

## ECUACIONES PARA REACTORES HETEROGENEOS

Alejandro Medina

Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Marzo 31, 1954)

**RESUMEN**

*By means of a systematic averaging process applied to a heterogeneous pile, it is possible to obtain a simple set of design equations giving good agreement with experiment for thermal reactors. Such a process is developed in this paper, where it is shown that by the use of suitable constants, the general behaviour of a pile can be predicted within a very reasonable degree of accuracy.*

## I.- ECUACIONES PARA UNA CELDA

Una pila heterogénea está caracterizada por una latiz definida cuya unidad fundamental es una celda de forma y dimensiones dadas, consistente de una región  $A_0$  ocupada por combustible y una región  $A_1$  ocupada por moderador. Cada región de la celda es una región homogénea cuyas constantes nucleares están determinadas por la naturaleza del combustible y del moderador. De esta manera para  $i = 0, 1$  serán  $\Sigma_{s,i}$ ,  $\Sigma_{a,i}$  y  $\Sigma_i$  las secciones macroscópicas para dispersión, absorción y efecto total respectivamente,  $\lambda_{t,i}$  la longitud de transporte,  $\xi_i$  el decremento logarítmico medio,  $\phi_i$  el flujo de neutrones térmicos,  $q_i$  la densidad de desceleración. Esta última será expresada como función de posición en la pila y como función de la letargia

$$\epsilon = \log \frac{E_0}{E} \quad (1)$$

en donde  $E_0$  es la energía de hendimiento y  $E \leq E_0$  la energía considerada.

Si imaginamos un sistema de coordenadas  $\underline{r} = \underline{i}x + \underline{j}y + \underline{k}z$  colocado en la pila, las regiones  $A_i$  que constituyen una celda corresponderán a un conjunto de valores de  $\underline{r}$  para los cuales se puede escribir una ecuación de desceleración y una ecuación de difusión que describen el comportamiento de los neutrones en la región considerada. Así, en  $A_0$

$$\left. \frac{\lambda_{t0}}{3\Sigma_0 \xi_0} \Delta q_0(\underline{r}, \epsilon') - \frac{\partial q_0(\underline{r}, \epsilon)}{\partial \epsilon} - \frac{\Sigma_{a0}}{\Sigma_0 \xi_0} q_0(\underline{r}, \epsilon) + Q_0(\underline{r}, \epsilon) = 0 \right\} (2a)$$

$$\frac{\lambda_{t0}}{3} \Delta \phi_0 - \Sigma_{a0t} \phi_0 + Q_{t0}(\underline{r}) = 0$$

y en  $A_1$

$$\left. \frac{\lambda_{t1}}{3\Sigma_1 \xi_1} \Delta q_1(\underline{r}, \epsilon) - \frac{\partial q_1(\underline{r}, \epsilon)}{\partial \epsilon} - \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_1 \xi_1} q_1(\underline{r}, \epsilon) + Q_1(\underline{r}, \epsilon) = 0 \right\} (2b)$$

$$\frac{\lambda_{t1}}{3} \Delta \phi_1 - \Sigma_{a1t} \phi_1 + Q_{r1}(\underline{r}) = 0$$

En donde  $Q_1(\underline{r}, \epsilon)$  es la producción de neutrones de le-  
targia  $\epsilon$  y  $Q_{t1}(\underline{r})$  la producción de neutrones térmicos.

Si se supone que sólo los neutrones térmicos son acti-  
vos, se vé inmediatamente que será

$$Q_1(\underline{r}, \epsilon) = 0 \quad Q_{t1}(\underline{r}) = q_1(\underline{r}, \epsilon_t) \quad (3)$$

en tanto que

$$q_0(\underline{r}, 0) = \phi_0 \Sigma_{a0t} k_{t0} \quad (4)$$

con

$$k_{t0} = f \eta = \frac{\Sigma_{f0}}{\Sigma_{a0}} \eta \quad (4a)$$

en donde  $\Sigma_{f_0}$  representa la sección macroscópica de hendidien-  
to para el combustible (a energía térmica) y  $\eta$  el factor -  
de utilización.

Se obtiene en vez de (2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_{t_0}}{3\Sigma_0 \xi_0} \Delta q_0(\underline{r}, \epsilon) - \frac{\partial q_0(\underline{r}, \epsilon)}{\partial \epsilon} - \frac{\Sigma_{a_0}}{\Sigma_0 \xi_0} q_0(\underline{r}, \epsilon) &= 0 \\ \frac{\lambda_{t_0}}{3} \Delta \phi_0 - \Sigma_{a_0 t} \phi_0 + q_0(\underline{r}, \epsilon_t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_{t_1}}{3\Sigma_1 \xi_1} \Delta q_1(\underline{r}, \epsilon) - \frac{\partial q_1(\underline{r}, \epsilon)}{\partial \epsilon} - \frac{\Sigma_{a_1}}{\Sigma_1 \xi_1} q_1(\underline{r}, \epsilon) &= 0 \\ \frac{\lambda_{t_1}}{3} \Delta \phi_1 - \Sigma_{a_1 t} \phi_1 + q_1(\underline{r}, \epsilon_t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

Supondremos que estas ecuaciones describen el comporta-  
miento de los neutrones en cada celda cuando  $\phi_1$  y  $q_1$  se  
sujetan a las condiciones:

- i)  $\phi_0$  positiva y finita.
- ii)  $(\phi_0)_{S_0} = (\phi_1)_{S_0}$ ;  $S_0$  es la superficie de separación  
entre  $A_0$  y  $A_1$ .
- iii)  $\lambda_{t_0} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right)_{S_0} = \lambda_{t_1} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right)_{S_0}$
- iv)  $\left( \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right)_{S_1} = 0$ ;  $S_1$  es la superficie que limita la celda.

v)  $q_0$  positiva y finita.

$$\text{vi) } \left( \frac{q_0}{\Sigma_0 \xi_0} \right)_{s_0} = \left( \frac{q_1}{\Sigma_1 \xi_1} \right)_{s_0}$$

$$\text{vii) } \frac{\lambda_{t_0}}{\Sigma_0 \xi_0} \left( \frac{\partial q_0}{\partial \nu} \right)_{s_0} = \frac{\lambda_{t_1}}{\Sigma_1 \xi_1} \left( \frac{\partial q_1}{\partial n} \right)_{s_0}$$

$$\text{viii) } \left( \frac{\partial q_1}{\partial n} \right)_{s_1} = 0$$

$$\text{ix) } q_0(\underline{r}, 0) = \phi_0(\underline{r}) \Sigma_{a t_0} k_{t_0}$$

Las condiciones iv) y viii) son aproximadas. En rigor serían válidas solamente para una latiz infinita, pero - en vista de las aproximaciones que se han empleado para establecer (5a) y (5b) parece innecesario complicar iv) y viii) con la inclusión de la corriente neta que en la frontera de cada celda proviene del flujo total que resulta del tamaño finito de la pila.

## 2.- PROMEDIOS SOBRE UNA CELDA. HOMOGENEIZACION DE LA PILA HETEROGENEA.

Si  $\psi$  representa un flujo térmico  $\phi$  o una densidad de desceleración  $q$ , el valor promedio de  $\psi$  en una pila heterogénea se definirá de la manera siguiente. Se supone un sistema de coordenadas en la pila, cuyo origen y orientación se escogen adecuadamente de acuerdo con la geometría del sistema. Para una celda arbitraria  $C$ , se toma un -

punto  $O_0$  como origen de un sistema de coordenadas local. Si  $\underline{R}$  es el vector de posición de  $O_0$  respecto al sistema general y  $\underline{r}$  el vector de posición de un punto  $\underline{p}$  cualquiera de la celda respecto a  $O_0$ , las coordenadas de  $\underline{p}$  en el sistema general corresponden al vector  $\underline{R} + \underline{r}$ .

Designando los volúmenes de  $A_0$  y  $A_1$  por  $V_0$  y  $V_1$ , respectivamente, definiremos

$$\psi(\underline{R}) = \frac{\int_{V_0} \psi(\underline{R} + \underline{r}) d\underline{r} + \int_{V_1} \psi(\underline{R} + \underline{r}) d\underline{r}}{V_0 + V_1} = \frac{\bar{\psi}_0 V_0 + \bar{\psi}_1 V_1}{V_0 + V_1} \quad (6)$$

siendo

$$\bar{\psi}_0(\underline{R}) = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \psi(\underline{R} + \underline{r}) d\underline{r} \quad (6a)$$

$$\bar{\psi}_1(\underline{R}) = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \psi(\underline{R} + \underline{r}) d\underline{r}$$

los valores promedio de  $\psi$  en las regiones  $A_0$  y  $A_1$ , respectivamente.

Podemos ahora permitir que  $\underline{R}$  varíe libremente en la pila en cuyo caso  $\psi(\underline{R})$  representa una función de posición "alisada", es decir, una en la que las variaciones locales dentro de una celda han sido eliminadas<sup>1</sup>.

Nuestro propósito es ahora, partiendo de las ecuaciones diferenciales locales (5), obtener las ecuaciones generales que satisfacen las funciones  $\psi(\underline{R})$  definidas por (6).

Integrando las ecuaciones para los flujos térmicos da-



das en (5a) y (5b) y añadiendo los resultados se obtiene

$$\frac{1}{3} \left\{ \lambda_{t_0} \int_{V_0} \Delta_r \phi_0(\underline{R}+\underline{r}) \cdot d\underline{r} + \lambda_{t_1} \int_{V_1} \Delta_r \phi_1(\underline{R}+\underline{r}) d\underline{r} \right\} - \\ - [V_0 \Sigma_{at_0} \bar{\phi}_0 + V_1 \Sigma_{at_1} \bar{\phi}_1] + [V_0 \bar{q}_0(\underline{R}, \epsilon_t) + V_1 \bar{q}_1(\underline{r}, \epsilon_t)] = 0 \quad (7)$$

Defínase ahora la sección macroscópica  $\Sigma_{at}$  por la relación

$$\phi(\underline{R}) \Sigma_{at} = \frac{\bar{\phi}_0(\underline{R}) \Sigma_{at_0} V_0 + \bar{\phi}_1(\underline{R}) \Sigma_{at_1} V_1}{V_0 + V_1}, \quad (8)$$

en donde  $\phi(\underline{R})$  es el promedio definido por (6).

Con el auxilio del factor de utilización del combustible  $f_u$  introducido por Fermi<sup>1</sup> discutido y analizado por Weinberg<sup>2</sup> que puede definirse por la relación:

$$f_u = \frac{\bar{\phi}_0 \Sigma_{at_0} V_0}{\bar{\phi}_0 \Sigma_{at_0} V_0 + \bar{\phi}_1 \Sigma_{at_1} V_1} \quad (9)$$

y de un parámetro  $\varphi$  que definiremos por la relación

$$\varphi = \frac{\bar{\phi}_0 V_0}{\bar{\phi}_1 V_1} \quad (10)$$

el valor de  $\Sigma_{at}$  puede obtenerse de (8) y expresarse en la forma

$$\Sigma_{at} = \frac{\Sigma_{at_1}}{(1-f_u)(1+\varphi)} \quad (11)$$

en donde se obtiene para el camino libre medio de absorción la expresión

$$\lambda_{at} = \lambda_{at_1} (1 - f_u) (1 + \varphi) \quad (12)$$

De (8) se sigue que el segundo término de (7) será

$$V_0 \Sigma_{at_0} \bar{\phi}_0 + V_1 \Sigma_{at_1} \bar{\phi}_1 = (V_0 + V_1) \Sigma_{at} \phi(\underline{R}) \quad (a)$$

con  $\Sigma_{at}$  dada por (11).

El primer término de (7) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left\{ \lambda_{t_0} \Delta_R \int_{V_0} \phi_0(\underline{R} + \underline{r}) d\underline{r} + \lambda_{t_1} \Delta_R \int_{V_1} \phi_1(\underline{R} + \underline{r}) d\underline{r} \right\} = \\ = \frac{1}{3} [\lambda_{t_0} V_0 \Delta_R \bar{\phi}_0(\underline{R}) + \lambda_{t_1} V_1 \Delta_R \bar{\phi}_1(\underline{R})] \end{aligned}$$

Por otra parte de (6) se obtiene

$$(V_0 + V_1) \Delta_R \phi(\underline{R}) = V_0 \Delta_R \bar{\phi}_0(\underline{R}) + V_1 \Delta_R \bar{\phi}_1(\underline{R})$$

lo cual sugiere definir un camino medio de transporte  $\lambda_t$  por la relación

$$\lambda_t \phi(\underline{R}) = \frac{\lambda_{t_0} V_0 \bar{\phi}_0(\underline{R}) + \lambda_{t_1} V_1 \bar{\phi}_1(\underline{R})}{V_0 + V_1} \quad (13)$$

que por el uso de (6) y (10) da inmediatamente el valor

$$\lambda_t = \frac{\lambda_{t_1} + \lambda_{t_0} \varphi}{1 + \varphi} \quad (14)$$



Calculando la laplaciana de (13) se vé sin más que el primer término de (7) se hace

$$(V_0+V_1) \frac{\lambda_t}{3} \Delta_R \phi(\underline{R}). \quad (b)$$

con  $\lambda_t$  definido por (14).

Es además obvio que el tercer término de (7) es

$$(V_0+V_1) q(\underline{R}, \epsilon_t) \quad (c)$$

De (a), (b) y (c) resulta entonces

$$-\frac{\lambda_t}{3} \Delta_R \phi(\underline{R}) - \Sigma_{at} \phi(\underline{R}) + q(\underline{R}, \epsilon_t) = 0 \quad (15)$$

que es la ecuación satisfecha por el flujo alisado y coincide con la ecuación del flujo de neutrones térmicos para una pila homogénea con una cierta  $\lambda_t$  y una  $\Sigma_{at}$  dadas por (11) y (14) respectivamente.

El área de difusión térmica  $L^2$  correspondiente a (15) puede calcularse de la relación usual  $L^2 = \frac{\lambda_t \lambda_{at}}{3}$  si se substituyen los valores de  $\lambda_t$  y  $\lambda_{at}$  dados por (14) y (12). Resulta así

$$L^2 = L_1^2 (1-f_u) \left(1 + \frac{\lambda_{t0}}{\lambda_{t1}} \varphi\right) \quad (16)$$

que concuerda hasta el segundo término con el valor que se obtiene de los calculos de Fermi<sup>1</sup>. Asimismo, la expresión  $L^2 = L_1^2 (1-f_u)$  ha sido mencionada por Wigner<sup>3</sup> quien la atribuye

buye a G.N.Plass<sup>4</sup>.

Vamos a extender este mismo tipo de cálculo a las ecuaciones de desceleración que aparecen en (5a) y (5b). Integrando cada ecuación sobre el volumen respectivo y añadiendo los resultados se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{t_0}}{3\Sigma_0 \xi_0} \int_{V_0} \Delta_r q_0(\underline{R}+\underline{r}, \epsilon) d\underline{r} + \frac{\lambda_{t_1}}{3\Sigma_1 \xi_1} \int_{V_1} \Delta_r q_1(\underline{R}+\underline{r}, \epsilon) d\underline{r} - \\ & - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_{V_0} q_0(\underline{R}+\underline{r}, \epsilon) d\underline{r} + \int_{V_1} q_1(\underline{R}+\underline{r}, \epsilon) d\underline{r} - \\ & - \frac{\Sigma_{a_0}}{\Sigma_0 \xi_0} \int_{V_0} q_0(\underline{R}+\underline{r}, \epsilon) d\underline{r} + \frac{\Sigma_{a_1}}{\Sigma_1 \xi_1} \int_{V_1} q_1(\underline{R}+\underline{r}, \epsilon) d\underline{r} = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Si se hace

$$\frac{\lambda_t}{\Sigma \xi} = \frac{\frac{\lambda_{t_0}}{\Sigma_0 \xi_0} \bar{q}_0 V_0 + \frac{\lambda_{t_1}}{\Sigma_1 \xi_1} \bar{q}_1 V_1}{\bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1} \quad (18a)$$

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi} = \frac{\frac{\Sigma_{a_0}}{\Sigma_0 \xi_0} V_0 \bar{q}_0 + \frac{\Sigma_{a_1}}{\Sigma_1 \xi_1} V_1 \bar{q}_1}{\bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1} \quad (18b)$$

(17) puede fácilmente transformarse en.

$$\frac{\lambda}{3\Sigma \xi} \Delta_r q(\underline{R}, \epsilon) - \frac{\partial q(\underline{R}, \epsilon)}{\partial \epsilon} - \frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi} q(\underline{R}, \epsilon) = 0 \quad (19)$$

que es la ecuación satisfecha por la densidad de desceleración promediada y coincide con la que resultaría para una pila homogénea cuyas constantes fuesen  $\lambda_t$ ,  $\Sigma$ ,  $\Sigma_0$  y  $\xi$ . Las ecuaciones (18) sólo determinan dos razones entre las cuatro constantes. Introduciendo los flujos rápidos

$$\phi(\underline{R}, \epsilon) = \frac{q(\underline{R}, \epsilon)}{\Sigma\xi} \quad \bar{\phi}_1(\underline{R}, \epsilon) = \frac{\bar{q}_1(\underline{R}, \epsilon)}{\Sigma_1\xi_1} \quad (20)$$

Las ecuaciones de definición

$$q = \frac{\bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1}{V_0 + V_1} \quad \phi = \frac{\bar{\phi}_0 V_0 + \bar{\phi}_1 V_1}{V_0 + V_1}$$

permiten obtener de (18a) y (20) las relaciones

$$\lambda_t = \frac{\lambda_{t1} + \lambda_{t0} \varphi}{1 + \varphi} \quad (21)$$

$$\Sigma\xi = \frac{\Sigma_1\xi_1 + \Sigma_0\xi_0\varphi}{1 + \varphi} \quad (22)$$

que expresan la longitud de transporte y el poder frenador - efectivos en la pila en términos de las magnitudes homogéneas correspondientes y del parámetro

$$\varphi(E) = \frac{\bar{\phi}_0(E) V_0}{\bar{\phi}_1(E) V_1} \quad (23)$$

Si se hace arbitrariamente

$$\xi = \xi_1 \quad (24)$$

de (22) resulta

$$\Sigma = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_0 \frac{\xi_0}{\xi_1} \varphi}{1 + \varphi} \quad (25)$$

que define la sección macroscópica total para la pila heterogénea. La definición (24) es conveniente en el sentido de que permite expresar la desceleración que ocurre en la pila en términos de las propiedades del moderador. Del mismo modo de (18b) se obtiene

$$\Sigma_a = \frac{\Sigma_{a1} + \Sigma_{a0} \varphi}{1 + \varphi} \quad (26)$$

que define la sección macroscópica de absorción para la pila.

### 3.- ECUACIONES DE LA PILA HETEROGENEA.

Podemos ahora prescindir del proceso de alisamiento y considerar el par de ecuaciones

$$\frac{\lambda_t}{3} \Delta \phi - \Sigma_{at} \phi + q(\underline{r}, \epsilon_t) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\lambda_t}{3\Sigma\xi} \Delta q(\underline{r}, \epsilon) - \frac{\partial q(\underline{r}, \epsilon)}{\partial \epsilon} - \frac{\Sigma_a}{\Sigma\xi} q(\underline{r}, \epsilon) = 0 \quad (19)$$

cuyas constantes han sido ya definidas, como las ecuaciones que describen el comportamiento de la pila heterogénea. En tanto que este par de ecuaciones es precisamente el que se ob

tendría dentro del mismo cuadro de suposiciones para una pila homogénea, se puede aplicar la teoría de esta última para establecer las ecuaciones de diseño. En primer término introducimos la edad

$$\tau(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \frac{\lambda_t}{3\Sigma_f} d\epsilon \quad (27)$$

en términos de la cual (19) se transforma en

$$\Delta q - \frac{\partial q}{\partial \tau} - \frac{3\Sigma_a}{\lambda_t} q = 0 \quad (28)$$

Se introduce además la probabilidad de escape a la absorción

$$p(\tau) = \exp \int_0^{\tau} \frac{3\Sigma_a}{\lambda_t} d\tau \quad (29)$$

y la densidad efectiva

$$q'(\underline{r}\tau) = \frac{q(\underline{r}\tau)}{p(\tau)} \quad (30)$$

que permite expresar (28) como una ecuación de edad

$$\Delta q' = \frac{\partial q'}{\partial \tau} \quad (31)$$

En cuanto a condiciones en la frontera se impondrán las usuales para la parte espacial. En lo referente a la relación entre  $q$  y  $\phi$  notamos que

$$q'(\underline{R}, 0) = q(\underline{R}, 0) = \frac{\int_{V_0} q_0(\underline{R}+\underline{r}, 0) d\underline{r} + \int_{V_1} q_1(\underline{R}+\underline{r}, 0) d\underline{r}}{V_0 + V_1} \approx$$

$$\approx \frac{1}{V_0+V_1} \int_{V_0} q_0(\underline{R}+\underline{r}, 0) d\underline{r} = \frac{\bar{\phi}_0 \Sigma_{a0} k_{ot} V_0}{V_0+V_1} \quad (a)$$

Si requerimos que  $q$  y  $\phi$  satisfagan en todo relaciones idénticas a las de la pila homogénea, deberemos hacer

$$q'(\underline{R}, 0) = \phi(\underline{R}) \Sigma_{at} k_t \quad (32)$$

esta ecuación, al mismo tiempo que expresa la condición inicial para  $q'$ , se puede considerar como una ecuación de definición para la constante  $k_t$  que en la pila heterogénea va a desempeñar el papel de constante de reproducción. En efecto, comparando (32) con (a) se obtiene

$$k_t = \frac{\bar{\phi}_0 \Sigma_{a0t} V_0}{\phi \Sigma_{at} (V_0+V_1)} k_{ot} = f_u k_{ot} = f_u \frac{\Sigma_{f0}}{\Sigma_{a0}} \eta$$

Es conveniente definir

$$\eta_u = \frac{\Sigma_{f0}}{\Sigma_{a0}} \eta \quad (33)$$

como el factor de producción del combustible de manera que

$$k_u = f_u \eta_u \quad (34)$$

de donde se sigue para la constante de reproducción el valor usual

$$k = p f_u \eta_u \quad (35)$$

De (29) y (18b) se obtiene

$$p(E) = \exp \left( - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma \xi} \frac{dE}{E} \right) =$$

$$= \exp - \int_E^{E_0} \frac{\frac{\Sigma_{a0}}{\Sigma_0 \xi_0} V_0 \bar{q}_0 + \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_1 \xi_1} V_1 \bar{q}_1}{V_0 \bar{q}_0 + V_1 \bar{q}_1} \frac{dE}{E} \quad (36)$$

Por otra parte de (5):

$$\frac{\Sigma_{a0}}{\Sigma_0 \xi_0} q_0(\underline{r}, \epsilon) = \frac{\lambda_{t0}}{3 \Sigma_0 \xi_0} \Delta q_0(\underline{r}, \epsilon) - \frac{\partial q_0(\underline{r}, \epsilon)}{\partial \epsilon}$$

$$\frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_1 \xi_1} q_1(\underline{r}, \epsilon) = \frac{\lambda_{t1}}{3 \Sigma_1 \xi_1} \Delta q_1(\underline{r}, \epsilon) - \frac{\partial q_1(\underline{r}, \epsilon)}{\partial \epsilon}$$

integrando la primera ecuación sobre  $V_0$ , la segunda sobre  $V_1$  y sumando resulta:

$$\frac{\Sigma_{a0}}{\Sigma_0 \xi_0} \bar{q}_0 V_0 + \frac{\Sigma_{a1}}{\Sigma_1 \xi_1} \bar{q}_1 V_1 = \frac{\lambda_{t0}}{3 \Sigma_0 \xi_0} \int_{V_0} \Delta q_0 dV_0 + \frac{\lambda_{t1}}{3 \Sigma_1 \xi_1} \int_{V_1} \Delta q_1 dV_1 -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{ \bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1 \} =$$



$$= \frac{\lambda_{t0}}{3\Sigma_0\xi_0} \int_{S_0} \frac{\partial q_0}{\partial n} dS_0 + \frac{\lambda_{t1}}{3\Sigma_1\xi_1} \left\{ \int_{S_1} \frac{\partial q_1}{\partial n} dS_1 - \int_{S_0} \frac{\partial q_1}{\partial n} dS_0 \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{ \bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1 \} = - \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1)$$

ya que la suma de las integrales de superficie es nula en virtud de las condiciones en la frontera de una celda. Sustituyendo este valor en (36) se obtiene

$$p(E) = \exp \int_0^E \frac{\frac{\partial}{\partial \epsilon} (\bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1)}{\bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1} d\epsilon = \frac{\bar{q}_0(\epsilon) V_0 + \bar{q}_1(\epsilon) V_1}{\bar{q}_0(0) V_0 + \bar{q}_1(0) V_1}$$

es decir

$$p(E) = \frac{\int_{V_0} q_0(r, E) dV_0 + \int_{V_1} q_1(r, E) dV_1}{\int_{V_0} q_0(r, E_0) dV_0 + \int_{V_1} q_1(r, E_0) dV_1} \quad (37)$$

Esta relación expresa  $p(E)$  en una forma que tiene una interpretación sencilla: es el cociente del número de neutrones que por celda llegan a energía  $E$  entre el número de neutrones producidas a energía  $E_0$  en cada celda. (37) expresa pues una generalización obvia del concepto de probabilidad de escape a la absorción en una pila homogénea. De hecho, esta expresión que aquí resulta como una consecuencia del método seguido para analizar el reactor heterogéneo ha sido propuesta independientemente por Moshinsky<sup>5</sup> como una definición de  $p(E)$  para sistemas heterogéneos.

Volviendo a la expresion original (36) se puede obtener una ecuacion aproximada para  $p$  despreciando el termino  $\frac{\sum_{s1} v_1 \bar{q}_1}{\sum_{s1} \xi_1}$  en el numerador. Por un sencillo calculo se obtiene

$$p(E) = \exp \left[ - \frac{N_0 V_0}{N_1 V_1 \sigma_{s1} \xi_1} \left( \frac{\bar{\phi}_0}{\bar{\phi}_1} \right)_r \int_E^{E_0} \sigma_{s0}(E) \frac{dE}{E} \right] \quad (38)$$

en donde  $\left( \frac{\bar{\phi}_0}{\bar{\phi}_1} \right)_r$  es el cociente de los flujos medios calculado a la energía de resonancia. Este resultado, que ya había sido reportado<sup>6</sup> concuerda con una expresión semejante publicada posteriormente<sup>7</sup>.

De la misma manera puede obtenerse de (27) una expresión aproximada para el área de migración rápida:

$$\begin{aligned} L_f^2 &= \tau_t = \int_{E_t}^{E_0} \frac{\lambda_t dE}{\sum \xi} = \int_{E_t}^{E_0} \frac{\frac{\lambda_t}{3 \sum_{s0} \xi_0} \bar{q}_0 V_0 + \frac{\lambda_{t1}}{3 \sum_{s1} \xi_1}}{\bar{q}_0 V_0 + \bar{q}_1 V_1} \frac{dE}{E} = \\ &= \int_{E_t}^{E_0} \frac{\frac{\lambda_{t0}}{3} V_0 \bar{\phi}_0 + \frac{\lambda_{t1}}{3} V_1 \bar{\phi}_1}{\sum_{s0} \xi_0 V_0 \bar{\phi}_0 + \sum_{s1} \xi_1 V_1 \bar{\phi}_1} \frac{dE}{E} = \\ &= \int_{E_t}^{E_0} \frac{\lambda_{t1} V_1 \bar{\phi}_1 \left[ 1 + \frac{\lambda_{t0}}{\lambda_{t1}} \frac{V_0 \bar{\phi}_0}{V_1 \bar{\phi}_1} \right]}{3 \sum_{s1} \xi_1 V_1 \bar{\phi}_1 \left[ 1 + \frac{\sum_{s0} \xi_0}{\sum_{s1} \xi_1} \frac{V_0 \bar{\phi}_0}{V_1 \bar{\phi}_1} \right]} \frac{dE}{E} \approx \int_{E_t}^{E_0} \left[ 1 + \frac{\lambda_{t0}}{\lambda_{t1}} \varphi \right] \times \\ &\times \frac{\lambda_{t1}}{3 \sum_{s1} \xi_1} \frac{dE}{E} = \left( 1 + \frac{\lambda_{t0}}{\lambda_{t1}} \varphi_u \right) L_{f1}^2 \end{aligned}$$

en resumen

$$L_f^2 = \left(1 - \frac{\lambda_{t0}}{\lambda_{t1}} \varphi_{u1}\right) L_{f1}^2 \quad (39)$$

#### 4.- COMPARACION CON EL EXPERIMENTO

Prieto<sup>6</sup> ha aplicado el análisis que acaba de describirse al cálculo de varios reactores conocidos. En sus cálculos, Prieto determina las constantes para el combustible y el moderador puros, mediante los valores difusionales corregidos por consideraciones de transporte. Además, ha considerado los valores adecuados que deben emplearse en las expresiones para  $p(E)$  y  $L_f^2$  por un estudio del curso de las secciones con la energía y, por último ha tomado en cuenta el efecto del reflector en caso de que se trate de una pila reflejada.

Con permiso de su autor, se resumen aquí algunos de los resultados obtenidos.

REACTOR DE KJELLER.- Uranio y agua pesada<sup>9</sup>.

Datos experimentales:		Valores calculados:
Masa de uranio	$M(u) = 2.16$ ton.	2.15 ton.
Masa de agua	$M(D_2O) = 6.82$ ton.	6.29 ton.
Espesor de reflector	$S = 70$ cm.	71 cm.
Radio del reactor	$R = 100$ cm.	98.2 cm.

PILA DE CHATILLON.- Oxido de uranio y agua pesada<sup>10</sup>.

Experimental		Calculado
$M(UO_2)$	= 3.55 ton.	3.79 ton.
$M(D_2O)$	= 4.52 ton.	5.05 ton.
S	= 90 cm.	85 cm.
R	= 90 cm.	95 cm.

Las cantidades de material mayores que las observadas se deben en este caso al hecho de que en tanto que la pila construida tiene un laplaciano  $\kappa^2 = 6.5 \text{ m}^{-2}$ . Prieto utilizo en sus cálculos el valor mayor  $\kappa^2 = 6.835 \text{ m}^{-2}$ . Así, el número de barras resulta 76 contra 69 de la pila construida.

BEPO.- Grafito y uranio metálico<sup>11</sup>.

Experimental	Calculado:
M(u) = 40 ton.	40.3 ton.
M(c) = 850 ton.	820 ton.
S = 3 ft	2.9 ft.
R = 10 ft.	9.9 ft.

GLEEP.- Grafito y uranio metálico<sup>12</sup>.

Experimental	Calculado:
M(u) = 33 ton.	34 ton.
M(c) = 505 ton.	497 ton.
S = 1.30 m.	1.32 m.
R = 2.86 m.	3.04 m.

El autor agradece al Prof. Prieto la gentileza con que puso a su disposición los resultados de su trabajo.

#### REFERENCIAS

1. E.Fermi. Science, Jan.10, 1946, reproducida en Nuclear Physics, Univ. of Chicago Press, 1950.
2. A.M.Weinberg. Calculation of Neutron Distribution in Heterogeneous piles. Publicado en "The Science and Engineering of Nuclear Power". Addison-Wesley Press, 1949.

3. E.Wigner, Jour. of Appl. Phys. 17, 857 (1946) resumido en "The Science and Engineering of Nuclear Power".
4. G.M. Plass, Jour.Appl.Phys. 23, 621 (1952).
5. M.Moshinsky, Congreso de la Soc.Mex.Fis., Querétaro, 1952.
6. A.Medina, Congreso de la Soc.Mex.Fis, Querétaro, 1952.
7. Edlund y Glasstone, The Elements of Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Co., 1952, p.263.
8. F.E.Prieto. Reportes al Instituto Nacional de la Investigación Científica (inédito).
9. Nu. 9, No. 5, (1951).
10. Jour. de Phys. et Rad. 12, No. 7, 751 (1951).
11. Nu. 8, No. 6, 36 (1951).
12. Nu. 8, No. 3, 3 (1951).

Esta página  
está intencionalmente  
en blanco