \rightarrow \infty$ H decae exponencialmente y lo mismo sucede con H^* . Podemos por lo tanto, cuando $k_y > 0$ (y solo en ese caso) tomar $b = \infty$ ya que la integral en (35) converge y el límite del paréntesis cuadrado cuando $b \rightarrow \infty$ es 0. Se obtiene entonces para $k_y > 0$ que:

$$\begin{aligned} (H^*)_{r=0} \left[\frac{dH}{dr} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) H \right]_{r=0} - (H)_{r=0} \left[\frac{dH}{dr} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) H \right]_{r=0}^* = \\ = (k^2 - k^{*2}) \int_0^{\infty} HH^* dr \quad . \end{aligned} \quad (36)$$

Dividiendo ambos miembros de (36) por:

$$\left| \left[\frac{dH}{dr} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) H \right]_{r=0} \right|^2 \equiv U(E) \quad , \quad (37)$$

y utilizando la relación entre E y k^2 dada por (7) se obtiene:

$$\text{Im} \left[(H)_{r=0} \left[\frac{dH}{dr} - \frac{2}{D} \left(\ln \frac{2r}{D} + \gamma \right) H \right]_{r=0}^{-1} \right] = -\text{Im} E B(E) \quad , \quad (38)$$

donde $B(E)$ es una expresión real y positiva para toda E compleja dada por:

$$B(E) \equiv U^{-1}(E) 2\mu\hbar^{-2} \int_0^{\infty} |H|^2 dr \quad , \quad (39)$$

e Im significa la parte imaginaria de la expresión correspondiente.

Volviendo ahora a la ecuación (33), tomando la parte imaginaria de ambos miembros y multiplicando por $\text{Im}E$ obtenemos después de utilizar (38) que:

$$\text{Im}E \text{ Im}R(E) = - (\text{Im}E)^2 B(E) \quad , \quad (39)$$

para valores de k en la parte superior del plano complejo. Por la definición de función R de Wigner⁸ tenemos que la parte izquierda es necesariamente positiva, mientras que la derecha es obviamente negativa. La ecuación (39) no se satisface en la parte superior de cualquiera de las hojas de k excepto posiblemente sobre el eje imaginario donde $\text{Im}E = 0$, y obtenemos por lo tanto el siguiente teorema:

TEOREMA: La introducción de un potencial de largo alcance como el coulombiano no modifica las regiones prohibidas a los polos de la función S en la superficie de Riemann del número de onda k .

El hecho que esas regiones prohibidas a los polos de S , sean las mismas que las que se obtienen para el caso de interacción de partículas sin carga,⁹ se debe a consideraciones de causalidad similares a las que han sido presentadas con anterioridad¹⁰ en relación con la interacción entre partículas neutras y núcleos. Estas consideraciones de causalidad serán discutidas en una publicación posterior.

IV.- REACCIONES DE RESONANCIA ENTRE PARTICULAS CON CARGA.

Vamos ahora a generalizar el análisis dado en la sec-

ción II para dispersión, al caso de reacciones entre partículas con carga, esto es, al caso en que tengamos varios canales" para la interacción. Podríamos repetir el desarrollo de la sección II para el caso de varios canales, pero como solo nos van a interesar los estados estacionarios para obtener la matriz S del problema, preferimos generalizar directamente las relaciones obtenidas anteriormente¹ para reacciones entre partículas sin carga. Para ello recordamos que si las funciones de onda estacionarias para las dos partículas en los diferentes canales se designan por ψ_i , donde $i = 1, 2 \dots n$, y n es el número de canales, entonces la condición a la frontera en $r = 0$ para esas funciones (suponiendo interacción solo con momento angular 0) es¹:

$$(r\psi_i)_{r=0} = \sum_{j=1}^n R_{ij} \left(\frac{\partial r\psi_j}{\partial r} \right)_{r=0}, \quad (40)$$

donde:

$$R_{ij}(E) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda i} \gamma_{\lambda j}}{E_{\lambda} - E} + R_{oij}, \quad (41)$$

y E_{λ} son las energías de resonancia y $\gamma_{\lambda i}^2$ las semianchuras reducidas asociadas con los diferentes canales.

Comparando la expresión (40) en el caso de un solo canal con (19, 20), vemos que bastaría reemplazar $\partial r\psi_i / \partial r$ por (14) para obtener la condición a la frontera apropiada para partículas con carga. Desde luego la ψ_i en el caso de partículas con carga ya no se expresaría en término de funciones de onda de partículas libres, como el caso discutido anteriormente¹, sino que se expresaría en términos de la F y G de la sección II, o bien de la H y H^* de (29).

Con cada canal j tenemos ahora asociadas las cargas de

las dos partículas z_j, Z_j y las masas de las mismas m_j, M_j . La masa reducida en el canal será $\mu_j = m_j M_j (m_j + M_j)^{-1}$, y designaremos por Q_j la diferencia de las masas del canal j al primer canal, suponiendo por comodidad que los canales se numeran en orden de masa creciente, esto es que:

$$Q_j = (m_j + M_j) - (m_1 + M_1), \quad j = 2, \dots, n, \quad (42a)$$

donde las Q_j son positivas y forman una secuencia creciente. Con cada canal j tenemos asociada ahora una constante D_j definida por:

$$D_j = (\hbar^2 / \mu_j e^2) (Z_j z_j)^{-1} . \quad (42b)$$

Para una energía cinética E de las partículas en el primer canal, corresponde un número de onda k_j en el canal j , y estas k_j están relacionadas por:

$$E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2\mu_1} = \frac{\hbar^2 k_j^2}{2\mu_j} + Q_j, \quad j = 2, \dots, n . \quad (42c)$$

Finalmente, tenemos las variables α_j, C_j asociadas con cada canal, que de acuerdo con (8b) están dados por:

$$\alpha_j = (k_j D_j)^{-1} ; \quad C_j^2 = 2\pi\alpha_j [\exp(2\pi\alpha_j) - 1]^{-1} . \quad (42d)$$

De las consideraciones desarrolladas en los párrafos anteriores, se ve que las condiciones a la frontera que satisfacen en $r = 0$ las funciones de onda ψ_j para partículas con carga, tienen la forma:

$$(r\psi_1)_{r=0} = \sum_{j=1}^N R_{1j} \left[\frac{\partial r\psi_j}{\partial r} - \frac{2}{D_j} \left(\ln \frac{2r}{D_j} + \gamma \right) (r\psi_j) \right]_{r=0}, \quad (43)$$

Si las partículas fueran neutras $z_j = 0$ para todos los canales j y $D_j = \infty$, y se ve que (43) se reduce entonces a (40), como era de esperarse. La ecuación (43) incluye por lo tanto, la posibilidad de que en algunos canales se produzcan neutrones, ya que bastaría hacer $D_j^{-1} = 0$ en esos canales.

Las funciones $r\psi_j$ de (43) satisfacen la ecuación (6) si k_j, D_j dados por (42) reemplazan a k, D . Se tiene por lo tanto, que las $r\psi_j$ deben darse como combinaciones lineales de H_j y H_j^* , donde el índice en la H indica que en la definición de la misma por (29) debe reemplazarse k, D por k_j, D_j . Como H_j^* representa una onda entrante por el canal j , y H_j una onda saliente por el mismo canal, tenemos que las funciones $r\psi_{j1}$ que representan a partículas en el canal j cuando el canal de entrada es el 1, podría expresarse como:

$$r\psi_{j1} = H_j^*(r) \delta_{j1} - H_j(r) S_{j1} \quad (44)$$

El definir la matriz $\|S_{j1}\|$ en términos de las funciones H_j dadas por (29), nos permite encontrar una relación sencilla entre las componentes de matriz S y las secciones de reacción y dispersión. En efecto, es bien conocido⁴ que:

$$(-2ikr)^{-1} [H^*(r) - H(r)] \quad , \quad (45)$$

representa la componente de momento angular cero de una onda plana incidente deformada hasta en el ∞ por la acción del

campo coulombiano, ya que la forma asintótica de (45) cuando $r \rightarrow 0$ es:

$$(kr)^{-1} \text{sen} [kr - \alpha \log 2kr] \quad . \quad (46)$$

Podemos ahora escribir la onda en el canal j bajo la forma:

$$(-2ik_1)^{-1} \psi_{j1} = (-2ik_1 r)^{-1} [H_1^* - H_1] \delta_{j1} + r^{-1} H_j (-2ik_1)^{-1} [\delta_{j1} - S_{j1}] \quad . \quad (47)$$

Como la primera parte del miembro derecho de (47), es la componente de momento angular 0 de la onda plana incidente en el canal 1 deformada por el potencial coulombiano, concluimos que el valor absoluto al cuadrado del coeficiente de $r^{-1} H_j$ es la sección diferencial para reacción del canal 1 al canal j . Como esa sección diferencial no depende del ángulo, al multiplicar por 4π tenemos la sección total $\sigma_{1 \rightarrow j}$ que toma entonces la forma:

$$\sigma_{1 \rightarrow j} = \pi k_1^{-2} |\delta_{j1} - S_{j1}|^2 \quad . \quad (48)$$

Para obtener la matriz S en término de la matriz R de la reacción, se substituye (44) en (43) y se obtiene la ecuación matricial que determina a la S . Es conveniente introducir dos matrices diagonales M y N definidas por¹¹:

$$M_{1j} = (H_j)_{r=0} \quad \delta_{1j} = C_j^{-1} e^{-i\eta_j} \delta_{1j} \quad , \quad (49)$$

$$\begin{aligned} N_{1j} &= \left[\frac{dH_j}{dr} - \frac{2}{D_j} \left(\ln \frac{2r}{D_j} + \gamma \right) H_j \right]_{r=0} \delta_{1j} = \\ &= C_j^{-1} e^{-i\eta_j} [iC_j^2 k_j + D_j^{-1} g(\alpha_j)] \delta_{1j} \quad , \quad (50) \end{aligned}$$

donde $\eta_j = \arg \Gamma(1+i\alpha_j)$. Con ayuda de estas matrices vemos que (43,44) nos dan la relación:

$$M^* - M S = R [N^* - N S] \quad , \quad (50)$$

y que S está dada por:

$$S = [M - R N]^{-1} [M - R N]^* \quad , \quad (51)$$

donde se puede tomar el conjugado del paréntesis en lugar de $M^* - R N^*$; porque R es una matriz real.

La ecuación (51) es la que determina la matriz S y por lo tanto, también las secciones como muestra (49), en términos de los parámetros $\gamma_{\lambda 1}$ y E_{λ} que aparecen en R , parámetros que están relacionados exclusivamente con las características intrínsecas del núcleo. La ecuación (51) incluye el caso de que algunos de los canales fuera de neutrón, ya que entonces basta hacer la correspondiente $D_j = \infty$.

Con el objeto de ilustrar el efecto que tiene el potencial coulombiano sobre la anchura de los niveles, vamos a considerar el caso de la reacción nuclear de dos canales y un solo nivel, siendo uno de los canales de neutrón. La matriz R para este problema tiene la forma:

$$R = \frac{1}{E_0 - E} \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_1 \gamma_2 \\ \gamma_2 \gamma_1 & \gamma_2^2 \end{bmatrix} \quad , \quad (52)$$

y denotando el canal de neutrón por 1 y el de partícula cargada por 2, se tiene que las componentes diagonales de M y N to

man la forma:

$$M_{11} = 1; N_{11} = ik_1; M_{22} = C_2^{-1} e^{-i\eta_2};$$

$$N_{22} = C_2^{-1} e^{-i\eta_2} [iC_2^2 k_2 + D_2^{-1} g(\alpha_2)] \quad , \quad (53)$$

donde k_1 , k_2 y E están relacionados por la ecuación (42c). Substituyendo (52) y (53) en (51), es fácil obtener la forma explícita de la matriz S para este problema. Una vez obtenida S , si la sustituimos en (48) obtenemos la sección para cualquier proceso. En particular, nos interesa la sección para el caso del canal de neutrón al canal de partículas con carga, es decir, $\sigma_{1 \rightarrow 2}$ dada por:

$$\sigma_{1 \rightarrow 2} = \pi k_1^{-2} |S_{12}|^2 \quad (54)$$

Un cálculo elemental nos da para $\sigma_{1 \rightarrow 2}$ una expresión de la forma:

$$\sigma_{1 \rightarrow 2} = \frac{4\pi}{k_1 k_2} \frac{(\gamma_1^2 k_1) (\gamma_2^2 k_2 C_2^2)}{[E_0 - E - \gamma_2^2 D_2^{-1} g(\alpha_2)]^2 + (\gamma_1^2 k_1 + \gamma_2^2 k_2 C_2^2)^2} \quad . \quad (55)$$

En el caso de que el segundo canal correspondiera también a partícula neutra, se hubiera obtenido una expresión similar a (55), en la que $C_2 = 1$ y $D_2^{-1} = 0$. En tal caso, comparando con la fórmula usual¹ de Breit y Wigner, se ve que $\gamma_1^2 k_1$, $\gamma_2^2 k_2$ corresponden a las semianchuras en los canales 1 y 2 en ausencia del potencial coulombiano, que designaremos por $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$. En presencia del potencial coulombiano, en el segundo canal la

anchura para neutron Γ_1 , no se modifica $\Gamma_1 = \bar{\Gamma}_1$, como es obvio esperar, pero la anchura para la partícula con carga queda modificada por el factor C_2^2 esto es, $\Gamma_2 = \bar{\Gamma}_2 C_2^2$. Este factor C_2^2 no es otra cosa que el factor de penetración de la barrera coulombiana, ya que tomando una onda saliente del potencial coulombiano, como la H de (29), si se normaliza a la unidad el cuadrado de su valor absoluto en la vecindad del origen, se tiene de (32) que la densidad de probabilidad a grandes distancias queda multiplicada por el factor C^2 . De aquí se concluye que la anchura de un nivel para una partícula con carga pueda expresarse como el producto de su anchura intrínseca, esto es, su anchura en caso que no tuviera carga, por la probabilidad de penetración de la barrera coulombiana. El efecto coulombiano también introduce un término $\gamma_2^2 D_2^{-1} g(\alpha_2)$ restado al $E_0 - E$ de (55), pero para energías suficientemente altas, éste término se comporta como el logaritmo de la energía, y por lo tanto, varía muy lentamente cuando E está en la vecindad de la energía de resonancia E_0 . Podemos considerar entonces éste término como constante en la vecindad de E_0 y que tiene solo la propiedad de redefinir la posición de la energía de resonancia.

La matriz S definida por (51) como función de k_1 , presenta puntos ramales para $k_1 = \pm(2\mu_1 Q_j)^{\frac{1}{2}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, pero como en el caso de dispersión, se puede hacer unívoca por medio de un corte a lo largo del eje real. Es posible demostrar por un análisis similar al de la sección III, que las restricciones sobre la distribución de polos en la superficie de Riemann de k_1 , para el caso de reacciones entre partículas con carga, son similares a las que el autor obtuvo¹²

para el caso de reacciones nucleares entre partículas sin carga. Esto es, que un potencial de largo alcance como el coulombiano no modifica las regiones prohibidas a los polos de la matriz S .

REFERENCIAS.

1. M.Moshinsky. Phys.Rev. 81, 347 (1951).
2. V.Fock. Z.Physik 75, 622 (1932).
3. F.Medina Nicolau. Rev.Mex.Fis. 2, 117 (1953).
4. N.F.Mott and H.S.W.Massey, The Theory of Atomic Collisions (Clarendon Press, Oxford, 1949) Second edition. Cap.III
5. E.T.Whittaker y G.N.Watson. Modern Analysis (Cambridge University Press, New York, 1943) American edition pp.336-351
6. Yost, Wheeler y Breit, Phys.Rev. 49, 174 (1937).
7. H.A.Bethe. Phys.Rev. 76, 38 (1949).
8. E.P.Wigner. Ann.of Math. 53, 36 (1951).
9. T.Teichmann. Phys.Rev. 83, 141 (1951).
10. M.Moshinsky. Phys.Rev. 84, 525 (1951).
11. E.P.Wigner. Phys.Rev. 73, 1002 (1948).
12. M.Moshinsky. Phys.Rev. 91, 984 (1953).