

DISPERSION MULTINIVELAR EN EL ESPACIO DE FOCK III

F.M. Medina Nicolau

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Enero 29, 1954)

RESUMEN

En el presente artículo se trata de dar una descripción en el tiempo del fenómeno de la dispersión elástica para momento angular arbitrario, suponiendo que la interacción se lleva a cabo mediante la formación de una partícula compuesta cuyo radio es distinto de cero. Por simplicidad se trata solamente el caso en que la partícula compuesta tiene solamente un nivel de resonancia.

I.- INTRODUCCION.

En dos artículos anteriores^{1,2}, se ha dado, en el espacio de Fock, la descripción de los fenómenos de dispersión elástica de dos partículas mediante la formación de un núcleo compuesto y la desintegración de una partícula compuesta en dos, utilizando el formalismo de la matriz S . Puesto que se supuso que la interacción era puntual solamente fué posible obtener resultados cuando el momento angular relativo de las dos partículas era cero.

Se quiere ahora dar la descripción en el tiempo del fenómeno de la dispersión elástica en el caso en que el momento angular relativo de las dos partículas que interaccionan es mayor que cero. Para esto se supondrá que la interacción no es puntual, sino que se lleva a cabo mediante la formación de una partícula compuesta de radio r_0 . Todo esto se hará utilizando el espacio de Fock y dentro del formalismo de la matriz S . Con el objeto de simplificar el análisis se tratará el caso en que la partícula compuesta tiene solamente un nivel de resonancia; la generalización a varios niveles es bastante simple, modificándose solamente, en este último caso, la expresión para la función S , como se podrá ver fácilmente en los artículos I y II.

Puesto que el método desarrollado en los dos primeros artículos no es conveniente aplicarlo a este caso, puesto que la interacción ya no es puntual, se utilizará el expuesto por M. Moshinsky, consistente en encontrar el desarrollo en el tiempo del sistema mediante una transformada de Hankel adecuada de la función de onda que representa al sistema en su estado inicial³.

II.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONDICIONES A LA FRONTERA

Para describir este sistema bastará un espacio de Fock de dos componentes: la primera para describir al sistema cuando se encuentra en forma de dos partículas libres y la segunda para describirlo cuando se encuentra formando una partícula compuesta. Se las designará por $\psi_0(\bar{r}, t)$ y $\psi_1(\Omega, t)$ siendo Ω una variable que depende exclusivamente de los ángulos θ y φ , y \bar{r} el vector de posición relativa de las dos partículas, tomándose como origen el centro de masa del sistema. Entonces la función de Fock que describe en el tiempo al sistema esta dada por:

$$\Psi(\bar{r}, t) = \begin{bmatrix} \psi_0(\bar{r}, t) \\ \psi_1(\Omega, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

La ecuación que satisface la primera componente de (1) es la ecuación de Schrödinger para la partícula libre puesto que se supone que en esta etapa no interaccionan las dos partículas.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi_0(\bar{r}, t) + (m_1 + m_2)c^2 \psi_0(\bar{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi_0(r, t)}{\partial t} \quad (2)$$

para $r > r_0$, siendo r_0 el radio de la partícula compuesta. Las diferentes cantidades que aparecen aquí tienen el mismo significado que se les ha dado en I.

La partícula compuesta, cuya masa se designará por M , es

tá caracterizada por tener solamente dos grados de libertad. En el caso en que entre las dos componentes de (1) no haya interacción, $\psi_1(\Omega, t)$ satisface la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2Mr_0^2} \Lambda^2 \psi_1(\Omega, t) + Mc^2 \psi_1(\Omega, t) = i\hbar \frac{\partial \psi_1(\Omega, t)}{\partial t} \quad (3)$$

Esta ecuación es válida en la superficie r_0 , en tal forma que el elemento de área de ésta está dado por

$$r_0^2 d\Omega = r_0^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (3a)$$

El operador Λ^2 que aparece en (3) actúa solamente sobre las variables angulares y está dado por:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (3b)$$

La probabilidad de que el sistema se encuentre en cualquiera de sus dos etapas, está dada por:

$$P(t) = (\Psi, \Psi) = \int_V \psi_0^* \psi d\bar{r} + \int_S \psi_1^* \psi_1 r_0^2 d\Omega \quad (4)$$

la cual debe ser una constante. La primera integral en (4) se extiende a todo el espacio con excepción hecha del volumen ocupado por la esfera de radio r_0 , y la segunda integral se extiende a toda la superficie de esta esfera. Entonces, derivando (4) con respecto al tiempo, utilizando (2) y haciendo uso del teorema de Green, puesto que la función ψ_0 tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{i} \frac{dP}{dt} = & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right)^* \psi_0 - \psi_0^* \left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) \right]_{r=r_0} \times r_0^2 d\Omega + \\
& + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\psi_1^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2Mr_0^2} \Lambda^2 \psi_1 + Mc^2 \psi_1 \right) \right. \\
& \left. - \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2Mr_0^2} \Lambda^2 \psi_1 + Mc^2 \psi_1 \right)^* \psi_1 \right] r_0^2 d\Omega = 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

Cada una de las funciones que aparecen en (5) tienen el desarrollo:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l(r, t) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad , \quad (5a)$$

de tal modo que introduciéndolo en (5), recordando que el operador Λ^2 tiene el eigenvalor $-l(l+1)$ y efectuando las integrales sobre los ángulos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial \psi_{0l}}{\partial r} \right)^* \psi_{0l} - \psi_{0l}^* \left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial \psi_{0l}}{\partial r} \right) \right]_{r=r_0} + \\
& + \psi_{1l}^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_{1l}}{\partial t} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr_0^2} \psi_{1l} + Mc^2 \psi_{1l} \right) \\
& - \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_{1l}}{\partial t} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr_0^2} \psi_{1l} + Mc^2 \psi_{1l} \right)^* \psi_{1l} = 0 \quad . \quad (6)
\end{aligned}$$

La función de ondas de Fock que satisface (5) debe representar un estado para el cual es válido la conservación de la

probabilidad. Mas aún: si se satisface la relación (6) para las funciones de onda

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Psi' = \begin{bmatrix} \psi'_0 \\ \psi'_1 \end{bmatrix}$$

los principios generales de la mecánica cuántica exigen que esta relación sea satisfecha por cualquier superposición lineal de Ψ y Ψ' . Es fácil ver, entonces, que se debe cumplir la siguiente relación bilineal:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi_{0l}}{\partial r} \right)^* \psi'_{0l} - \psi_{0l}^* \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi'_{0l}}{\partial r} \right) \right]_{r=r_0} + \\ & + \psi_{1l}^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi'_{1l}}{\partial t} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr_0^2} \psi'_{1l} + Mc^2 \psi'_{1l} \right) \\ & - \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_{1l}}{\partial t} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr_0^2} \psi_{1l} + Mc^2 \psi_{1l} \right)^* \psi'_{1l} = 0 \quad . \quad (6a) \end{aligned}$$

La condición necesaria y suficiente para que (6a) se cumpla es que⁴

$$(\psi_{0l})_{r=r_0} = C_{11} \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi_{0l}}{\partial r} \right)_{r=r_0} + C_{12} \psi_{1l} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \psi_{1l}}{\partial t} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr_0^2} \psi_{1l} + Mc^2 \psi_{1l} & = \\ = C_{21} \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi_{0l}}{\partial r} \right)_{r=r_0} + C_{22} \psi_{1l} & \quad (7b) \end{aligned}$$

Siendo $\|C_{ij}\|$ una matriz hermitiana constante.

La interpretación que reciben las constantes que aparecen en las ecuaciones (7a,b) es la siguiente: C_{1j} es la medida de la acción que ejerce la etapa i sobre la j . Si no hay interacción entre las dos etapas $C_{12} = C_{21}^* = 0$, y en consecuencia, por (3), $C_{22} = 0$.

Suponiendo que la primera etapa no interacciona consigo misma, esto es, que $C_{11} = 0$, cambiando ψ por $\psi \exp[-i(m_1+m_2)t/\hbar]$ en (2), (7a) y (7b), utilizando el sistema natural de unidades $\hbar = c = \mu = 1$, las condiciones que deben cumplir ψ_{0l} y ψ_{1l} quedan:

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi_{0l}) + \frac{l(l+1)}{2} \psi_{0l} = i \frac{\partial \psi_{0l}}{\partial t}, \quad (r > r_0) \quad (8a)$$

$$(\psi_{0l})_{r=r_0} = C \psi_{1l}, \quad (8b)$$

$$-i \frac{\partial \psi_{1l}}{\partial t} + E_l \psi_{1l} = \frac{C}{2} \left(\frac{\partial \psi_{0l}}{\partial r} \right)_{r=r_0} \quad (8c)$$

donde se ha hecho $C_{12} = C_{21}^* = C$ y

$$E_l = M - (m_1+m_2) + \frac{l(l+1)}{2Mr_0^2}.$$

Substituyendo (8b) en (8c) se obtiene la siguiente condición en términos de ψ_{0l} solamente:

$$-i \left(\frac{\partial \psi_{0l}}{\partial t} \right)_{r=r_0} + E_l (\psi_{0l})_{r=r_0} = \frac{C^2}{2} \left(\frac{\partial \psi_{0l}}{\partial r} \right)_{r=r_0}. \quad (8d)$$

Si ψ_0 es una onda estacionaria correspondiente al valor

E de la energía, la ecuación (8d) se reduce a

$$\psi_{0i}(r_0) = R(E) \left(\frac{\partial \psi_{0i}(r)}{\partial r} \right)_{r=r_0}, \quad (9)$$

con

$$R(E) = \frac{C^2/2}{E_i - E} \quad (9a)$$

que es una R de Wigner⁵.

III.- DEPENDENCIA DE LAS FUNCIONES DE ONDA CON RESPECTO AL TIEMPO.

Para encontrar el desarrollo en el tiempo de las funciones de onda según el método expuesto por M. Moshinsky³, hay que encontrar primero las funciones de onda estacionarias del problema, esto es, que satisfagan (8a), (3b) y (9), cuando se ha eliminado el tiempo de la primera. Sean, pues, estas funciones $\varphi_{0i}(k, r)$ y $\varphi_{1i}(k)$, donde $E = \frac{1}{2}$, teniéndose así la función estacionaria de Fock

$$\Phi_i(k) = \begin{bmatrix} \varphi_{0i}(k, r) \\ \varphi_{1i}(k) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

La función

$$\varphi_{0i} = \frac{1}{2} [h_i^-(kr) + S_i(k) h_i^+(kr)] , \quad (11)$$

siendo $h_l^\pm(\rho)$ las funciones esfericas de Hankel*, satisface la ecuación (8a) en su forma estacionaria, y para que satisfaga (9) es necesario que

$$S_l(k) = - \left[\frac{h_l^-(kr) - kR_l(E) h_l^-(kr)'}{h_l^+(kr) - kR_l(E) h_l^+(kr)'} \right]_{r=r_0} \quad (12)$$

donde los acentos indican la derivada con respecto al argumento de las funciones a las cuales se lo aplica. La expresión (10) da el valor de la única componente de la matriz de dispersión⁶. Es fácil verificar que, para k real,

$$S(k)^* = S(-k) \quad , \quad S(k)S(k)^* = 1 \quad . \quad (12a)$$

La segunda componente de (10) se obtiene mediante la condición (8b), teniéndose:

$$\varphi_{11}(k) = \frac{1}{2C} [h_l^-(kr_0) + S_l(k) h_l^+(kr_0)] \quad (13)$$

Cuando $C = 0$, esto es, cuando no hay interacción entre las dos etapas, $\varphi_{11} = 0$ y la función φ_{01} describe el choque de una partícula sobre una esfera rígida.

Si $\Psi_l(\vec{r}, t)$ es la componente correspondiente al momento angular l del estado de Fock¹ (1) dependiente del tiempo, la

*Estas funciones están definidas por⁹

$$h_l^\pm(\rho) = (\mp i)^{l+1} e^{\pm i\rho} \frac{P_l^\pm(\rho)}{\rho}$$

donde $P_l^\pm(\rho) = \sum_{p=0}^l \frac{a_{pl}}{(\mp i\rho)^p}$, $a_{pl} = \frac{1}{2^p p!} \frac{(l+p)!}{(l-p)!}$

transformada de Hankel por medio de la cual se va a encontrar el desarrollo de un estado, que esta determinado para $t=0$, es³:

$$F_l(k, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^{\infty} \varphi_{0l}(\kappa, r)^* \psi_{0l}(r, k, 0) r^2 dr + \sqrt{\frac{1}{8\pi^3}} \varphi_{1l}(\kappa) \psi_{1l}(k, 0), \quad (14)$$

donde $\psi_{0l}(r, k, 0)$ y $\psi_{1l}(k, 0)$ dan el valor, para $t = 0$, de las componentes de (1) correspondientes al momento angular l . Finalmente, la componente l de (1) estará dada por:

$$\Psi_l(r, k, t) = \begin{bmatrix} \psi_{0l}(r, k, t) \\ \psi_{1l}(k, t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_l(k, \kappa) \begin{bmatrix} \varphi_{0l}(\kappa, r) \\ \varphi_{1l}(\kappa) \end{bmatrix} e^{-i\epsilon t} \kappa^2 d\kappa$$

dónde $\epsilon = \frac{1}{2} \kappa^2$.

Al tratar el caso de la dispersión, el sistema se encuentra originalmente en forma de dos partículas que se mueven con momento lineal relativo k , en tal forma que el sistema está representado por la función $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$. La segunda componente de (1), para $t = 0$ es, en este caso, igual a cero. Entonces, las componentes radiales de (1) correspondientes al momento angular l , eliminando factores numéricos, están dadas, para

$t = 0$, por:

$$\psi_{0l}(r, k, 0) = j_l(k r) , \quad \psi_{1l}(k, 0) = 0 . \quad (16)$$

Substituyendo (16) en (14) la transformada generalizada $F_l(k, \kappa)$ se puede escribir como:

$$F_l(k, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{2} [h_l^-(\kappa r) + S_l(\kappa) h_l^+(\kappa r)]^* j_l(k r) r^2 dr . \quad (17)$$

Poniendo

$$\begin{aligned} v_l(\kappa, r) &= \frac{1}{2} [h_l^-(\kappa r) + S_l(\kappa) h_l^+(\kappa r)] = \\ &= (-1)^l S_l(\kappa) v_l(-\kappa, r) , \end{aligned}$$

y utilizando los resultados obtenidos en el apéndice se tiene que (17) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} F_l(k, \kappa) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4\kappa k} [1 + S_l(\kappa)^*] [\delta(\kappa - k) + (-1)^{l+1} \delta(\kappa + k)] \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S_l(\kappa)^*}{\kappa^2 - k^2} u_l(\kappa, k, r_0) , \end{aligned} \quad (18a)$$

donde

$$u_l(\kappa, k, r) = r v_l(\kappa, r)^* \frac{d}{dr} r j_l(k r) - r j_l(k r) \frac{d}{dr} r v_l(\kappa, r)^* . \quad (18b)$$

Con lo desarrollado hasta aquí se obtendrá explícitamente la primera componente de (15), y la segunda se obtendrá me-

diante la condición a la frontera (8b). Se tiene, entonces, que:

$$\psi_{0i}(r, k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_i(k, \kappa) \varphi_{0i}(\kappa, r) e^{-i\epsilon t} \kappa^2 d\kappa \quad (19)$$

la cual, por definición de $\varphi_{0i}(\kappa, r)$ dada en (11), puede descomponerse en:

$$\begin{aligned} \psi_{0i}(r, k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} F_i(k, \kappa) h_i^-(\kappa r) e^{-i\epsilon t} \kappa^2 d\kappa + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} F_i(k, \kappa) S_i(\kappa) h_i^+(\kappa r) e^{-i\epsilon t} \kappa^2 d\kappa \right\}, \quad (19a) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$h_i^+(\rho) = (-1)^l h_i^{\bar{+}}(\rho), \quad (20a)$$

y que

$$F_i(k, -\kappa) = (-1)^l S_i(\kappa) F_i(k, \kappa), \quad (20b)$$

como se puede ver de las definiciones de $h_i^{\pm}(\kappa)$ y $F_i(k, \kappa)$, cambiando κ por $-\kappa$ en la segunda integral de (19a), se obtiene:

$$\psi_{0i}(r, k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(k, \kappa) S_i(\kappa) h_i^+(\kappa r) e^{-i\epsilon t} \kappa^2 d\kappa. \quad (21)$$

Substituyendo (18a) en (21) y utilizando las propiedades de la $S(k)$ dadas en (12a), se obtiene:

$$\psi_{0l}(r, k, t) =$$

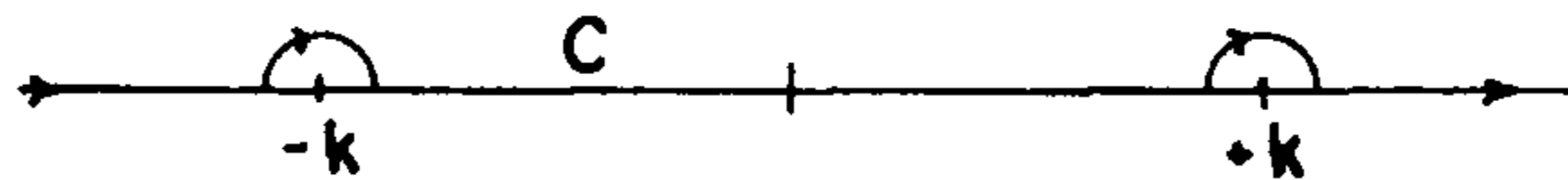
$$\frac{1}{2} \{ [1+S_l(k)] h_l^+(k r) + [1+S_l(k)^*] h_l^-(k r) \} e^{-iEt} - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_l(\kappa, k, r_0)}{\kappa^2 - k^2} h_l^+(\kappa r) e^{-i\epsilon t} \kappa^2 d\kappa, \quad (2|a)$$

donde P indica que se toma el valor principal de Cauchy de la integral que aparece en (2|a), puesto que el integrando tiene dos polos, $+k$ y $-k$, sobre el intervalo de integración. Se puede ver fácilmente que el integrando de (2|a) no tiene polo en el origen. En efecto: teniendo en cuenta que cuando $|\rho| \ll 1$,

$$h_l^\pm(\rho) \sim \frac{\pm i}{\rho^{l+1}} \quad \text{y} \quad j_l(\rho) \sim \rho^l$$

se puede obtener fácilmente que en las cercanías del origen $u(\kappa, k, r_0) \sim \kappa^l$ y, en consecuencia, puesto que $h_l^+(\rho)$ tiene un polo de orden $l+1$ en el origen, el integrando se comporta como κ en esta vecindad.

Si C es el contorno, que pasa por encima de los polos de el integrando de (2|a), se tiene que:



$$P \int_{-\infty}^{+\infty} = \int_C = i\pi [\text{Res}(\kappa=-k) + \text{Res}(\kappa=+k)], \quad (2|b)$$

donde $\text{Res}(\kappa=-k)$ y $\text{Res}(\kappa=+k)$ indican los residuos del integrando que aparece en (2|a) calculados en los puntos $\kappa = -k$

y $\kappa = +k$ respectivamente. Evaluando estos residuos se tiene:

$$\text{Res } (\kappa = -k) = -\frac{k}{2} u_l(k, k, r_0) * h_l^-(k r) e^{-iEt} , \quad (21c)$$

$$\text{Res } (\kappa = +k) = \frac{k}{2} u_l(k, k, r_0) h_l^+(k r) e^{-iEt} . \quad (21d)$$

La expresion $u_l(k, k, r)$ puede evaluarse muy facilmente, observando que su derivada con respecto a r es nula. En efecto, poniendo

$$u_l(\kappa, k, r) = \frac{1}{2} [u_l^-(\kappa, k, r) + S_l(\kappa) \cdot u_l^+(\kappa, k, r)] , \quad (22)$$

donde

$$u_l^\pm(\kappa, k, r) = rh_l^\pm(\kappa r) \frac{d}{dr} rj_l(k r) - rj_l(k, r) \frac{d}{dr} rh_l^\pm(\kappa r) . \quad (22a)$$

Puesto que tanto $rh_l^\pm(k r)$ como $rj_l(k r)$ satisfacen la ecuacion diferencial

$$\frac{d^2}{dr^2} rR = - \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] rR , \quad (22b)$$

inmediatamente se ve que $(\partial u_l^\pm(k, k, r)/\partial r) = 0$ para cualquier valor de k . Se calculara, entonces, el valor de (22a) cuando $r \rightarrow \infty$, y en esta forma se conocera su valor para cualquier r . Teniendo en cuenta que cuando $\rho \rightarrow \infty$

$$h_l^+(\rho) \sim (-i)^l \frac{e^{i\rho}}{i\rho} ,$$

y

$$j_l(\rho) \sim \frac{1}{\rho} \cos \left(\rho - (l+1) \frac{\pi}{2} \right), \quad (\dagger)$$

se obtiene

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_l^\pm(k, k, r) = \mp \frac{i}{k},$$

y en consecuencia la expresión (22) tiene por valor

$$\frac{i}{2k} [1 - S_l(k)],$$

con lo cual se obtiene, por (21c) y (21d) que la suma de ambos residuos es:

$$\frac{i}{4} \{ [1 - S_l(k)] h_l^+(k r) + [1 - S_l(k)^*] h_l^-(k r) \} e^{-iEt}. \quad (22c)$$

Substituyendo (21a) y (22c) en (21b) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \psi_{0l}(r, k, t) &= j_l(k r) e^{-iEt} \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u_l(\kappa, k, r_0)}{\kappa^2 - k^2} h_l^+(\kappa r) e^{-i\kappa t} \kappa^2 d\kappa. \end{aligned} \quad (23)$$

Poniendo

$$u_l(\kappa, k, r_0) = e^{-i\kappa r_0} \phi(\kappa, k, r_0) \quad (23a)$$

y aprovechando la definición de $h_l^+(\kappa r)$, la integral que apa-

rece en (23) se puede escribir como:

$$\int_0^l = \sum_{p=0}^l (-i)^{l+1} \frac{i^p a_{pl}}{r^{p+1}} \int_0^l \frac{\Phi(\kappa, k, r_0)}{(\kappa^2 - k^2) \kappa^{p-1}} e^{i\kappa(r-r_0)} e^{-i\epsilon t} d\kappa. \quad (23b)$$

Es interesante hacer notar que los polos de $\Phi(\kappa, k, r_0)$ estan dados por los de la función $e^{i2\kappa r_0} S_l(\kappa)$, como es facil verificar. Esta ultima funcion tiene sus polos en la parte inferior del plano complejo κ o sobre el eje imaginario y todos ellos estan simetricamente dispuestos con respecto a este eje⁷.

Se supondrá aquí que $\Phi(\kappa, k, r_0)$ no tiene polos sobre el eje imaginario, esto es, que el sistema no puede encontrarse en estado ligado.

Si

$$A_a = \text{Res} \left[\frac{\Phi(\kappa, k, r_0)}{\kappa^2 - k^2} \right]_{\kappa = k_a} \quad (24)$$

en que k_a son los polos de la expresion encerrada entre parentesis, se tiene que

$$\frac{\Phi(\kappa, k, r_0)}{(\kappa^2 - k^2) \kappa^{p-1}} = \sum_a \frac{A_a}{(\kappa - k_a) k_a^{p-1}},$$

y en consecuencia la integral que aparece en (23b) se transforma en:

$$\sum_a \frac{A_a}{k_a^{p-1}} \int_0^l \frac{e^{-i\kappa(r-r_0)} e^{-i\epsilon t}}{\kappa - k_a} d\kappa,$$

cuyo valor está dado por⁸

$$\sum_a i\pi \frac{A_a}{k_a^{p-1}} \chi(r-r_0, k_a, t) \quad . \quad (24a)$$

donde

$$\chi(r, k, t) = e^{i(kr - Et)} \operatorname{erfc}(z_a) \quad (24b)$$

con

$$z_a = e^{-i\pi/4} \frac{r-kt}{\sqrt{2t}}, \quad E = \frac{1}{2} k^2 \quad .$$

Substituyendo (24a) en (23b) se obtiene:

$$\int_c = i\pi \sum_a A_a \sum_{p=0}^l (-i)^{l+1} \frac{i^p a_{pl}}{(k_a r)^p} k_a \chi(r-r_0, k_a, t) \quad , \quad (24c)$$

y por ultimo, definiendo

$$\chi_{r_0}(r, k_a, t) = ik_a^2 rh^+(k_a r) e^{-i(k_a r_0 + E_a t)} \operatorname{erfc}(z_a)$$

por (24c) la expresión (23) se puede escribir como:

$$\psi_{0l}(r, k, t) = j_l(k r) e^{-iEt} - \frac{1}{r} \sum_a A_a \chi_{r_0}(r, k_a, t) \quad . \quad (25)$$

Por último, la segunda componente de la función (15) se obtiene mediante la condición a la frontera (8b), en tal forma que:

$$\psi_{11}(r_0, k, t) = \frac{1}{C} j_1(k r_0) e^{-i k t} - \frac{1}{r_0 C} \sum_a A_a \chi_{r_0}(r_0, k a, t) \quad , \quad (26)$$

con lo cual se ha obtenido el desarrollo en el tiempo del fenómeno de la dispersión cuando se considera momento angular arbitrario.

El autor expresa su agradecimiento al Dr. M. Moshinsky por sus valiosas discusiones y a la Secretaría de Educación Pública por la ayuda económica prestada para el desarrollo de esta parte del trabajo.

APENDICE.

OBTENCION DE LA TRANSFORMADA GENERALIZADA DE HANKEL.

Con el objeto de obtener la forma explícita de la expresión (17), es necesario conocer el valor de las integrales

$$\int_{r_0}^{\infty} h_l^{\pm}(\kappa r) j_l(k r) r^2 dr \quad . \quad (1)$$

Puesto que tanto $h_l^{\pm}(\kappa r)$ como $j_l(k r)$ satisfacen (22b) las siguientes expresiones son ciertas:

$$r j_l(k r) \frac{d^2}{dr^2} r h_l^{\pm}(\kappa r) = - \left[\kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] r^2 j_l(k r) h_l^{\pm}(\kappa r) \quad , \quad (2)$$

$$r h_l^{\pm}(\kappa r) \frac{d^2}{dr^2} r j_l(k r) = - \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] r^2 j_l(k r) h_l^{\pm}(\kappa r) \quad . \quad (3)$$

Si a (3) se le resta (2), se obtiene:

$$\frac{d}{dr} u_l^\pm(\kappa, k, r) = (\kappa^2 - k^2) r^2 j_l(k r) h_l^\pm(\kappa r)$$

e integrando se obtiene:

$$\int_{r_0}^{\infty} h_l^\pm(\kappa r) j_l(k r) r^2 dr = \frac{u_l^\pm(\kappa, k, r)}{\kappa^2 - k^2} \Big|_{r_0}^{\infty}, \quad (4)$$

donde $u_l^\pm(\kappa, k, r)$ está definida en (22a).

Teniendo en cuenta los valores asintóticos cuando $r \rightarrow \infty$, para $h_l^\pm(\rho)$ y $j_l(\rho)$, dados por (†) y utilizando la relación

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} = i\pi k \delta(k),$$

se obtiene que el valor de (4) está dado por

$$\frac{\pi}{2\kappa k} [\delta(k-\kappa) + (-1)^{l+1} \delta(k+\kappa)] = \frac{u_l^\pm(\kappa, k, r_0)}{\kappa^2 - k^2}, \quad (5)$$

Substituyendo este valor en la integral que aparece en (17), y utilizando la propiedad (12a) de $S_l(\kappa)$, se obtiene fácilmente la expresión (18a), que es la que se estaba buscando.

REFERENCIAS.

1. F.M. Medina N., Rev. Mex. Fis. II, 117 (1953). Este artículo será designado por I.

2. idem., Rev.Mex.Fis. II, 268 (1953). Este artículo será designado por II.
3. M.Moshinsky, Phys.Rev. 84, 525 (1951).
4. idem., Phys.Rev. 81, 347 (1951).
5. E.P.Wigner, Ann.of Math. 53, 36 (1951).
6. idem, Phys.Rev. 70, 15 (1946)
7. J.M.Lozano, Rev.Mex.Fis. II, 155 (1953).
8. Véase referencia 2.
9. J.A.Stratton, Electromagnetic Theory. (McGraw-Hill Book Co., Inc., New York and London), primera edición, pp. 404-406.