

## DISPERSION MULTINIVELAR EN EL ESPACIO DE FOCK II

F.M. Medina N.

Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma e  
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Agosto 26, 1953)

## RESUMEN

*In a previous note under the same title, we gave a description of many level scattering in Fock space. In this paper we discuss the time dependent solution for the scattering and desintegration processes. The asymptotic behavior of these time-dependent solutions, and the transient effects in the scattered current, are analyzed.*

I. Introducción.

En un artículo anterior<sup>1</sup> se ha encontrado que el fenó-

meno de la dispersión de dos partículas mediante la formación de un núcleo compuesto y el fenómeno de la desintegración de una partícula en dos se puede describir utilizando un espacio de Fock, por medio de condiciones a la frontera, la cual se reduce al punto de interacción. Se encontraron las soluciones dependientes del tiempo en la representación de energía-momento angular, así como la representación del potencial por medio del cual se lleva a cabo la interacción. Lo interesante a este respecto es que este potencial no tiene análogo clásico.

En el presente artículo se obtienen las soluciones dependientes del tiempo que describen los dos procesos, se estudia su comportamiento en el tiempo y por último se hace un análisis detallado de los fenómenos transitorios que aparecen en la corriente.

## II. Soluciones dependientes del tiempo.

Ahora se desea obtener un operador  $\underline{U}(t)$  dependiente del tiempo, en el espacio de Fock, que transforme al estado inicial  $|Q\rangle$  de\* (A.1) o (A.2) en el correspondiente estado al tiempo  $t$ . Entonces

$$|Qt\rangle = \underline{U}(t)|Q\rangle \quad (1)$$

Por (A.17) se debe tener que

$$i \frac{d}{dt} \underline{U}(t) = \underline{H} \underline{U}(t) \quad , \quad (1a)$$

---

\*Cuando sea necesario hacer referencia a una relación que aparezca en (1), se hará anteponiendo la letra A al número que le corresponda a dicha relación en (1).

con la condición

$$\tilde{U}(0) = \underline{1} \quad . \quad (1b)$$

Sabiendo que en la representación de energía-momento angular el estado  $|Q\rangle$  tiene el desarrollo\*

$$|Q\rangle = \int_0^{\infty} |E\rangle \langle E|Q\rangle dE \quad , \quad (2)$$

la solución de (1a), en la representación de energía-momento angular, esta dada por:

$$\langle E|U(t)|E'\rangle = e^{-iEt} \delta(E-E') \quad . \quad (3)$$

De (2) y (3) se obtiene el desarrollo de  $|Qt\rangle$

$$|Qt\rangle = \int_0^{\infty} |E\rangle e^{-iEt} \langle E|Q\rangle dE \quad , \quad (4)$$

con lo cual se ha obtenido el desarrollo en el tiempo del estado  $|Q\rangle$ .

A) Soluciones dependientes del tiempo para la dispersión.

En el caso de dispersión el sistema esta representado inicialmente por una onda plana cuyo vector de propagación se designará por  $\bar{k}'$ . Las componentes del estado inicial  $|\bar{k}'\rangle$  del sistema están dadas por

---

\*Puesto que todo el análisis está hecho para  $l = 0$ , el bra  $\langle E00|$  se designará brevemente por  $\langle E|$  sin introducir ninguna confusión en la notación.

$$\langle \bar{r} | \bar{k}' \rangle = e^{i\bar{k}' \cdot \bar{r}} \quad , \quad (5a)$$

$$\langle j | \bar{k}' \rangle = 0 \quad . \quad (5b)$$

La onda plana dada en (5a) se puede expresar en términos de sus componentes esféricas y puesto que las partículas solamente interaccionan para momento angular cero, la componente de (5a) para  $l = 0$  se desarrollará conforme a (4) y el desarrollo de las demás componentes sera estacionario.

Poniendo

$$\langle \bar{r} | \bar{k}' \rangle = \frac{\text{sen } k' r}{k' r} + \left( e^{i\bar{k}' \cdot \bar{r}} - \frac{\text{sen } k' r}{k' r} \right) \quad , \quad (+)$$

donde el primer sumando de (+) representa la componente de momento angular cero de  $\langle \bar{r} | \bar{k}' \rangle$  y el segundo sumando contiene a la suma de todas las componentes correspondientes a  $l \neq 0$ , las componentes de  $|\bar{k}' t\rangle$  estarán dadas por (4) haciendo  $|Q\rangle = |\bar{k}'\rangle$ .

$$\langle \bar{r} | \bar{k}' t \rangle = \left( e^{i\bar{k}' \cdot \bar{r}} - j_0(k' r) \right) e^{-iE' t} + \int_0^{\infty} \langle \bar{r} | E \rangle e^{-iEt} \langle E | \bar{k}' \rangle dE, \quad (6a)$$

$$\langle j | \bar{k}' t \rangle = \int_0^{\infty} \langle j | E \rangle e^{-iEt} \langle E | \bar{k}' \rangle dE \quad , \quad (6b)$$

donde, por (6) y (+)

$$\langle E | \bar{k}' \rangle = 4\pi \int_0^{\infty} \langle E | \bar{r} \rangle \frac{\text{sen } k' r}{k' r} r^2 dr. \quad (6c)$$

Efectuando las operaciones indicadas por (6a,b) las componentes de la función de Fock  $\Psi_0(\bar{r}, t)$  están dadas por (véase apéndice III)

$$\psi_{00}(\bar{r}, \bar{k}', t) = e^{i(\bar{k}' \cdot \bar{r} - Et)} + \frac{1}{r} \sum_a A'_a \chi(r, k_a, t) \quad , \quad (7a)$$

$$\psi_{j0}(\bar{r}, \bar{k}', t) = \sum_a A'_{aj} \chi(0, k_a, t) \quad , \quad (7b)$$

donde  $k_a$  son los polos de la función

$$\frac{S(k)}{k^2 - k'^2} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oi}} \quad , \quad (8)$$

y los coeficientes  $A'_a$  y  $A'_{aj}$  están dados por:

$$A'_a = \frac{i}{2} \text{Res} \left[ \frac{1-S(k)}{k^2 - k'^2} \right]_{k=k_a} \quad , \quad (9a)$$

$$A'_{aj} = \frac{1}{4} k_a \text{Res} \left[ \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oj}} \frac{1+S(k)}{k^2 - k'^2} \right]_{k=k_a} \quad . \quad (9b)$$

Las sumas que aparecen en (7a,b) se extienden a todos los índices  $a$  tales que  $k_a$  es polo de (8). Como se puede ver fácilmente los coeficientes  $A'_a$  y  $A'_{aj}$  correspondientes a los polos de  $\frac{\partial R(E)}{\partial C_{oi}}$  son nulos. Por último,

$$\chi(r, k, t) = e^{i(kr - Et)} \text{erfc}(z) \quad ,$$

donde

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2} du, \quad z = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{r-kt}{\sqrt{2t}}.$$

B) Soluciones dependientes del tiempo para la desintegración.

En este caso el sistema se encuentra formando inicialmente alguno de los núcleos compuestos, por ejemplo, el  $C_1$ . Las componentes del estado  $|i\rangle$  para  $t = 0$  están dadas por.

$$\langle \bar{r} | i \rangle = 0, \quad (10a)$$

$$\langle j | i \rangle = \delta_{j1}. \quad (10b)$$

Por medio de (4) se pueden encontrar las componentes de  $|it\rangle$  que son:

$$\langle \bar{r} | it \rangle = \int_0^{\infty} \langle \bar{r} | E \rangle e^{-iEt} \langle E | i \rangle dE, \quad (11a)$$

$$\langle j | it \rangle = \int_0^{\infty} \langle j | E \rangle e^{-iEt} \langle E | i \rangle dE. \quad (11b)$$

Efectuando las operaciones indicadas en (11a,b) como se muestra en el Apéndice III, las componentes de la función de Fock  $\Psi_1(r,t)$  para la desintegración de la partícula  $C_1$ , están dadas por

$$\psi_{01}(\bar{r}, t) = \frac{1}{r} \sum_a \Delta_{a1} \chi(r, k_a, t), \quad (12a)$$

$$\psi_{j1}(\bar{r}, t) = \delta_{j1} e^{-iE_1 t} + \sum_a \Delta_{aj1} \chi(0, k_a, t), \quad (12b)$$

donde  $k_a$  son los polos de la función dada en (8) y los coeficientes  $A_{a1}$  y  $A_{aj1}$  están dados por:

$$A_{a1} = - \frac{k_a}{16\pi} \text{Res} \left[ \frac{\partial R(E)}{\partial C_{o1}} (1+S(k)) \right]_{k=k_a}, \quad (13a)$$

$$A_{aj1} = \frac{1}{32\pi i} k_a^2 \text{Res} \left[ \frac{\partial R(E)}{\partial C_{o1}} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oj}} (1+S(k)) \right]_{k=k_a}. \quad (13b)$$

Las sumas que aparecen en (12a,b) se extienden a todos los valores de  $a$  para los cuales  $k_a$  es polo de (8). Como se puede verificar fácilmente los coeficientes  $A_{a1}$  y  $A_{aj1}$  correspondientes a los polos de  $(k'^2 - k^2)^{-1}$  son cero, y por lo tanto no aparecen en las sumas (12a,b).

En el apéndice III se demuestra que las soluciones dadas por (7a,b) y (12a,b) satisfacen las ecuaciones de movimiento (A.15a,b,c) y que para  $t = 0$  aquellas se reducen a las expresiones (5a,b) y (10a,b) según sea el caso.

Como se puede observar las soluciones están completamente determinadas al conocer los polos de la función  $S(k)$  y por lo tanto el sistema (A.1) o (A.2) está totalmente caracterizado por esta función.

Se desea ahora estudiar el comportamiento estacionario del sistema en su forma (A.1) y en su forma (A.2). En el apéndice II están consignados los valores asintóticos de la función  $\chi(r,k,t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para cualquier valor del argumento de  $k$ .

Para encontrar el valor asintótico de  $\psi_{00}(\bar{r}, \bar{k}', t)$  dada por (7a) es de notarse que cuando  $t \rightarrow \infty$  la función

$\chi(r, k_a, t)$  es distinta de cero solamente cuando  $\frac{3\pi}{4} > k_a > -\frac{\pi}{4}$ . Por otra parte la contribución de los términos correspondientes a los polos  $k_a$  de  $S(k)$  tales que  $\arg k_a > -\frac{\pi}{4}$  es despreciable puesto que la parte imaginaria de  $E_a$  es negativa. Entonces, cuando  $t \rightarrow \infty$  la expresión (7a) se reduce a:

$$\psi_{00} \rightarrow \left[ e^{i\bar{k}' \cdot \bar{r}} + 2A \frac{e^{ik' r}}{r} \right] e^{-iE' t}, \quad (14)$$

donde  $A$  está dado por (9a) para  $k_a = k'$

$$A = \frac{1}{2} \frac{R(E')}{1 - ik'R(E')}, \quad (14a)$$

y la fórmula multinivelar para la sección de dispersión está dada por:

$$\sigma(k') = 4\pi \frac{R(E')^2}{1 + k'^2 R(E')^2}. \quad (15)$$

Supóngase ahora que solamente hay una resonancia y que ésta se efectúa a la energía  $E_1$ . La expresión (15) se reduce a

$$\sigma(k') = \frac{4\pi}{k'^2} \frac{\Gamma_1'^2}{(E_1 - E)^2 + \Gamma_1'^2}, \quad (16a)$$

donde

$$\Gamma_1' = 2\pi C_{o1}^2 k', \quad (16b)$$

es la semianchura de la resonancia para la dispersión a la energía  $E'$ . La semianchura en resonancia está dada por:

$$\Gamma_1 = 2\pi C_{01}^2 k_1 \quad . \quad (16c)$$

En esta forma se ve la relación que existe entre la constante  $C_{01}$  que mide la acción que ejerce la etapa cero sobre la etapa  $i$  o viceversa y la anchura de la resonancia para el proceso de dispersión.

Por otra parte, la probabilidad de que el sistema se encuentre formando el núcleo  $C_j$  está dado por  $|\psi_{j0}|^2$ . Por razonamientos análogos a los aducidos anteriormente la expresión (7b), cuando  $t \rightarrow \infty$ , se reduce a

$$\psi_{j0} \rightarrow 2A'_j e^{-iE'_j t} \quad ,$$

donde  $A'_j$  está dada por (9b) cuando  $k_a = k'$ .

El valor asintótico de la probabilidad de que el sistema se encuentre formando el núcleo  $C_j$  estará dado por

$$P_j \rightarrow 4|A'_j|^2 = \frac{\pi^2 C_{0j}^2}{(E_j - E')^2} \frac{1}{1 + k'^2 R(E')^2} \quad , \quad (17)$$

y la probabilidad de que se encuentre en la etapa  $j$  con respecto a la probabilidad de que se encuentre en la  $i$  está dada por

$$\frac{P_j}{P_i} = \frac{\Gamma'_j}{\Gamma'_i} \left( \frac{E_i - E'}{E_j - E'} \right)^2 \quad . \quad (17a)$$

Es obvio de esta última relación, que si la resonancia se ha llevado a cabo a la energía  $E_j$  la probabilidad de que el sistema se encuentre formando el núcleo  $C_j$  es mucho ma-

por que la probabilidad de encontrarlo formando cualquier otra partícula compuesta  $C_i$  ( $i \neq j$ ).

El comportamiento estacionario del sistema (A.2) se puede obtener del (12a,b). Los únicos términos que contribuyen a la suma en (12a) son aquellos para los cuales  $-\frac{\pi}{4} < \arg k_a < 0$ .

Entonces

$$\psi_{0i} \rightarrow \frac{1}{r} \sum_a 2A_{a1} e^{i(k_a r - E_a t)}, \quad (18)$$

donde la suma se extiende a todos los polos  $k_a$  de  $S(k)$  tales que  $-\frac{\pi}{4} < \arg k_a < 0$ . Los coeficientes  $A_{a1}$  son los dados por (13a).

Se puede ver fácilmente que (18) representa una superposición de estados que decaen con el tiempo, debido a que la parte imaginaria de  $E_a$  es negativa. La vida media del estado que corresponde al polo  $k_a$  está dada por

$$\tau_a = \frac{1}{2|k_{ax}k_{ay}|}, \quad (18a)$$

donde  $k_{ax}$  y  $k_{ay}$  representan las componentes del polo  $k_a$  sobre los ejes real e imaginario del plano  $k$  respectivamente.

Finalmente, cuando  $t \rightarrow \infty$ , la función (12b) toma la forma

$$\psi_{ji} \rightarrow \sum_a 2A_{aji} e^{-iE_a t}, \quad (19)$$

donde la suma se extiende a los mismos valores de  $a$  que en (18) y los coeficientes  $A_{aji}$  están dados por (13b). La ex-

presión (19) representa una superposición de estados que decaen en el tiempo con una vida media dada por (18a).

Con lo desarrollado hasta ahora se puede encontrar la sección para la dispersión suponiendo que esta se lleva a cabo mediante la formación de un núcleo compuesto.

Definiendo la amplitud para la probabilidad de desintegración del núcleo compuesto  $C_j$  como

$$\sqrt{2\Gamma'_j} = 2 C_{0j} \sqrt{\pi k'} \quad , \quad (20a)$$

y la amplitud para la formación del mismo núcleo por

$$\sqrt{\sigma_{0j}} = \frac{2A'_j}{\sqrt{k'}} \quad , \quad (20b)$$

donde  $A'_j$  está dada por (9b) para  $k_e = k'$ . La división entre  $\sqrt{k'}$  en (20b) tiene por objeto normalizar a unidad de corriente.

Ahora bien, la expresión (15) para la sección de dispersión se puede poner en la forma:

$$\sigma(k') = 4\pi \left| \frac{1}{1 - ik'R(E')} \sum_{j=1}^n \frac{2\pi C_{0j}^2}{E_j - E'} \right|^2 \quad . \quad (20c)$$

Puesto que

$$A'_j = \frac{\pi C_{0j}}{E_j - E'} \frac{1}{1 - ik'R(E')} \quad (20d)$$

se ve fácilmente que

$$\sigma(k') = \left| \sum_{j=1}^n \sqrt{2\Gamma'_j} \sqrt{\sigma_{0j}} \right|^2 \quad (21)$$

Suponiendo que solamente hay un nivel de resonancia, la expresión (21) se reduce a

$$\sigma(k') = 2\Gamma_j' \sigma_{0j} \quad , \quad (21a)$$

lo cual expresa el hecho de que la sección para la dispersión es igual al producto de la probabilidad de desintegración por la probabilidad de formación del núcleo compuesto por unidad de corriente.

Cuando existen varios niveles de resonancia la interpretación no es tan clara. Sin embargo, se puede ver de (21) que la dispersión es un efecto coherente. En esta expresión entran exclusivamente términos que son productos de la amplitud para la formación del núcleo compuesto por la amplitud de desintegración del mismo.

### III. Efectos transitorios en la corriente.

La función (7a) que describe el fenómeno de la dispersión se puede poner como:

$$\psi_{00}(\bar{r}, \bar{k}', t) = e^{i(\bar{k}' \cdot \bar{r} - E' t)} + \psi_s(\bar{r}, \bar{k}', t) \quad , \quad (7a)$$

donde  $\psi_s$  representa la onda dispersa y está dada por

$$\psi_s(\bar{r}, \bar{k}', t) = \frac{1}{r} \sum_a \Lambda_a' \chi(r, k_a, t) \quad . \quad (22)$$

Por (22) se puede encontrar el valor de la corriente dispersa a cualquier tiempo  $t$ . Es posible, entonces, seguir el curso de esta corriente desde que se inicia el fenómeno hasta que se establecen las condiciones estacionarias.

En el sistema natural de unidades usado en este trabajo, la corriente dispersa  $j$  está dada por

$$\bar{j}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2i} (\psi_s^* \nabla \psi_s - \psi_s \nabla \psi_s^*) \quad . \quad (23)$$

Puesto que la onda (22) es una onda S, la expresión (23) se puede poner en la forma:

$$\bar{j}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2i} \frac{\bar{r}}{r^3} \left[ (r\psi_s)^* \frac{\partial(r\psi_s)}{\partial r} - (r\psi_s) \frac{\partial(r\psi_s)^*}{\partial r} \right] \quad . \quad (24)$$

Substituyendo (22) en (24) y utilizando los resultados obtenidos en el apéndice II se tiene que

$$\bar{j}(\bar{r}, t) = \frac{\bar{r}}{r^3} \operatorname{Re} \left[ \sum_{\alpha} A'_{\alpha} \chi(r, k_{\alpha}, t) \right]^* \left[ \sum_{\alpha} k_{\alpha} A'_{\alpha} \chi(r, k_{\alpha}, t) \right] \quad , \quad (25)$$

puesto que  $\sum_{\alpha} A'_{\alpha} = 0$  como se puede ver de la definición de  $A'_{\alpha}$  dada por (9a).

De las propiedades de las funciones  $\chi(r, k, t)$  es fácil verificar que

$$\bar{j}(\bar{r}, 0) = 0 \quad (25a)$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$  la suma contenida en el primer factor de (25) se reduce a

$$A' \chi(r, k', t) + \sum_{\alpha} A'_{\alpha} \chi(r, k_{\alpha}, t) \quad , \quad (*)$$

donde esta suma se extiende a todos los valores de  $\alpha$  tales que  $-\frac{\pi}{4} < \arg k_{\alpha} < 0$ . Los términos que corresponden a polos

de  $S(k)$  tales que  $\pi < \arg k_a < \frac{7\pi}{4}$  tienden a cero como se puede ver de la forma asintótica (II.4a) de  $\chi(r, k, t)$ . La suma (\*) representa una superposición de estados que decaen con una vida media dada por (18a). Para tiempos suficientemente grandes estos estados no contribuyen al valor que se observa para la corriente. De todos los términos de (\*), el único que interesa para el cálculo de la corriente estacionaria es el primero.

Los razonamientos que se acaban de hacer son igualmente válidos para la suma que aparece en el segundo factor de (25).

El valor estacionario de la corriente esta dado por

$$\bar{j}(\bar{r}, \infty) = 4k' |A'|^2 \frac{\bar{r}}{r^3}, \quad (26)$$

donde  $A'$  está dado por (9a) para  $k_a = k'$ .

El flujo producido por la corriente  $j(\bar{r}, t)$  está dado por

$$J = \int_{\sigma} \frac{\bar{r}}{r} \cdot \bar{j} d\sigma, \quad (27)$$

donde  $\sigma$  es una superficie esférica con centro en  $r = 0$ .

El flujo estacionario se obtiene substituyendo (26) en (27)

$$J(\infty) = \pi \frac{|S(k') - 1|^2}{k'},$$

y la relación del flujo al tiempo  $t$  al flujo estacionario esta dada por

$$\frac{J(t)}{J(\infty)} = \frac{4k'}{|S(k')-1|^2} F(r, k', t) \quad , \quad (28)$$

con

$$F(r, k', t) = \text{Re} [\sum_a A'_a \chi(r, k_a, t)]^* [\sum_a k_a A'_a \chi(r, k_a, t)] \quad . \quad (28a)$$

Con el objeto de simplificar el análisis que se tiene que hacer para estudiar la dependencia de  $F(r, k', t)$  con respecto al tiempo, se supondrá que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Se va a estudiar el flujo que pasa a través de una esfera de radio  $r_0$  tal que las cantidades

$$k' r_0 \quad , \quad k_j r_0 \quad ,$$

son siempre mucho mayores que la unidad.

Esto es, que la distancia  $r_0$  del dispersor al observador es siempre mucho mayor que cualquiera de las longitudes de onda  $\lambda'$  y  $\lambda_j$ , en que  $\lambda'$  representa la longitud de onda correspondiente a la energía incidente y  $\lambda_j$  la correspondiente a la energía de resonancia  $E_j$ .

b) La semianchura  $\Gamma_j$  correspondiente al nivel  $j$  es mucho menor que la diferencia entre la energía de resonancia  $E_j$  de ese nivel y la energía de las partículas incidentes

$$|E_j - E'| \gg \Gamma_j$$

Cuando  $E' = E_j$ , los resultados son esencialmente los mismos como se verá más adelante.

c) Las anchuras son pequeñas comparadas con las energías de resonancia y también pequeñas comparadas con la diferencia de energías correspondientes a dos resonancias distintas. Esto es:

$$\frac{\Gamma_j}{E_j} \ll 1, \quad \frac{\Gamma_j}{|E_j - E_i|} \ll 1, \quad (i \neq j).$$

Como consecuencia de esto se obtiene lo siguiente:

d) La anchura de la resonancia correspondiente al nivel  $j$  calculada para la energía  $E_i$  de la resonancia  $i$ , es mucho menor que la diferencia entre las dos energías  $E_j$  y  $E_i$ . De la definición (16b,c) esta condición se puede escribir como

$$\sqrt{\frac{E_i}{E_j}} \frac{\Gamma_j}{|E_i - E_j|} \ll 1. \quad (*)$$

Puesto que  $\frac{\Gamma_j}{|E_j - E_i|}, (i \neq j)$  es mucho menor que la unidad, el valor mas desfavorable para (\*) se obtiene cuando  $E_i \gg E_j$ . Pero en este caso  $E_j$  se puede despreciar con respecto a  $E_i$  en el término que contiene la diferencia de las dos. Se obtiene entonces que el miembro izquierdo de (\*) se transforma en

$$\sqrt{\frac{E_j}{E_i}} \frac{\Gamma_j}{E_j},$$

que es mucho menor que la unidad por la condición (c), con lo cual se establece la validez de (\*).

e) Por último se supone que

$$\frac{\Gamma_1}{E_1} \sqrt{k_1 r_0} \gg 1 \quad (*)$$

Segun la teoría de Weisskopf

$$\frac{\Gamma_1}{E_1} \sim \frac{2}{\pi} \frac{k_1}{\kappa}$$

donde  $\kappa$  es el número de onda del interior del núcleo. Para que se cumpla (\*) es preciso que

$$\frac{2}{\pi} \frac{k_1}{\kappa} \sqrt{k_1 r_0} \gg 1 \quad (**)$$

sea mucho mayor que la unidad. La expresión (\*\*) será tanto mas pequeña cuanto mas pequeña sea  $k_1$ . Puesto que no interesan energías menores que las térmicas, se va a evaluar (\*\*) suponiendo que  $E_1 \sim \frac{1}{40}$  ev. Puesto que  $\kappa \sim 10^{13} \text{ cm}^{-1}$  la expresión es del orden de  $10\sqrt{r_0}$ . Entonces, si es cierta la relación de Weisskopf, la relación (\*) es válida si el observador esta colocado a una distancia del dispersor que sea del orden de centímetros o mayor.

Aceptando estas hipótesis es posible adquirir una información mayor acerca de los polos de la función  $S(k)$ , que están dados, como se ve en el apéndice I, por las raíces de la ecuación

$$1 - ikR(E) = 0 \quad (29)$$

Substituyendo en (29) el valor de  $R(E)$  dado por (A.26e), obviamente se tiene:

$$E = E_1 - 2\pi i C_{o_1}^2 k - ik \sum_{j=1}^n {}' 2\pi C_{o_j}^2 \frac{E_1 - E}{E_j - E} \quad , \quad (29a)$$

donde el acento en la suma indica que se excluye el término  $j = i$ .

Si se supone que  $E = E_1$  es, con aproximación cero, una solución de (29a), entonces, a primera aproximación se tendrá:

$$E' = E_1 - 2\pi i C_{o_j}^2 k_1 = E_1 \left[ 1 - i \frac{\Gamma_1}{E_1} \right] \quad , \quad (29b)$$

teniendo en cuenta la definición de  $\Gamma_1$  dada por (16c). Sustituyendo (29b) en (29a) se obtendrá el valor de la raíz en una segunda aproximación, la cual se va a designar por  $E''$ . Se tiene, entonces que

$$E'' = E_1 \left[ 1 - i \frac{\Gamma_1}{E_1} \left( 1 - i \frac{\Gamma_1}{E_1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( 1 - i \frac{\Gamma_1}{E_1} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n {}' \frac{(2\pi C_{o_j}^2 k_1)}{E_j - E_1 + i\Gamma_1} \frac{\Gamma_1}{E_1} \right] .$$

Teriendo en cuenta las hipótesis (c) y (d) se puede ver fácilmente que los términos incluidos en la suma son todos ellos de segundo orden en las cantidades que aparecen en (c) y (d) por el hecho de contener cuadrados de magnitudes que por las hipótesis anteriores son mucho menores que uno. Ahora bien, si se desprecian todos los términos de segundo orden se obtiene que  $E'' = E'$ . Entonces las raíces de (29) están bien representadas por la expresión (29b). En consecuencia

$$k = k_1 \left[ 1 - i \frac{\Gamma_1}{2E_1} \right] \quad , \quad (30)$$

representan los polos de la función  $S(k)$  con una aproximación de primer orden. Evidentemente este cálculo es válido solamente cuando  $E_1 > 0$ , es decir, para las energías que corresponden a resonancia.

La expresión (30) solamente da los polos de  $S(k)$  que se encuentran en el cuarto cuadrante. Por la propiedad P.1 de  $S(k)$  que se muestra en el Apéndice I, los polos situados en el tercer cuadrante estarán dados por:

$$k = k_1 \left[ -1 - i \frac{\Gamma_1}{2E_1} \right] . \quad (30a)$$

Se desea estudiar ahora cuales son las consecuencias de las hipótesis (a) - (e) sobre la función  $\chi(r, k, t)$ . De esta, por el momento, solamente interesa su módulo.

1) La función  $\chi(r, k', t)$  se puede poner en términos de las integrales de Fresnel<sup>2</sup>  $C(u)$  y  $S(u)$  en tal forma que

$$|\chi(r_0, k', t)|^2 = 2 \left[ \left( \frac{1}{2} + C(u) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} + S(u) \right)^2 \right] , \quad (31)$$

con

$$u = \sqrt{\frac{k' r_0}{\pi}} \frac{t/T - 1}{\sqrt{t/T}} , \quad (31a)$$

donde  $T = r_0/k'$  es el tiempo de vuelo. Se puede ver fácilmente que la función (31) toma el valor cero para  $t = 0$  aumentando monótonicamente a medida que el tiempo transcurre hasta llegar a su máximo y oscilando después alrededor del valor 4. Para  $t = T$ , (31) toma el valor 1.

Por lo que respecta a la función  $\chi(r_0, k', t)$  es fácil

ver que su módulo es mucho menor que la unidad. En este caso, por los resultados del Apéndice II, el valor mínimo del módulo de  $z$  está dado por

$$|z|_{\min} = \sqrt{2k'r_0} \quad ,$$

el cual, por la hipótesis (a) es mucho mayor que la unidad. Entonces esta última función puede substituirse por su valor asintótico teniéndose que

$$|\chi(r_0, -k', t)|^2 \approx \frac{1}{|z|^2} \ll 1 \quad . \quad (31b)$$

2) Para las funciones  $\chi(r, k_a, t)$ , en que  $k_a$  es polo de  $S(k)$  situado en la parte interior del plano complejo  $k$ , se obtienen resultados un poco distintos.

Supongase que  $k_{11}$  y  $k_{12}$  son los dos polos de  $S(k)$  asociados con la energía de amarre  $E_1$ , los cuales están dados por (30) y (30a) respectivamente.

Para  $k_{11}$ , por (11) del Apéndice II, se tiene que

$$|z|_{\min} \gg 1 \quad ,$$

puesto que elevando al cuadrado la desigualdad

$$\sqrt{\left(1 + \frac{\Gamma_1^2}{4E_1^2}\right) k_{11}^2 r_0^2} - k_{11} r_0 \gg 1 \quad ,$$

se llega a la condición (e) la cual se ha supuesto válida.

Obviamente para  $k_{12}$  se obtiene que el valor absoluto de la  $z$  correspondiente es siempre mucho mayor que la uni-

dad. Entonces las funciones  $\chi(r_0, k_{11}, t)$  y  $\chi(r_0, k_{12}, t)$  se pueden aproximar por sus valores asintóticos cualquiera que sea el valor del tiempo obteniéndose que\*

$$|\chi(r_0, k_{11,2}, t)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{2t}{(r_0 \mp k_1 t)^2 + \frac{\Gamma_1^2}{4E_1^2} k_1^2 t^2}, \quad (32)$$

tomándose el signo + para  $k_{12}$  y el - para  $k_{11}$ .

Con las consideraciones que se han hecho hasta ahora es posible simplificar bastante la expresión (28a).

Aparece, en primer lugar, un término del tipo  $|\chi(r_0, k', t)|^2$ , del cual conocemos bien su comportamiento con respecto al tiempo. Comparados con este término se despreciarán los términos del tipo  $|\chi(r_0, -k', t)|^2$  y  $\chi(r_0, k', t)\chi(r_0, -k', t)$  o su conjugado, por ser el módulo de  $\chi(r_0, -k', t)$  siempre mu-

---

\* Cuando (32) se utiliza para encontrar el valor de  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|^2$  es conveniente hacer la siguiente observación: la expresión (32) alcanza su máximo ( $t = r_0/k_1$ ),  $\arg z = \pi/4$  y entonces se usa el valor asintótico (II.4a) para la  $\chi$ . A partir de  $t = (r_0/k_1)[1 - (\Gamma_1/2E)]^{-1}$ ,  $\arg z > \frac{\pi}{2}$  y entonces es necesario utilizar para la  $\chi$  el valor asintótico dado por (II.4b). Al tiempo antes indicado la expresión (32) ha bajado solamente a la mitad de su máximo. Sin embargo, es posible seguir utilizando la forma asintótica (II.4a) puesto que el valor de  $e^{z^2}$  es despreciable comparado con el valor de  $|z|^{-1}$  cuando  $\arg z > \pi/2$ . En esta forma (32) da con buena aproximación el valor asintótico de  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|^2$ . En el caso del otro polo,  $k_{12}$ , es fácil ver que no hay ninguna dificultad a este respecto.

cho menor que la unidad como se ha visto anteriormente.

Aparecen otros términos del tipo  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|^2$  que tienen la particularidad de presentar un máximo para  $t = r_0/k_{11}$ . Con respecto a estos se despreciarán los términos del tipo  $|\chi(r_0, k_{12}, t)|^2$  puesto que para  $t \neq 0$  estos son siempre mucho menores que los primeros, pudiéndose decir lo mismo de los términos del tipo  $\chi(r_0, k_{11}, t)\chi(r_0, k_{j2}, t)^*$  y su conjugado, puesto que para  $t = r_0/k_{11}$  son mucho menores que  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|^2$ . Por razonamientos semejantes a estos es fácil admitir que los términos del tipo  $\chi(r_0, k_{11}, t)\chi(r_0, k_{j1}, t)^*$ , y su conjugado, y los del tipo  $\chi(r_0, k_{12}, t)\chi(r_0, k_{j2}, t)^*$  y su conjugado, también se pueden despreciar puesto que no contribuyen apreciablemente al valor de la corriente.

Falta aún discutir los términos del tipo  $\chi(r_0, \pm k', t)\chi(r_0, k_a, t)^*$  y sus conjugados, en que  $k_a$  es polo de  $S(k)$ .

Comparando los términos del tipo  $\chi(r_0, -k', t)\chi(r_0, k_a, t)^*$  con los del tipo  $|\chi(r_0, k_a, t)|^2$  se ve inmediatamente que los primeros son mucho menores que los segundos para cualquier tiempo  $t$ . Lo mismo se puede afirmar de los términos del tipo  $\chi(r_0, k', t)\chi(r_0, k_{12}, t)$  comparados con los del tipo  $\chi(r_0, k', t)\chi(r_0, k_{11}, t)$ .

Finalmente los términos del tipo  $\chi(r_0, k', t)\chi(r_0, k_{11}, t)^*$  y sus conjugados. Se pueden presentar dos casos:

a)  $k_1 > k'$ . En este caso  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|$  alcanza su valor máximo cuando  $|\chi(r_0, k', t)|$  es del orden de cero. Esto se puede ver fácilmente utilizando la hipótesis b). En consecuencia los términos de este tipo pueden despreciarse comparados con los del tipo  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|^2$ .

b)  $k' > k_1$ . Al alcanzar  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|$  su valor máximo,  $|\chi(r_0, k', t)|$  es del orden de la unidad. Entonces los términos que se están considerando presentan interferencia con los términos del tipo  $|\chi(r_0, k_{11}, t)|^2$ . En este caso la contribución de los términos  $\chi(r_0, k_{11}, t)\chi(r_0, k', t)^*$  y sus conjugados no puede ser despreciada.

Por todo lo anteriormente dicho, la expresión (28a) se puede aproximar por

$$F(r_0, k', t) \approx k' |A'|^2 |\chi(r_0, k', t)|^2 + \sum_i k_i |A'_i|^2 |\chi(r_0, k_{11}, t)|^2, \quad (33)$$

donde se ha supuesto que  $k_i > k'$  para toda  $i$ . Entonces la suma se extiende a todo valor de  $i$  tal que  $k_{11}$  es polo de  $S(k)$  situado en el cuarto cuadrante del plano complejo  $k$  y los coeficientes  $A'$  y  $A'_i$  se obtienen de (9a) poniendo  $k_a = k'$  y  $k_a = k_{11}$  respectivamente.

Si para algunos valores de  $i$  se tiene  $k_i < k'$  hay que sumarle a (33) los términos de interferencia correspondientes a cada polo. Esto es, por cada  $k_i < k'$  hay que sumarle un término cuyo valor está dado por

$$\text{Re}[A' A'_i k_i \chi(r_0, k, t)^* \chi(r_0, k_{11}, t) + A' A_i^* k' \chi(r_0, k, t) \chi(r_0, k_{11}, t)^*] \quad (*)$$

Substituyendo (31) y (32) en (33) se obtiene el valor del flujo dado por (28).

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} + S(u) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} + C(u) \right)^2 \right] +$$

$$+ \sum_i \frac{4k'k_1 |A'_i|^2}{|1-S(k')|^2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\left( \frac{\Gamma_i}{2E_1} \right) t}{(\Gamma_i - t)^2 + \left( \frac{\Gamma_i}{2E_1} \right)^2 t^2}, \quad (34)$$

donde  $T_i = r_0/k_i$  es el tiempo de vuelo asociado con la resonancia  $i$ .

Si para algunos valores de  $i$ ,  $k_i < k'$  entonces se deben sumar a (34) los términos del tipo (\*) correspondientes a estos valores.

El primer término que aparece en (34) ha sido estudiado en conexión con otro problema: si en el instante  $t = 0$  se abre un obturador permitiendo así el paso de un haz de partículas de velocidad  $k'$ , un observador que esté situado enfrente del obturador a una distancia  $r_0$  observará que a partir del tiempo  $t = 0$  el flujo de partículas va aumentando hasta alcanzar un máximo después del tiempo de vuelo  $T = r_0/k'$ , oscilando, posteriormente, alrededor del valor estacionario. A este fenómeno se le ha dado el nombre de difracción en el tiempo. En el caso presente, este término que aparece en (34) es debido a un efecto que es independiente de la estructura del núcleo compuesto  $C$ : es un efecto debido a la dispersión por una esfera rígida<sup>3</sup>.

La suma contenida en (34) trae información nueva: el curso de la corriente transitoria se ve modificado por la existencia de energías de resonancia. Este es un efecto debido a la naturaleza de la partícula compuesta  $C$ . A los tiempos  $T_i = r_0/k_i$  se observa una resonancia en la corriente.

En todo este análisis se ha supuesto que ninguno de los núcleos compuestos  $C_1$  tiene una energía de amarre  $E_1$  que sea negativa. Si, por el contrario, alguna de estas partículas compuestas tiene energía de amarre negativa entonces la función  $S(k)$  tiene un polo sobre la parte positiva del eje imaginario  $k$ . Las soluciones al problema de la dispersión y de la desintegración quedan sin modificación: hasta tomar en consideración que hay tantos polos de  $S(k)$  sobre la parte positiva del eje imaginario de  $k$  cuantas sean las partículas  $C_1$  que tienen energía de amarre negativa.

En este caso, la expresión para la corriente está dada también por (34), puesto que todas estas energías de amarre negativas corresponden a estados ligados. Naturalmente que, para que esto sea cierto, es necesario que la distancia  $r_0$  del observador al dispersor sea mucho mayor que la longitud de onda asociada a la partícula ligada.

### Apéndice I.

#### Algunas propiedades de la función $S(k)$ .

La función de colisión  $S(k)$  está definida en términos de la función  $R(E)$  de Wigner como:

$$S(k) = \frac{1 + ikR(E)}{1 - ikR(E)}, \quad (I.1)$$

donde

$$R(E) = \sum_{j=1}^n \frac{2\pi C_{0j}^2}{E_j - E} \quad (A.26e)$$

Las constantes  $C_{0j}$  son todas reales y  $E_j$ , que representa la energía de amarre de la partícula  $C_j$ , es mayor que cero para cualquier valor de  $j$ .

Los polos de la función  $S(k)$  en el plano complejo  $k$  están dados por las raíces de la ecuación

$$F(k) = 1 - ikR(E) = 0 \quad . \quad (I.2)$$

Como se puede ver por (A.26e) la ecuación (I.2) tiene  $2n$  raíces.

P.1. Si  $k_a$  es raíz de  $F(k)$ , entonces  $-k_a^*$  también es.

Si  $1 - ik_a R(E_a) = 0$ , conjugando se obtiene que  $1 - i(-k_a^*)R(E_a^*) = 0$ .

P.2. Las raíces de (I.2) están en la parte inferior del plano complejo  $k$  o sobre el eje imaginario<sup>4</sup>.

P.3. Si  $E_j > 0$  para toda  $j$ , no hay ningún polo de  $S(k)$  situado sobre la parte positiva del eje imaginario. (Sobre esta parte del eje imaginario  $F(k) \geq 1$ ).

P.4.  $S(k)^* = S(-k)$  y  $S(k)^* S(k) = 1$  para  $k$  real<sup>4</sup>.

P.5.  $S(k)$  esté acotada en el punto al infinito. (Esto se puede ver inmediatamente de la definición de  $S(k)$ ).

## Apéndice II.

### Propiedades de la función $\chi(r, k, t)$ .

El valor de la integral

$$\frac{1}{i\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i(kr - Et)}}{k - k_a} dk \quad , \quad (II.1)$$

donde  $k_a$  está situado en la parte inferior del plano complejo  $k$  o sobre el eje real o sobre el eje imaginario (excluyendo de ambos el origen) y  $C$  es un contorno que va de  $-\infty$  a  $+\infty$  que pasa encima de  $k_a$ , está dado por<sup>5</sup>

$$\chi(r, k_a, t) = e^{i(kr - \mathbb{H}t)} \operatorname{erfc}(z), \quad (\text{II.2})$$

donde

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2} du, \quad (\text{II.2a})$$

y

$$z = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{r-kt}{\sqrt{2t}}. \quad (\text{II.2b})$$

Con la ayuda de la definición (II.2) se pueden verificar las siguientes igualdades.

$$\frac{\partial}{\partial r} \chi(r, k, t) = ik\chi(r, k, t) - \frac{1-i}{\sqrt{\pi t}} e^{i\frac{r^2}{2t}}, \quad (\text{II.3a})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi(r, k, t) = -k^2\chi(r, k, t) - \frac{1+i}{\sqrt{\pi t^3}} (r+kt) e^{i\frac{r^2}{2t}}, \quad (\text{II.3b})$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi(r, k, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \chi(r, k, t). \quad (\text{II.3c})$$

Cuando  $|z| \rightarrow \infty$  se tienen las siguientes formas asintóticas:

$$\chi(r, k, t) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \exp(i\frac{r^2}{2t}), & \text{si } -\pi/2 < \arg z < \pi/2. & (\text{II.4a}) \\ (2 \exp(z^2) + \frac{1}{\sqrt{\pi z}}) \exp(i\frac{r^2}{2t}), & \text{si } \pi/2 < \arg z < 3\pi/2. & (\text{II.4b}) \end{cases}$$

El valor mínimo del módulo de  $z$  se alcanza cuando  $t = r/|k|$  y está dado por

$$|z|_{\min} = \sqrt{r(|k| - kx)}. \quad (\text{II.11})$$

Evidentemente que si  $|z|_{\min} \gg 1$  entonces se pueden utilizar los valores asintóticos de  $\chi(r,k,t)$  dados por (II.10a,b) para cualesquiera valores de  $r$  y  $t$ .

### Apéndice III.

#### Integración de las soluciones.

Ante todo se van a copiar las ecuaciones (A.27a) y (A.27b) puesto que van a ser muy útiles para lo que aquí se va a desarrollar.

$$\langle \bar{r} | E \rangle = a_{00}(k) [j_0(kr) - kR(E) n_0(kr)] \quad (\text{III.1})$$

$$\langle j | E \rangle = a_{00}(k) \frac{1}{2} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}} \quad (\text{III.2})$$

donde

$$a_{00}(k) = \sqrt{\frac{k}{2\pi^2}} \frac{1}{i - ikR(E)} \quad (\text{III.3})$$

Ahora bien, para integrar (6a) es necesario encontrar el valor de (6c). Substituyendo (III.1) en (6c) y utilizando los resultados del apéndice del artículo A se obtiene que

$$\langle E | \bar{k}' \rangle = 4\pi a_{00}^*(k) \left[ \frac{\pi}{2k'} \delta(E - E') + \frac{R(E)}{k'^2 - k^2} \right]. \quad (\text{III.4})$$

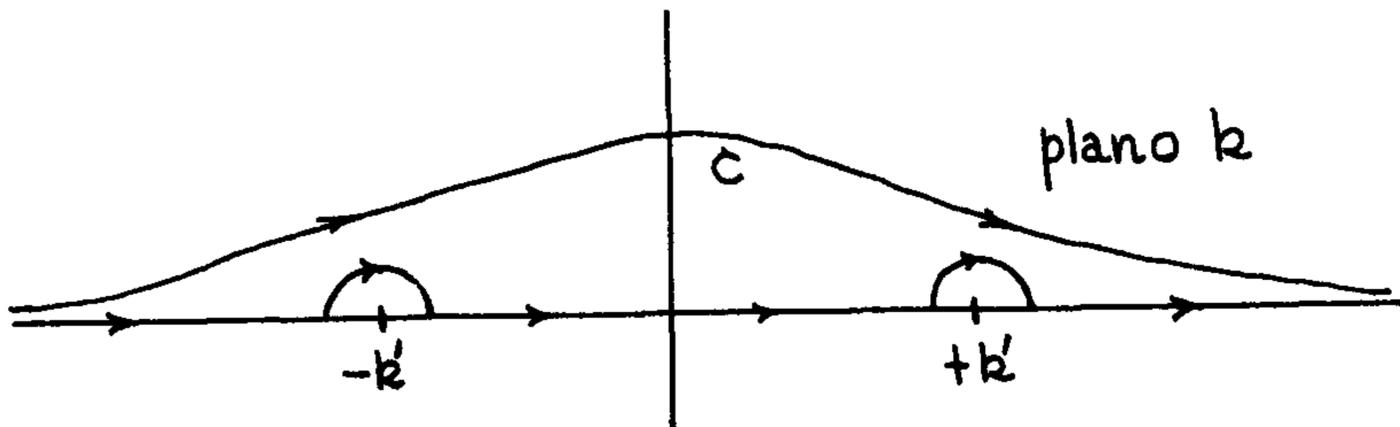
Substituyendo (III.1) y (III.4) en la integral que aparece en (6a) se obtiene lo siguiente

$$\frac{1}{2} \left| \frac{h_0^-(k'r)}{1+ik'R(E')} + \frac{h_0^+(k'r)}{1-ik'R(E')} \right| e^{-iE't} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kR(E)}{1-ikR(E)} \frac{h_0^+(kr)}{k'^2-k^2} e^{-iEt} kdk, \quad (\text{III.4a})$$

donde  $h_0^\pm(\rho)$  está dada por

$$h_0^\pm(\rho) = j_0(\rho) \pm i n_0(\rho). \quad (*)$$

Puesto que el integrando de (III.4a) tiene dos polos ( $k = \pm k'$ ) sobre el intervalo de integración, el valor de la integral estará dado por el de su valor principal de Cauchy. Substituyendo el intervalo de integración por un contorno  $C$  que pase por encima de todos los polos del integrando de (III.4a) y de los polos de  $\frac{\partial R(E)}{\partial C_{01}}$  (posteriormente se verá la razón de esto último), y que vaya de  $-\infty$  a  $+\infty$  se tendrá:



$$P \int_{-\infty}^{+\infty} -i\pi \text{Res}(k = -k') - i\pi \text{Res}(k = k') = \int_0, \quad (\text{III.4b})$$

donde  $P$  indica que se toma el valor principal de la integral

que aparece en (III.4a),  $\text{Res}(k = -k')$  y  $\text{Res}(k = k')$  representan los residuos del integrando de (III.4a) en  $-k'$  y  $k'$  respectivamente. Calculando estos residuos la expresión en cuestión se transforma en:

$$j_0(k'r)e^{-iE't} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{kR(E)}{1-ikR(E)} \frac{h_0^+(kr)}{k'^2 - k^2} e^{-iEt} kdk. \quad (\text{III.4c})$$

Lo que se ha hecho aquí, de sustituir la integral por su valor principal en el caso de que el integrando tenga polos sobre el intervalo de integración y de sustituir este intervalo por un contorno que pase por encima de todos los polos del integrando y que vaya de  $-\infty$  a  $+\infty$ , se hará en lo futuro cuando sea necesario sin entrar en mayores detalles.

Poniendo (III.4c) en el lugar de la integral que aparece en (6a) y recordando la definición de  $S(k)$  dada por (I.1), se obtiene:

$$\langle \bar{r} | \bar{k}' t \rangle = e^{i(\bar{k}' \cdot \bar{r} - E't)} - \frac{1}{2\pi r} \int_C \frac{S(k) - 1}{k'^2 - k^2} e^{i(kr - Et)} dk. \quad (\text{III.4d})$$

Si  $k_a$  son los polos de la función

$$\frac{S(k)}{k^2 - k'^2} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{01}} \quad (\text{III.5})$$

el integrando que aparece en (III.4d) se puede desarrollar en la forma siguiente:

$$\frac{i}{2} \frac{S(k) - 1}{k'^2 - k^2} = \sum_a \frac{A'_a}{k - k_a}, \quad (\text{III.5a})$$

con

$$A'_a = \frac{i}{2} \text{Res} \left[ \frac{1 - S(k)}{k^2 - k'^2} \right]_{k = k_a} \quad (\text{III.5b})$$

Evidentemente los coeficientes  $A'_a$  correspondientes a los polos  $k_a$  de  $\frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}}$  son cero, puesto que el integrando de (III.4d) es regular en esos puntos. La suma de (III.5a) se extiende a todos los valores de  $a$  tales que  $k_a$  sea polo de (III.5).

Por (III.5a) y (II.2) la expresión (III.4d) queda finalmente como:

$$\langle \bar{r} | \bar{k}' t \rangle = e^{i(\bar{k}' \cdot \bar{r} - E' t)} + \frac{1}{r} \sum_a A'_a \chi(r, k_a, t), \quad (\text{III.5c})$$

que es lo escrito en (7a).

Sustituyendo (III.2) y (III.4) en (6b), esta expresión adquiere la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}} (1 + S(k)) \delta(E - E') e^{-iEt} k^2 dk + \\ & + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}} \frac{S(k) - 1}{k'^2 - k^2} e^{-iEt} k dk. \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

El integrando que aparece en la segunda integral de (III.6) tiene dos polos ( $k = \pm k'$ ) sobre el intervalo de integración. Haciendo lo mismo que se hizo en el caso anterior se tiene que el valor de (III.6) es:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial R(E')}{\partial C_{0j}} e^{-iE't} + \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}} \frac{S(k) - 1}{k'^2 - k^2} e^{-iEt} k dk. \quad (\text{III.6a})$$

Teniendo en cuenta que

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}} \frac{e^{-iEt}}{k'^2 - k^2} k dk = - \frac{1}{2} \frac{\partial R(E')}{\partial C_{0j}} e^{-iE't}, \quad (\text{III.6b})$$

por (III.6a) y (III.6b), la expresión (6b) se transforma en:

$$\langle j | \bar{k}' t \rangle = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}} \frac{S(k) + 1}{k'^2 - k^2} e^{-iEt} k dk. \quad (\text{III.6c})$$

Definiendo

$$A'_{aj} = - \frac{1}{4} k_a \text{Res} \left[ \frac{\partial R(E)}{\partial C_{0j}} \frac{S(k) + 1}{k'^2 - k^2} \right]_{k=k_a} \quad (\text{III.6d})$$

y teniendo en cuenta (II.2), la expresión (III.6c) adquiere finalmente la forma

$$\langle j | \bar{k}' t \rangle = \sum_a A'_{aj} \chi(0, k_a, t). \quad (\text{III.6e})$$

Evidentemente los coeficientes  $A'_{\alpha j}$  correspondientes a los polos de  $\frac{\partial R(E)}{\partial C_{\alpha 1}}$  son cero. La suma de (III.6e) se extiende a todos los valores  $\alpha$  tales que  $k_{\alpha}$  sea polo de (III.5).

Sustituyendo (III.1) y (III.2) en (IIa) se obtiene:

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{\alpha 1}} \left[ h_0^-(kr) + S(k) h_0^+(kr) \right] \left[ 1 + S^*(k) \right] e^{-iEt} k^2 dk, \quad (III.7)$$

donde  $h_0^{\pm}(kr)$  está definida por (\*).

La integral (III.7) puede separarse en dos partes: una que contenga a  $h_0^+(kr)$  y la otra que contenga a  $h_0^-(kr)$ . Cambiando  $k$  por  $-k$  en la integral que contiene a  $h_0^-(kr)$  y recordando la propiedad P.4 de  $S(k)$ , la expresión (III.7) se transforma en:

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{\alpha 1}} \left[ 1 + S(k) \right] h_0^+(kr) e^{-iEt} k^2 dk. \quad (III.7a)$$

Todos los polos del integrando de (III.7) están abajo del eje real del plano  $k$ . Definiendo

$$A_{\alpha 1} = - \frac{k_{\alpha}}{16\pi} \text{Res} \left[ \frac{\partial R(E)}{\partial C_{\alpha 1}} (1 + S(k)) \right]_{k=k_{\alpha}} \quad (III.7b)$$

por (II.2), la expresión (III.7a) toma finalmente la forma:

$$\langle \bar{F} | it \rangle = \frac{1}{r} \sum_{\alpha} A_{\alpha 1} \chi(r, k_{\alpha}, t) \quad (III.7c)$$

Obviamente los coeficientes  $A_{a_i}$  correspondientes a los polos de  $\frac{1}{k'^2 - k^2} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{o1}}$  son cero.

Finalmente, sustituyendo la expresión (III.2) en (II.b) se obtiene

$$\langle j | i t \rangle = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^{\infty} \left[ 1 + S(k) \right] \left[ 1 + S^*(k) \right] \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oj}} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oi}} e^{-iEt} k^2 dk. \quad (\text{III.8})$$

Teniendo en cuenta que

$$\left[ 1 + S(k) \right] \left[ 1 + S^*(k) \right] = \left[ 1 + S(k) \right] + \left[ 1 + S^*(k) \right],$$

la expresión (III.8) se convierte en:

$$\frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + S(k) \right] \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oj}} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oi}} e^{-iEt} k^2 dk. \quad (\text{III.8a})$$

Cuando  $j \neq i$  no hay ningún polo del integrando que se encuentre sobre el eje real. Por el contrario, si  $j = i$  hay dos polos sobre el eje real ( $k = \pm k_1$ ). Como se ha hecho en otros casos se sustituye el intervalo de integración por un contorno que pase por encima de todos los polos del integrando, transformándose la expresión (III.8a) en

$$\delta_{ij} e^{-iE_1 t} + \frac{1}{32\pi^2} \int_0^{\infty} \left[ 1 + S(k) \right] \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oj}} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oi}} e^{-iEt} k^2 dk. \quad (\text{III.8b})$$

Definiendo

$$A_{aj1} = \frac{1}{32\pi i} k_a^2 \operatorname{Res} \left[ \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oj}} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oi}} (1 + S(k)) \right]_{k=k_a} \quad (\text{III.8c})$$

y teniendo en cuenta (II.2) la expresión (III.8), toma la forma:

$$\langle j | i t \rangle = \delta_{ij} e^{-iE_1 t} + \sum_a A_{aj1} \chi(0, k_a, t) \quad (\text{III.8d})$$

Cuando  $i \neq j$  los coeficientes de  $A_{aj1}$  correspondientes a los polos de  $\frac{1}{k'^2 - k^2} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oi}}$ , son cero y cuando  $i = j$  solamente los correspondientes a los polos de  $\frac{1}{k'^2 - k^2}$ .

Las soluciones así obtenidas para la dispersión y desintegración satisfacen las condiciones iniciales dadas por (5a,b) y (10a,b) respectivamente.

Poniendo  $t = 0$  en (III.5c), por (II.4a) se obtiene (5a). Haciendo lo mismo con (III.6c) se obtiene:

$$\langle j | \bar{k}' \rangle = \sum_a A'_{aj} \quad (\text{III.9})$$

Se puede demostrar que la suma que aparece en (III.9) es cero, puesto que la integral en el plano  $k$ , a lo largo de una circunferencia con centro en el origen y de radio infinito, de una función con polos  $k_a$  y con residuos  $A'_{aj}$  en estos polos tiene por valor cero. En esta forma (III.9) se reduce a

(5b).

Poniendo  $t = 0$  en (III.7c), por (II.4a) se obtiene (10.a). Haciendo lo mismo con (III.8d) se obtiene que

$$\langle j | i_0 \rangle = \delta_{ij} + \sum_a A_{aj1} . \quad (\text{III.9a})$$

Se puede demostrar que la suma que aparece en (III.9a) es cero por un procedimiento análogo al que se siguió para demostrar que la suma en (III.9) es cero. En esta forma se verifica (10b).

Las soluciones deben satisfacer también la ecuación de Schrödinger para partícula libre dada por (A.16a) y las condiciones a la frontera dadas por (A.16b) y (A.16c).

Con la ayuda de la relación (II.3c) es fácil ver que tanto (III.5c) como (III.7c) satisfacen (A.16a).

Sustituyendo (III.5c) y (III.6c) en (A.16b), se obtiene que debe cumplirse la relación

$$A'_a - \sum_j C_j A'_{aj} = 0 . \quad (\text{III.10})$$

Es fácil ver que (III.10) se cumple sustituyendo los valores de  $A'_a$  y  $A'_{aj}$  y teniendo en cuenta la propiedad que tiene  $R(E)$ :

$$R(E) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n C_{oj} \frac{\partial R(E)}{\partial C_{oj}} . \quad (\text{III.10a})$$

También (III.7c) y (III.8d) satisfacen (A.16b) teniendo en cuenta que las siguientes relaciones son ciertas:

$$A_{a1} - \sum_{j=1}^N C_{oj} A_{aj1} = 0 ,$$

y

$$\chi(0, k, t) + \chi(0, -k, t) = 2e^{-iE_1 t} . \quad (\text{III.10b})$$

Con el auxilio de (II.3a), (II.3b), (III.10b) y de que

$$\sum_a [-\frac{1}{2} (1+i) k_a A'_{aj} + 2\pi C_{oj} (1-i) A'_a] = 0 , \quad (\text{III.10c})$$

se puede ver fácilmente que (III.5c) y (III.6e) satisfacen (A.16c).

Para demostrar (III.10c) se sigue un método del todo análogo al que se siguió para demostrar la relación (III.9).

En una forma enteramente semejante se puede ver que (III.7c) y (III.8d) satisfacen (A.16c).

#### REFERENCIAS

1. F.M. Medina N., Rev.Mex.Fis., 2, 117, (1953).
2. E. Jahnke and F. Emde, Tables of functions (Dover Publications, New York, 1945), cuarta edición, p.36.
3. M. Moshinsky, Phys.Rev., 88, 625, (1952) y Rev.Mex.Fis, 1, 28, (1952).
4. J.M. Lozano y F.M. Medina N., Rev.Mex.Fis, 1, 102, (1952).
5. M. Moshinsky, Phys.Rev., 84, 525, (1951).