SOBRE UN OPERADOR UTIL EN LA ECUACION DE BHABHA

Fernando E. Prieto C.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Enero 25, 1954)

RESUMEN

An explicit form of the operator $p^2(p-\kappa)(p^2-a_j^2\, m_1^2)$, *needed in the calculation of matrix elements for any process*[6], *and whose columns are free particle solutions of the equation* $(p+\hat{\kappa})\,\psi = 0$, *is given in this paper for the case of Bhabha equation*[4].

I.- INTRODUCCION

En un articulo reciente, Sugawara[1] ha hecho notar qué los momentos magnéticos anómalos de los nucleones pueden ser descritos correctamente de un modo fenomenológico suponiendo la posibilidad de transiciones virtuales de los nucleones a un estado excitado con spin y spin isotópico 3/2. Posteriormente, Matsumoto, Hamada y el propio Sugawara[2] comenzaron a atacar el problema suponiendo que los nucleones en su estado base estan descritos por una ecuación de Dirac, y en su estado excitado por una ecuación de Rarita-Schwinger, calculando el efecto de los estados excitados sobre los potenciales nucleares. Finalmerte, Hamada[3] ha calculado por este método la anomalía magnética, obteniendo resultados que no son satisfactorios.

Por otra parte, Bhabha[4] ha propuesto una ecuación relativista que describe a una partícula con dos estados diferentes de masa, uno de los cuales corresponde a spin 1/2, y otro a spin 3/2. Es pues inmediato, en vista del trabajo de los japoneses, que es de gran interés tratar el problema de la anomalía magnética usando la ecuación de Bhabha para describir los nucleones tanto en su estado base como en su estado excitado. Existe, sin embargo, la dificultad de que la ecuación de Bhabha esta aun poco explorada, y de hecho los parámetros que en ella intervienen aun no han sido determinados. Esto hace necesario atacar primero problemas mas sencillos que el indicado, con el objeto no solo de conocer las consecuencias físicas que tal suposicion tendría, sino también con miras a tratar de ajustar los parámetros de la ecuación de un modo tal que se describan correctamente algunos fenómenos sencillos, y después probar la ecuación con los parámetros ya determinados, mediante el cálculo de procesos mas complicados.

En este trabajo se ha calculado la forma explícita de un operador matricial que es de gran utilidad, como lo ha hecho notar Udgaonkar[6], para el cálculo de elementos de matriz, y que además da automáticamente las soluciones de la ecuación de Bhabha para una partícula libre[5,6].

II.- LA ECUACION DE BHABHA

La ecuación de Bhabha es de la forma[4]:

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} + \kappa)\ \psi = 0 \qquad \text{II.1}$$

en la que la variable ψ del campo es un vector columna de 20 componentes

$$\psi = [\varphi^{rs}_{\dot{a}}\ \xi_{\dot{r}}\ \eta_{\dot{r}}\ \varphi^{m}_{\dot{r}\dot{s}}\ \zeta^{r}\ \eta^{r}] \quad . \qquad \text{II.2}$$

Las componentes del primer espinor están tomadas en el orden $\varphi^{11}_{\dot{1}}$, $\sqrt{2}\,\varphi^{12}_{\dot{1}}$, $\varphi^{22}_{\dot{1}}$, $\varphi^{11}_{\dot{2}}$, $\sqrt{2}\,\varphi^{12}_{\dot{2}}$, $\varphi^{22}_{\dot{2}}$, y análogamente para el espinor $\varphi^{m}_{\dot{r}\dot{s}}$, los otros espinores están tomados en el orden $\xi_{\dot{1}}$, $\xi_{\dot{2}}$, y análogamente para $\eta_{\dot{r}}$, ξ^{r} y η^{r}.

Las matrices γ^{μ} son de la forma

$$\gamma^{0} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{0} \\ \alpha^{0} & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma^{k} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{k} \\ -\alpha^{k} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{II.3}$$

en donde las α's son matrices 10×10 definidas por

$$a^{\mu} = \begin{bmatrix} u^{\mu} & c_3 v^{\mu} & c_2 v^{\mu} \\ -c_3 v^{\mu\dagger} & a_2 z^{\mu} & 0 \\ -c_2 v^{\mu\dagger} & 0 & a_3 z^{\mu} \end{bmatrix} \qquad \text{II.4}$$

con

$$u^{0} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \qquad u^{1} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \end{bmatrix}$$

II.5a

$$u^{2} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot \end{bmatrix} \qquad u^{3} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$
v^0 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad
v^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad
v^2 = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \cdot & \frac{i}{2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{i}{2} & \cdot \\ \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad
v^3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad \text{II.5b}
$$

$$
z^0 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad
z^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad
z^2 = \begin{bmatrix} \cdot & -i \\ i & \cdot \end{bmatrix} \quad
z^3 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{II.5c}
$$

Los parámetros de las matrices definidas por II.4 satisfacen las condiciones:

$$
a_2 > \tfrac{1}{2} \;, \qquad a_3 = \tfrac{1}{2} - a_2 - |\lambda| \;,
$$

$$
c_2^2 = \frac{4}{3}\, a_3^2 \left(\frac{a_2 - \frac{1}{2}}{a_2 - a_3}\right), \qquad c_3^2 = \frac{4}{3}\, a_2^2 \left(\frac{\frac{1}{2} - a_3}{a_2 - a_3}\right) \qquad \text{II.6}
$$

La ecuación así definida describe a una partícula con un estado de masa κ y spin 3/2, y otro estado de masa κ/λ y spin 1/2.

III.- LAS SOLUCIONES PARA UNA PARTICULA LIBRE.

Bhabha ha demostrado que

$$\psi(x) = u(\underline{p},r,s)\ \exp(ipx) \qquad \text{III.1}$$

es una solución de la ecuación de movimiento II.1, correspondiente a una partícula con una cierta masa $m_j = \kappa/a_j$, impulso* $\underline{p}$, spin s y energía

$$p_0(r) = \pm\,\omega_j(\underline{p}) = \pm\sqrt{\underline{p}^2 + \kappa^2/a_j^2} \quad , \qquad \text{III.2}$$

r toma los valores 1 y 2, y distingue a la partida de la antipartícula, en tanto que a_j representa a los eigen-valores no nulos de la ecuación mínima para γ^0:

$$(\gamma^0)^2((\gamma^0)^2 - 1)((\gamma^0)^2 - \lambda^2) = 0 \quad . \qquad \text{III.3}$$

Sea

$$P = \gamma^\mu\ p_\mu \quad , \qquad \text{III.4}$$

con

$$p_\mu = -i\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \qquad \text{III.5}$$

este operador satisface la ecuación mínima

$$P^2(P^2-p^2)(P^2-\lambda^2 p^2) = 0 \quad , \qquad \text{III.6}$$

---

*Para abreviar la escritura se ha convenido en llamar "impulso" a la "cantidad de movimiento .

y en el caso de la partícula libre esta ecuación se reduce a

$$P^2(P^2-\kappa^2)(P^2-M_i^2) = 0 \quad , \qquad \text{III.7}$$

con

$$M_i^2 = \begin{cases} \kappa^2\lambda^2 & \text{si} \quad i = 1 \quad m_i = \kappa \\ \kappa^2/\lambda^2 & \text{si} \quad i = 2 \quad m_i = \dfrac{\kappa}{\lambda} \end{cases} \qquad \text{III.8}$$

Es inmediato por otra parte que el operador P conmuta consigo mismo y con cualquier matriz diagonal, entonces III.7 puede escribirse

$$(P+\kappa)\ \{P^2(P-\kappa)(P^2-M_i^2)\} = 0 \quad , \qquad \text{III.9}$$

de lo cual se deduce que el operador

$$\{u_i\} \equiv \{u_i(p,r,s)\} = P^2(P-\kappa)(P^2-M_i^2) \quad , \qquad \text{III.10}$$

es una matriz cuyas columnas dan soluciones de la ecuación de movimiento II.1 correspondientes a una partícula libre con masa m_i, impulso $\underline{p}$, spin s y energía $p_o(r)$.

IV.- CALCULO DEL OPERADOR $\{u_i\}$.

Usando las ecuaciones II.3, II.4 y III.4 se encuentra

$$\{u_i\} = \begin{bmatrix} -\kappa\Gamma_o(p_o,p_k) & \Gamma_1(p_o,p_k) \\ \Gamma_1(p_o,-p_k) & -\kappa\Gamma_o(p_o,-p_k) \end{bmatrix} \qquad \text{IV.1}$$

con

$$\Gamma_0(p_0,p_k) = \phi(p_0,p_k)(\phi(p_0,p_k)-M_1^2\, I_{10}) \quad . \qquad \text{IV.2}$$

$$\Gamma_1(p_0,p_k) = \beta(p_0,p_k)(\phi(p_0,-p_k)-M_1^2\, I_{10}) \quad . \qquad \text{IV.3}$$

$$\beta(p_0,p_k) = \phi(p_0,p_k)\ \alpha(p_0,p_k) \quad . \qquad \text{IV.4}$$

$$\phi(p_0,p_k) = \alpha(p_0,p_k)\ \alpha(p_0,-p_k) \quad . \qquad \text{IV.5}$$

$$\alpha(p_0,\pm p_k) = \alpha^0 p_0 \pm \alpha^k p_k \quad . \qquad \text{IV.6}$$

Para abreviar la notación vamos a usar para las matrices la convención

$$M(p_0,\pm p_k) = M^{\pm} \quad , \qquad \text{IV.7}$$

y para polinomios en las componentes del impulso

$$p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \qquad p_+^2 = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

$$\text{IV.8}$$

$$p_{0\pm3} = p_0 \pm p_3 \ ,\quad p_{1\pm2} = p_1 \pm i p_2 \ ,\quad p_{03}^2 = p_0^2 - p_3^2 \ ,\quad p_{12}^2 = p_1^2 + p_2^2$$

Las matrices Γ_0 y Γ_1 son de la forma

$$\Gamma_0(p_0,p_k) = \begin{bmatrix} (p^2-M_1^2)\phi_0^+ + g_0\zeta^+ & g_1^{32}\ \phi_1^+ & g_1^{23}\ \phi_1^+ \\ -g_1^{32}\ \phi_2^+ & g_2^{32}\ I_2 & g_3\ I_2 \\ -g_1^{23}\ \phi_2^+ & g_3\ I_2 & g_2^{23}\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \text{IV.9}$$

$$\Gamma_1(p_0, p_k) = \begin{bmatrix} (p^2 - M_1^2)\beta_0^+ + h_0\eta^+ & h_1^{32}\ \beta_1^+ & h_1^{23}\ \beta_1^+ \\ h_4^{32}\ \beta_2^+ & h_2^{32}\ \beta_3^+ & h_3^{23}\ \beta_3^+ \\ h_4^{23}\ \beta_2^+ & h_3^{32}\ \beta_3^+ & h_2^{23}\ \beta_3^+ \end{bmatrix} \qquad \text{IV.10}$$

$$\phi_0^+ = \begin{bmatrix} (\phi_0^+)_{11} & (\phi_0^+)_{12} \\ (\phi_0^+)_{21} & (\phi_0^+)_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.11}$$

$$(\phi_0^+)_{11} = \begin{bmatrix} p^2 + bp_{12}^2 & \frac{b}{\sqrt{2}}\, p_{0-3}p_{1-2} & 0 \\ -\frac{b}{\sqrt{2}}\, p_{0+3}p_{1+2} & (1-\frac{b}{2})\ p^2 & \frac{b}{\sqrt{2}}\, p_{0-3}p_{1-2} \\ 0 & -\frac{b}{\sqrt{2}}\, p_{0+3}p_{1+2} & p^2 - bp_{03}^2 \end{bmatrix} \qquad \text{IV.11a}$$

$$(\phi_o^+)_{12} = \begin{bmatrix} -bp_{o+3}p_{1+2} & -\frac{b}{\sqrt{2}}p_{1-2}^2 & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{2}}p_{o+3}^2 & 0 & -\frac{b}{\sqrt{2}}p_{1-2}^2 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{2}}p_{o+3}^2 & bp_{o+3}p_{1-2} \end{bmatrix} \quad \text{IV.11b}$$

$$(\phi_o^+)_{21} = \begin{bmatrix} bp_{o-3}p_{1+2} & \frac{b}{\sqrt{2}}p_{o-3}^2 & 0 \\ -\frac{b}{\sqrt{2}}p_{1+2}^2 & 0 & \frac{b}{\sqrt{2}}p_{o-3}^2 \\ 0 & -\frac{b}{\sqrt{2}}p_{1+2}^2 & -bp_{o-3}p_{1+2} \end{bmatrix} \quad \text{IV.11c}$$

$$(\phi_o^+)_{22} = \begin{bmatrix} p^2 - bp_{o3}^2 & -\frac{b}{\sqrt{2}}p_{o-3}p_{1-2} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{2}}p_{o+3}p_{1+2} & (1-\frac{b}{2})\ p^2 & -\frac{b}{\sqrt{2}}p_{o-3}p_{1-2} \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{2}}p_{o+3}p_{1+2} & p^2 + bp_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \text{IV.11d}$$

$$\tilde{\phi}_1^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3}p_{1-2} & \frac{1}{2} p_+^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3}p_{1+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3}^2 & p_{o-3}p_{1+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{1+2}^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} p_{1-2}^2 & -p_{o+3}p_{1-2} & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3}^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3}p_{1-2} & -\frac{1}{2} p_+^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3}p_{1+2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.12}$$

$$\phi_2^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3}p_{1+2} & -\frac{1}{2} p_+^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3}p_{1-2} & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3}^2 & p_{o+3}p_{1-2} & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{1-2}^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{1+2}^2 & -p_{o-3}p_{1+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3}^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3}p_{1+2} & \frac{1}{2} p_+^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3}p_{1-2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.13}$$

$$\tilde{\beta}_1^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{1-2} & \frac{1}{2} p_{o+3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3} & \frac{1}{2} p_{1+2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} p_{1-2} & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3} & 0 & -\frac{1}{2} p_{o-3} & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{1+2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.14}$$

$$\beta_2^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} p_{1+2} & -\frac{1}{2} p_{o+3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} p_{o-3} & -\frac{1}{2} p_{1-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} p_{1+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{o+3} & 0 & \frac{1}{2} p_{o-3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} p_{1-2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.15}$$

$$\beta_o^+ = \begin{bmatrix} (\beta_o^+)_{11} & (\beta_o^+)_{12} \\ & \\ (\beta_o^+)_{21} & (\beta_o^+)_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{IV. 16}$$

$$(\beta_o^+)_{11} = \begin{bmatrix} p_{o-3}(p^2+\frac{d}{2}\,p_{12}^2) & -\frac{1}{\sqrt{2}}p_{1-2}(p^2+\frac{d}{2}\,p_+^2) & \frac{d}{2}\,p_{o+3}p_{1-2}^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,p_{1+2}(p^2+\frac{d}{2}\,p_+^2) & \frac{1}{2}\,p_{o+3}(p^2+dp_{12}^2+\frac{d}{2}\,p_+^2) & -\frac{d}{\sqrt{2}}\,p_{o+3}^2p_{1-2} \\ \frac{d}{2}\,p_{o+3}p_{1+2}^2 & -\frac{d}{\sqrt{2}}p_{o+3}^2p_{1+2} & \frac{d}{2}\,p_{o+3}^3 \end{bmatrix} \qquad \text{IV. 16a}$$

$$(\beta_o^+)_{12} = \begin{bmatrix} \frac{d}{2}\,p_{o-3}^2p_{1-2} & -\frac{d}{\sqrt{2}}p_{o-3}p_{1-2}^2 & \frac{d}{2}\,p_{1-2}^3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,p_{o-3}(p^2-\frac{d}{2}\,p_+^2) & -\frac{1}{2}\,p_{1-2}(p^2-dp_{o3}^2-\frac{d}{2}\,p_+^2) & -\frac{d}{\sqrt{2}}\,p_{o+3}p_{1-2}^2 \\ -p_{1+2}(p^2-\frac{d}{2}\,p_{o3}^2) & \frac{1}{\sqrt{2}}p_{o+3}(p^2-\frac{d}{2}\,p_+^2) & \frac{d}{2}\,p_{o+3}^2p_{1-2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV. 16b}$$

$$(\beta_o^+)_{21} = \begin{bmatrix} \frac{d}{2}\,p_{o-3}^2p_{1+2} & \frac{1}{\sqrt{2}}p_{o-3}(p^2-\frac{d}{2}\,p_+^2) & -p_{1-2}(p^2-\frac{d}{2}\,p_{o3}^2) \\ -\frac{d}{\sqrt{2}}p_{o-3}p_{1+2}^2 & +\frac{1}{2}\,p_{1+2}(p^2-dp_{o3}^2-\frac{d}{2}\,p_+^2) & \frac{1}{\sqrt{2}}\,p_{o+3}(p^2-\frac{d}{2}\,p_+^2) \\ \frac{d}{2}\,p_{1+2}^3 & -\frac{d}{\sqrt{2}}p_{o+3}p_{1+2}^2 & \frac{d}{2}\,p_{o+3}^2p_{1+2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV. 16c}$$

$$(\beta_0^+)_{22} = \begin{bmatrix} \frac{d}{2}\, p_{0-3}^3 & -\frac{d}{\sqrt{2}}\, p_{0-3}^2 p_{1-2} & \frac{d}{2}\, p_{0-3} p_{1-2}^2 \\ -\frac{d}{\sqrt{2}}\, p_{0-3}^2 p_{1+2} & \frac{1}{2}\, p_{0-3}(p^2 + d p_{12}^2 + \frac{d}{2}\, p_+^2) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{1-2}(p^2 + \frac{d}{2}\, p_+^2) \\ \frac{d}{2}\, p_{0+3}^2 p_{1+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{1+2}(p^2 + \frac{d}{2}\, p_+^2) & p_{0+3}(p^2 + \frac{d}{2}\, p_{12}^2) \end{bmatrix} \qquad \text{IV.16d}$$

$$\beta_3^+ = \begin{bmatrix} p_{0+3} & p_{1-2} \\ p_{1+2} & p_{0-3} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.17}$$

$$\zeta^+ = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^+ & \zeta_{12}^+ \\ \zeta_{21}^+ & \zeta_{22}^+ \end{bmatrix} \qquad \text{IV.18}$$

$$\zeta_{11}^+ = \begin{bmatrix} p_{12}^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0-3} p_{1-2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0+3} p_{1+2} & -\frac{1}{2}\, p^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0-3} p_{1-2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0+3} p_{1+2} & -p_{03}^2 \end{bmatrix} \qquad \text{IV.18a}$$

$$\zeta^{+}_{12} = \begin{bmatrix} -p_{0+3}p_{1-2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{1-2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{0+3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{1-2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{0+3} & p_{0+3}p_{1-2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.18b}$$

$$\zeta^{+}_{21} = \begin{bmatrix} p_{0-3}p_{1+2} & \frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{0-3} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{1+2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{0-3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}p^{2}_{1+2} & -p_{0-3}p_{1+2} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.18c}$$

$$\zeta^{+}_{22} = \begin{bmatrix} -p^{2}_{03} & -\frac{1}{\sqrt{2}}p_{0-3}p_{1-2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}p_{0+3}p_{1+2} & -\frac{1}{2}p^{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}p_{0-3}p_{1-2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}p_{0+3}p_{1+2} & p^{2}_{12} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.18d}$$

$$\eta^{+} = \begin{bmatrix} \eta^{+}_{11} & \eta^{+}_{12} \\ \eta^{+}_{21} & \eta^{+}_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{IV.19}$$

$$\eta^{+}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, p_{0-3}p^{2}_{12} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{1-2}p^{2}_{+} & \frac{1}{2}\, p_{0+3}p^{2}_{1-2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{1+2}p^{2}_{+} & \frac{1}{2}\, p_{0+3}[p^{2}_{12} + \frac{1}{2}\, p^{2}_{+}] & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p^{2}_{0+3}p_{1-2} \\ \frac{1}{2}\, p_{0+3}p^{2}_{1+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p^{2}_{0+3}p_{1+2} & \frac{1}{2}\, p^{3}_{0+3} \end{bmatrix} \quad \text{IV.19a}$$

$$\eta^{+}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, p_{1+2}p^{2}_{0-3} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0-3}p^{2}_{1-2} & \frac{1}{2}\, p^{3}_{1-2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{0-3}p^{2}_{+} & \frac{1}{2}\, p_{1-2}(p^{2}_{03} + \frac{1}{2}\, p^{2}_{+}) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0-3}p^{2}_{1-2} \\ \frac{1}{2}\, p_{1+2}p^{2}_{03} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{0+3}p^{2}_{+} & \frac{1}{2}p^{2}_{0+3}p_{1-2} \end{bmatrix} \quad \text{IV.19b}$$

$$\eta^{+}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, p_{1+2}p^{2}_{0-3} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{0-3}p^{2}_{+} & \frac{1}{2}\, p_{1-2}p^{2}_{03} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0-3}p^{2}_{1+2} & \frac{1}{2}\, p_{1+2}(p^{2}_{03} + \frac{1}{2}\, p^{2}_{+}) & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{0+3}p^{2}_{+} \\ \frac{1}{2}\, p^{3}_{1+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p_{0+3}p^{2}_{1+2} & \frac{1}{2}\, p^{2}_{0+3}p_{1+2} \end{bmatrix} \quad \text{IV.19c}$$

$$\eta^{+}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\, p^{3}_{0-3} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p^{2}_{0-3}p_{1-2} & \frac{1}{2}\, p_{0-3}p^{2}_{1-2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p^{2}_{0-3}p_{1+2} & \frac{1}{2}\, p_{0-3}(p^{2}_{12} + \frac{1}{2}\, p^{2}_{+}) & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{1-2}p^{2}_{+} \\ \frac{1}{2}\, p_{0-3}p^{2}_{1+2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, p_{1+2}p^{2}_{+} & \frac{1}{2}\, p_{0+3}p^{2}_{12}. \end{bmatrix} \quad \text{IV.19d}$$

Las matrices Γ_0^- y Γ_1^- se obtienen de la correspondiente Γ^+ haciendo simplemente las substituciones $p_{0\pm3} \to p_{0\mp3}$ y $p_{1\pm2} \to -(p_{1\pm2})$.

Las g's y h's que aparecen en las ecuaciones (IV.9,10) son en general funciones de p^2, y pueden expresarse en términos de los parámetros de las matrices del modo siguiente:

$$h_0 = b(-\tfrac{3}{2}\, d+1)\; p^2 + b_1^{32} f_1^{32} + b_1^{23} f_1^{23}$$

$$h_1^{kj} = -\tfrac{1}{2}\;(1-\tfrac{3}{2}\, d)\; p^4\; f_1^{kj} + b_1^{kj} f_2^{kj} + b_1^{jk} f_3 - M_1^2\; b_1^{kj}$$

$$h_2^{kj} = \tfrac{3}{4}\, p^2\; b_1^{kj} f_1^{kj} + b_2^{kj} f_2^{kj} + b_3 f_3 - M_1^2\; b_2^{kj} \qquad \text{IV.20}$$

$$h_3^{kj} = \tfrac{3}{4}\, p^2\; b_1^{jk} f_1^{kj} + b_3 f_2^{kj} + b_2^{jk} f_3 - M_1^2\; b_3$$

$$h_4^{kj} = -(1-\tfrac{3}{2}\, b)\; p^2 b_1^{kj} - (b_2^{kj} f_1^{kj} + b_3 f_1^{jk})\; p^2 + M_1^2\; b_1^{kj}$$

$$g_0 = b(1-\tfrac{3}{2}\, b)\; p^2 - \tfrac{1}{2}\; [(f_1^{32})^2 + (f_1^{23})^2]\; p^2$$

$$g_0^{kj} = (1-\tfrac{3}{2}\, b)\; f_1^{kj} p^2 + f_1^{kj} f_2^{kj} + f_3 f_1^{jk} - M_1^2\; f_1^{kj}$$

$$\text{IV.21}$$

$$g_2^{kj} = \tfrac{3}{4}\, p^4 (f_1^{kj})^2 + (f_2^{kj})^2 + f_3^2 - M_1^2\; f_2^{kj}$$

$$g_3 = \tfrac{3}{4}\, p^4\; f_1^{32} f_1^{23} + f_2^{32} f_3 + f_2^{23} f_3 - M_1^2\; f_3$$

$$b_1^{kj} = \frac{c_k}{4}\,[1 + 3c_j^2 + 3c_k^2 - 2a_j + 4a_j^2]\;p^2$$

$$b_2^{kj} = [-\tfrac{3}{4}\,c_k^2(\tfrac{1}{2} - 2a_j) + a_j^3]\;p^2 \qquad \text{IV.22}$$

$$b_3 = -\tfrac{3}{4}\,c_2c_3(\tfrac{1}{2} - a_2 - a_3)\;p^2$$

$$f_1^{kj} = c_k(-\tfrac{1}{2} + a_j)\;,\quad f_2^{kj} = [\tfrac{3}{4}\,c_k^2 + a_j^2]\;p^2 \quad ,$$

$$f_3 = \tfrac{3}{4}\,c_2c_3p^2 \qquad \text{IV.23}$$

$$b = \tfrac{1}{2}\;(1-c_2^2-c_3^2) \qquad d = \tfrac{1}{2}\;[1-2c_2^2(1-a_3)-2c_3^2(1-a_2)] \qquad \text{IV.24}$$

Es de esperarse desde luego que no todas las columnas de $\{u_i\}$ sean linealmente independientes entre sí, una vez determinadas las que si lo son, se pueden construir del modo usual, por combinación lineal de ellas, soluciones que correspondan a valores determinados del momento angular y su componente z, asi como del spin.

V.- EL OPERADOR DE SUMA SOBRE EL SPIN.

Al hacer de un modo general la cuantización de las ecuaciones relativistas pertenecientes al esquema propuesto por Bhabha[5], Udgaonkar[6] usa para los operadores del campo una expansión del tipo

$$\psi(x) = \sum_{r,s} \int a(\underline{p}, rs) u(\underline{p}, r, s) \exp(ipx)\, dp \quad , \qquad V.1$$

en la que $u(p,r,s)\exp(ipx)$ son las soluciones para una partícula libre discutidas en la sección III. Udgaonkar encuentra que para obtener las reglas de conmutación es necesario usar el operador de suma sobre el spin[6(eq.33)]

$$\sum_s u_i(\underline{p}, r, s)\bar{u}_i(\underline{p}, r, s)\epsilon(r) = \frac{k'}{2p_0} P^m (P-\kappa) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (P^2 - a_j^2 m_i^2) \qquad V.2$$

y hace notar que este operador es de gran interés porque se necesita para calcular los elementos de matriz en cualquier proceso.

En el caso particular de la ecuación de Bhabha, el operador V.2 es de la forma

$$\sum_s u_i(\underline{p}, r, s)\bar{u}_i(\underline{p}, r, s)\epsilon(r) =$$

$$= \frac{1}{2p_0} \frac{(-)^{i+1}}{\kappa^4(1-\lambda^2)} P^2 (P-\kappa)(P^2 - M_i^2) \qquad V.3$$

en donde M_i^2 y el índice i están definidos en III.8. Este operador es proporcional al operador $\{u_i\}$ calculado en este trabajo:

$$\sum_s u_i(\underline{p}, r, s)\bar{u}_i(\underline{p}, r, s)\epsilon(r) = \frac{1}{2p_0} \frac{(-)^{i+1}}{\kappa^4(1-\lambda^2)} \{u_i\} \quad . \qquad V.4$$

Para terminar, el autor desea expresar su agradecimiento al Profesor Alejandro Medina por sus siempre valiosas discusiones sobre este trabajo y a la Secretaría de Educación Publica por la ayuda económica prestada para la realización del mismo.

REFERENCIAS

1. M.Sugawara, Prog.Theor.Phys. 8, 549 (1952).
2. T.Matsumoto, T.Hamada, M.Sugawara, Prog.Theor.Phys. 10, 199 (1953).
3. T.Hamada, Prog.Theor.Phys. 10, 309 (1953).
4. H.J.Bhabha, Phil.Mag. 43, 33 (1952).
5. H.J.Bhabha, Rev.Mod.Phys. 21, 451 (1949).
6. B.M.Udgaonkar, Proc.Ind.Acad.Sci. 34A, 482 (1952).