

## DISPERSION ELASTICA DE NEUTRONES POR NUCLEOS EN MOVIMIENTO.

Fernando E. Prieto C.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e

Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido : Mayo 19, 1954)

## RESUMEN

*A generalization of the well known treatment of the elastic scattering of neutrons by a nucleus at rest is presented in this paper. Assuming an initial motion for the scatterer nucleus, a discussion is made of the scattering of neutrons in both, the laboratory and the center of mass frames of reference. An expression is obtained for the scattering function, and the final energy of the scattered neutron is fully discussed.*

## I.- INTRODUCCION

En los tratamientos usuales de la teoría de las pilas atómicas, se supone que la deceleración de los neutrones es debida a colisiones elásticas con los núcleos del moderador, los cuales a su vez se suponen en reposo. Puesto que es evidente que tales núcleos no se encuentran en reposo, es interesante averiguar si el movimiento inicial de los núcleos del moderador tiene o no consecuencias apreciables en los resultados finales del cálculo de una pila. En este trabajo, primero de una serie dedicada al tratamiento del problema propuesto, se obtiene la función de colisión con las modificaciones debidas al movimiento inicial del blanco, y se hace una discusión detallada de la energía final del neutrón en el sistema del Laboratorio.

## II.- DISPERSION EN EL SISTEMA DEL LABORATORIO

Vamos a denotar por  $L$  al sistema de referencia del laboratorio, por  $C$  al sistema de referencia del centro de masa, y por  $m$  y  $M$  a las masas del neutrón y del blanco respectivamente.

Sean  $\underline{p}_0$  y  $\underline{p}$  los impulsos\* inicial y final del neutrón en el sistema del laboratorio, y  $\underline{P}_0$  y  $\underline{P}$  los impulsos inicial y final del blanco en el mismo sistema. Para el sistema de referencia tomaremos como eje  $x$  la dirección y sentido de  $\underline{p}_0$ , y como eje  $y$  un eje normal al  $x$  en el plano formado por  $\underline{p}_0$  y  $\underline{P}_0$ , y con una dirección tal que la compo

---

\*Para abreviar la escritura se ha convenido en llamar "impulso" a la "cantidad de movimiento". En esta nomenclatura a la integral sobre el tiempo de una fuerza se le llamaría impulsión.

nente y de  $\underline{P}_0$  sea positiva. Sean además  $\varphi_0 = \text{ang}(\underline{p}_0, \underline{P}_0)$ ,  $\varphi = \text{ang}(\underline{p}_0, \underline{P})$ ,  $\theta = \text{ang}(\underline{p}_0, \underline{p})$  con  $0 \leq \varphi_0, \theta, \varphi \leq \pi$ . Al semiplano  $y > 0$  lo llamaremos "semiplano A" y al semiplano  $y < 0$  "semiplano B".

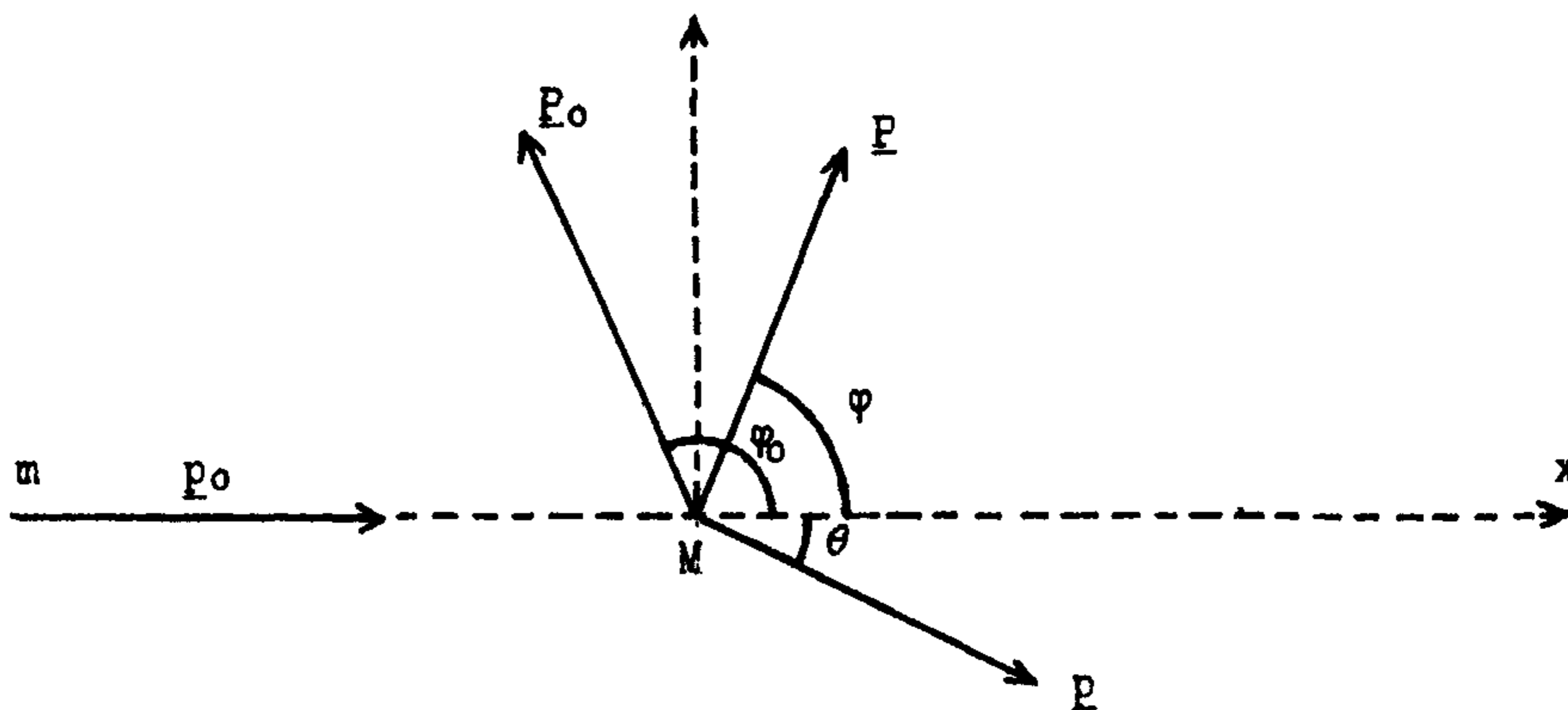


Fig. 1

Las ecuaciones de conservación del impulso son

$$p_0 + P_0 \cos \varphi_0 = P \cos \varphi + p \cos \theta \quad \text{II.1}$$

$$P_0 \sin \varphi_0 = \pm P \sin \varphi \pm p \sin \theta \quad \text{II.2}$$

Los signos  $\pm$  de los términos del segundo miembro de II.2 corresponden respectivamente a dispersión en los semiplanos A o B de la partícula correspondiente, como se indica en la tabla siguiente:

Término	$P \sin \varphi$	$p \sin \theta$	dispersión en el semiplano	Caso
Signo	$\pm$	$+$	A	A
	$+$	$-$	B	B

La ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{p_0^2}{m} + \frac{P_0^2}{M} = \frac{p^2}{m} + \frac{P^2}{M} \quad \text{II.3}$$

Sean  $E_0$  y  $E_1$  las energías iniciales del neutrón y del blanco respectivamente,  $E$  y  $E_r$  las correspondientes energías finales, y llamemos

$$\rho = \frac{P_0}{p_0} = \sqrt{\gamma \frac{E_1}{E_0}}, \quad \gamma = \frac{M}{m}, \quad a = \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^2 \quad \text{II.4}$$

Sea además  $\omega = \omega(\theta) = \text{ang}(\underline{P}_0, \underline{p})$ , el ángulo entre la dirección inicial de movimiento del blanco y la dirección final de movimiento del neutrón, es inmediato que

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos(\theta - \varphi_0) = \cos(\varphi_0 - \theta) && \text{caso A} \\ \cos \omega &= \cos(\theta + \varphi_0) && \text{caso B} \end{aligned} \quad \text{II.5}$$

$$0 \leq \omega \leq 2\pi$$

Eliminando a  $\varphi$  entre las ecuaciones II.1 y II.2 resulta

$$P^2 = p_0^2 + P_0^2 + 2p_0P_0 \cos \varphi_0 + p^2 - 2p(P_0 \cos \omega + p_0 \cos \theta) \quad \text{II.6}$$

en tanto que de II.3 se obtiene

$$P^2 = P_0^2 + \gamma(p_0^2 - p^2) \quad \text{II.7}$$

Eliminando ahora a  $P^2$  de estas dos últimas ecuaciones

resulta la ecuación cuadrática

$$(\gamma+1) \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 - 2u \frac{p}{p_0} - b = 0 \quad \text{II.8}$$

con

$$u = u(\theta) = \cos \theta + \rho \cos \omega \quad \text{II.9}$$

$$b = \gamma - 1 - 2\rho \cos \varphi_0 \quad \text{II.10}$$

ecuación de la cual se puede obtener el impulso final del neutrón como función del ángulo de dispersión y de las condiciones iniciales:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\gamma+1} \left[ u \pm \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b} \right] \quad \text{II.11}$$

De la condición de que  $p$  sea positivo o nulo, se obtienen algunas relaciones entre el signo del radical que aparece en II.11 y el signo del parámetro  $b$ , a la vez que resultan algunas restricciones sobre el valor de  $u$ , las cuales se manifiestan físicamente como zonas permitidas y zonas prohibidas de dispersión. Al parámetro  $b$ , que como se verá es de gran importancia en todo el análisis, lo llamaremos "parámetro del blanco". Si  $b = 0$  la ecuación II.8 degenera en una ecuación homogénea en  $p$ , y las soluciones se obtienen directamente de ella. Resulta entonces para el impulso final del neutrón:

$$\left. \begin{array}{l} p = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{p}{p_0} = \frac{2}{\gamma+1} u = \xi u \\ \text{si } b = 0, \quad u \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{II.12}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\gamma+1} [u \pm \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}] \quad (1)$$

signo + si  $b > 0, u \geq 0$  II.13

signo ± si  $b < 0, u > 0$

Con el objeto de aclarar la naturaleza de las soluciones II.13 correspondientes a  $b \neq 0$ , vamos a hacer en II.8 una rotación de ejes alrededor del origen por un ángulo

$$\zeta = \frac{1}{2} \text{ang tan } \xi \quad \text{II.14}$$

con

$$\xi = \frac{2}{\gamma+1} \quad \text{II.15}$$

la ecuación II.8 toma entonces la forma

$$\frac{\sqrt{1+\xi^2} + 1}{b\xi} y'^2 - \frac{\sqrt{1+\xi^2} - 1}{b\xi} u'^2 = 1 \quad \text{II.16}$$

siendo  $y'$  y  $u'$  los correspondientes valores de  $\frac{p}{p_0}$  y  $u$  en el nuevo sistema de referencia.

Ahora bien, puesto que solo estamos interesados en dispersión de neutrones por núcleos de masa mayor o a lo más igual que la del neutrón,  $\gamma \geq 1$  y entonces  $0 < \xi \leq 1$  así que los coeficientes de  $y'^2$  y  $u'^2$  en II.16 son siempre de signos contrarios. Si definimos  $r_1$  y  $r_2$  tales que

$$r_1^2 = \frac{|b|\xi}{\sqrt{1+\xi^2} - 1} \quad r_2^2 = \frac{|b|\xi}{\sqrt{1+\xi^2} + 1} \quad \text{II.17}$$

la ecuación II.16 es de la forma

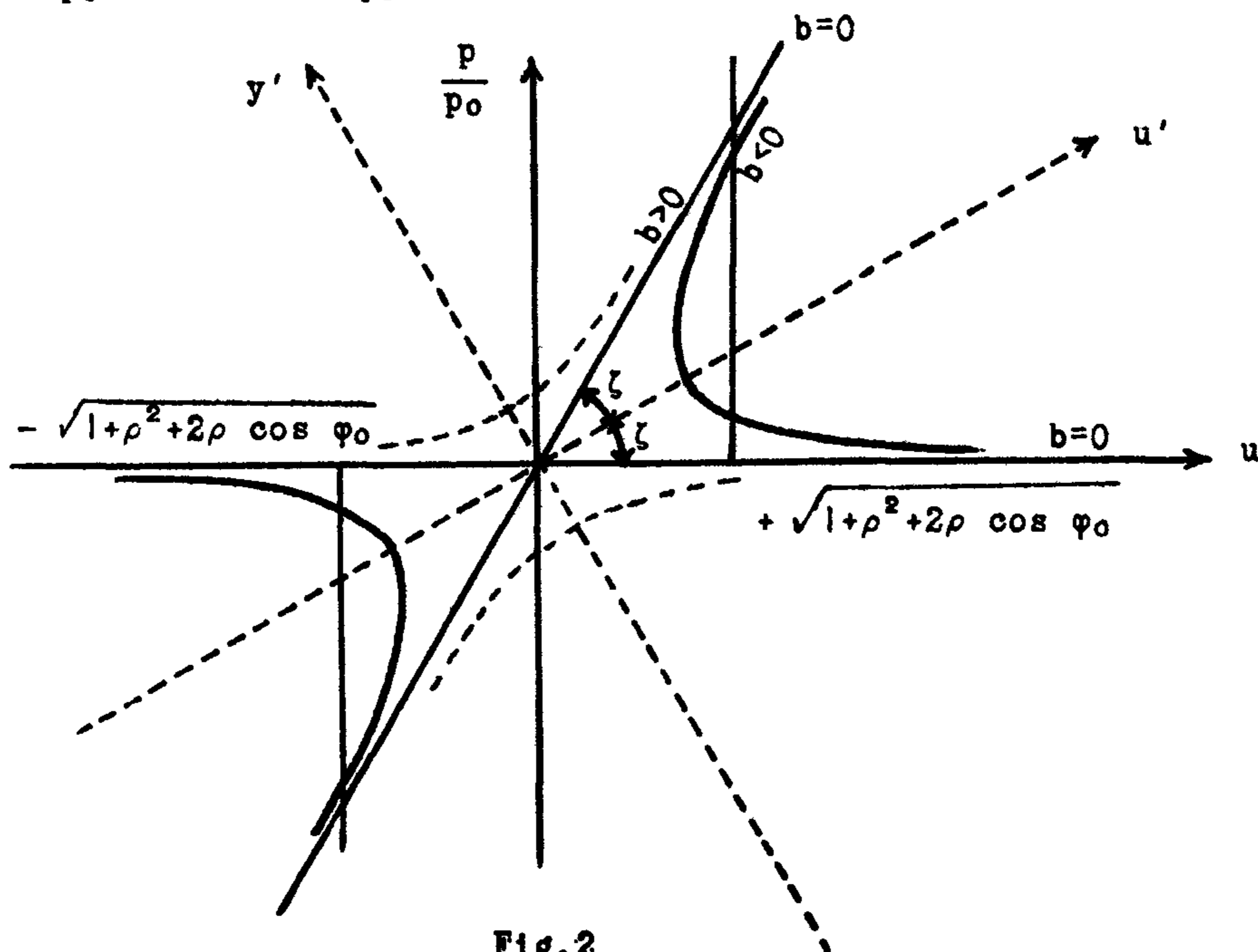
$$\frac{y'^2}{r_2^2} - \frac{u'^2}{r_1^2} = 1 \quad \text{si } b > 0 \quad \text{II.18}$$

ó

$$\frac{u'^2}{r_1^2} - \frac{y'^2}{r_2^2} = 1 \quad \text{si } b < 0 \quad \text{II.19}$$

según que el parámetro del blanco sea positivo o negativo. Estas ecuaciones corresponden a una pareja de hipérbolas conjugadas cuyas asíntotas, en el sistema  $(\frac{p}{p_0}, u)$  son

$$\frac{p}{p_0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{p}{p_0} = (\tan 2\zeta) u = \xi u \quad \text{II.20}$$



De la Fig.2 se ve que para tener valores positivos del impulso es preciso tomar en II.11 únicamente el signo + si  $b > 0$ , ya que el signo - corresponde a la rama negativa de la hipérbola  $b > 0$ , y que si  $b < 0$  es preciso tomar únicamente  $u > 0$ , pues para  $u < 0$  se tiene la rama negativa de la hipérbola  $b < 0$ . Nótese también que las asíntotas son las gráficas de las soluciones correspondientes a  $b = 0$ , y que para que el impulso sea positivo se requiere tener  $u > 0$ .

De las ecuaciones II.7, II.12 y II.13 se obtiene para el impulso final del blanco

$$\frac{P}{p_0} = \sqrt{p^2 + \gamma} = \sqrt{1 + 2 \rho \cos \varphi_0 + \rho^2} \quad \text{si } p = 0 \quad b = 0 \quad \text{II.21}$$

$$\frac{P}{p_0} = \sqrt{\rho^2 + \gamma - (1-a)u^2} \quad \text{si } \frac{p}{p_0} = \xi u$$

$$\frac{P}{p_0} = \left\{ \rho^2 + \frac{1-a}{2} [(\gamma+1)(1+\rho \cos \varphi_0) - u^2 \mp u \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad b \neq 0 \quad \text{II.22}$$

signo - si  $b > 0$ , signo  $\mp$  si  $b < 0$ .

De las dos últimas ecuaciones se obtiene inmediatamente la energía final del blanco o energía de reculo:

$$E_r = E_1 + E_0 \quad \text{si } p = 0 \quad b = 0 \quad \text{II.23}$$

$$E_r = E_1 + E_0 \left[ 1 - \frac{4 u^2}{(\gamma+1)^2} \right] \quad \text{si } \frac{p}{p_0} = \xi u$$

$$E_r = E_1 + \frac{2E_0}{(\gamma+1)^2} \left[ \frac{(\gamma+1)^2}{2} - u^2 \pm u \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b} \right] \quad b \neq 0 \quad \text{II.24}$$



signo - si  $b > 0$ , signo + si  $b < 0$ .

De las ecuaciones II.12 y II.13 se obtiene para la energía final del neutrón

$$E = 0 \quad \text{si } p = 0 \quad b = 0 \quad \text{II.25}$$

$$E = \frac{4E_0 u^2}{(\gamma+1)^2} \quad \text{si } \frac{p}{p_0} = \xi u$$

$$E = \frac{E_0}{(\gamma+1)^2} [2u^2 + (\gamma+1)b \pm 2u\sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}] \quad b \neq 0 \quad \text{II.26}$$

signo + si  $b > 0$  signo - si  $b < 0$ .

De la ecuación II.8 se obtiene

$$u = \frac{\gamma+1}{2} \sqrt{\frac{E}{E_0}} - \frac{b}{2} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \quad \text{II.27}$$

o su equivalente

$$\frac{\gamma+1}{2} \sqrt{\frac{E}{E_0}} - u \sqrt{\frac{E}{E_0}} - \frac{b}{2} = 0 \quad \text{II.28}$$

ecuación que será de utilidad más adelante.

Con respecto a la duplicidad de valores del impulso y la energía, que según II.13 y II.26 aparece en el caso  $b < 0$ , haremos notar por ahora que ambos valores son compatibles con las ecuaciones de conservación del impulso y la energía, siempre y cuando se tome el correspondiente signo cambiado en el valor del impulso o la energía final del blanco en II.22 y II.24. El significado físico de esta duplicidad de valores se aclara-

ra en la sección IV al estudiar los máximos y mínimos de la energía final del neutrón.

### III.- DISPERSION EN EL SISTEMA DEL CENTRO DE MASA.

Sean respectivamente  $\underline{r}$ ,  $\underline{R}$  y  $\underline{r}_0$  los vectores de posición de  $m$ ,  $M$  y del centro de masa  $C$  en un cierto sistema de referencia, por ejemplo, en el sistema  $L$ :

$$\underline{r}_0 = \frac{m\underline{r} + M\underline{R}}{m + M} \quad \text{III.1}$$

Sean además  $\underline{y}_0$  la velocidad del centro de masa en el sistema  $L$ ,  $\underline{y}'_0$  y  $\underline{y}'$  las velocidades relativas de  $m$  con respecto a  $C$  antes y después de la colisión, y  $\underline{V}_0$ ,  $\underline{V}'$  las correspondientes de  $M$ . Es inmediato que

$$\underline{y}_0 = \frac{m\underline{y}_0 + M\underline{V}_0}{m + M} \quad \underline{y}_0 = \dot{\underline{r}} \quad \underline{V}_0 = \dot{\underline{R}} \quad \text{III.2}$$

$$v_0 \cos \lambda = \frac{m}{m+M} v_0 + \frac{M}{m+M} V_0 \cos \varphi_0 \quad \text{III.2a}$$

$$v_0 \sin \lambda = \frac{M}{m+M} V_0 \sin \varphi_0 \quad \text{III.2b}$$

$$\underline{y}'_0 = \frac{M}{m+M} (\underline{y}_0 - \underline{V}_0) \quad \underline{V}'_0 = \frac{m}{m+M} (\underline{V}_0 - \underline{y}_0) \quad \text{III.3}$$

en consecuencia, el impulso total en el sistema  $C$  antes de la colisión es nulo, y por la conservación del impulso:

$$\underline{p}' + \underline{P}' = m\underline{y}' + M\underline{V}' = \underline{p}'_0 + \underline{P}'_0 = 0 \quad \text{III.4}$$

y resulta

$$\underline{V}' = -\frac{1}{\gamma} \underline{v}' \quad \text{III.5}$$

La ecuación de la conservación de la energía es

$$mv_0'^2 + MV_0'^2 = mv'^2 + MV'^2 \quad \text{III.6}$$

y combinando estas dos últimas ecuaciones con III.3 se obtiene

$$v'^2 = \frac{M^2}{(m+M)^2} (\underline{v}_0 - \underline{V}_0)^2 \quad \text{III.7}$$

$$\therefore \quad \underline{v}' = v_0' \quad , \quad V' = V_0' \quad \text{III.8}$$

Así pues, en el sistema C, las velocidades finales de las partículas tienen la misma magnitud que antes del choque, y direcciones opuestas entre sí. El efecto total del choque es meramente un cambio en las direcciones de movimiento.

Vamos a encontrar ahora la relación que existe entre las direcciones de dispersión en el sistema L y en el sistema C.

Se tiene

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_0 \quad \text{III.9}$$

$$\underline{V} = \underline{V}' + \underline{v}_0 \quad \text{III.10}$$

o bien tomando componentes en III.9

$$v \cos \theta = v' \cos \theta' + v_0 \cos \lambda \quad \text{III.11}$$

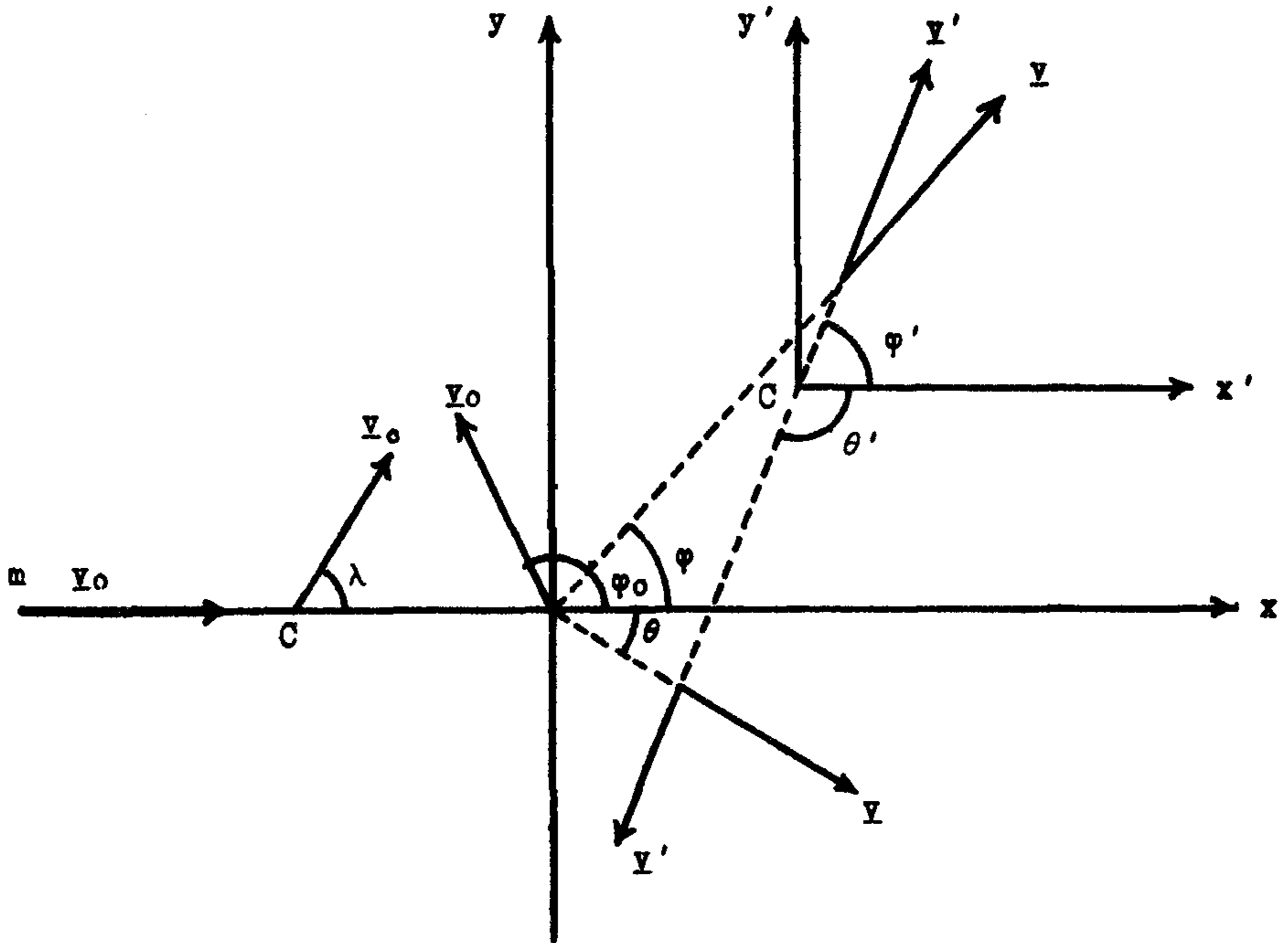


Fig.3

$$v \operatorname{sen} \theta = \pm v' \operatorname{sen} \theta' + v_0 \operatorname{sen} \lambda \quad \text{III.12}$$

en la última ecuación los signos deben tomarse, de acuerdo con la convención usada en la sección II, de la manera siguiente

$$v \operatorname{sen} \theta = \pm v' \operatorname{sen} \theta' + v_0 \operatorname{sen} \lambda \quad \text{III.13}$$

para una dispersión en el semiplano A, y

$$v \operatorname{sen} \theta = v' \operatorname{sen} \theta' - v_0 \operatorname{sen} \lambda \quad \text{III.14}$$

para una dispersión en el semiplano B.

Eliminando a  $v$  entre las ecuaciones III.11 y III.12, y usando III.2a y III.3 se obtiene

$$\cos\theta = \left[ \frac{v_0}{|v_0 - V_0|} + \gamma \cos\theta' + \frac{V_0\gamma}{|v_0 - V_0|} \cos\varphi_0 \right] \times \\ \times \left[ \gamma^2 + \frac{|v_0 + \gamma V_0|^2}{|v_0 - V_0|^2} + \frac{2v_0\gamma}{|v_0 - V_0|} (\cos\theta' + \rho \cos(\theta' + \varphi_0)) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{III.15}$$

con

$$\left. \begin{aligned} |v_0 + \gamma V_0| &= (v_0^2 + \gamma^2 V_0^2 + 2v_0 V_0 \gamma \cos\varphi_0)^{\frac{1}{2}} \\ |v_0 - V_0| &= (v_0^2 + V_0^2 - 2v_0 V_0 \cos\varphi_0)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad \text{III.16}$$

en la ecuación III.15 ambos signos son validos para una dispersión en el semiplano A, y el signo  $+$  para una dispersión en el semiplano B.

Elevando al cuadrado III.9 y substituyendo los valores correspondientes de  $v'$  y  $v_0$ , se obtiene, después de eliminar el ángulo  $\lambda$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1+a+a_1+a_2}{2} + \\ + \frac{1-a}{2} \sqrt{1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)}} [1 + \rho \cos\varphi_0 (1 \pm \tan\varphi_0 \tan\theta')] \cos\theta' \quad \text{III.17}$$

con

$$\frac{a_1}{2} = \frac{\rho^2 - 2\gamma\rho\cos\varphi_0}{(\gamma+1)^2} \quad \text{III.18}$$

$$\frac{a_2}{2} = \frac{\rho^2 + 2\rho \cos \varphi_0}{(\gamma+1)^2} \quad \text{III.19}$$

$a$  y  $\rho$  definidas por II.4.

Diferenciando III.17 resulta

$$\frac{dE}{E_0} = -\frac{1-a}{2} \sqrt{1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)}} \left[ 1 + \rho \frac{\text{sen}(\theta' + \varphi_0)}{\text{sen} \theta'} \right] \text{sen} \theta' d\theta' \quad \text{III.20}$$

o bien

$$\text{sen} \theta' d\theta' = -\frac{2dE}{E_0(1-a)} \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \rho \cos \varphi_0 + \rho \text{sen} \varphi_0 \cot \theta' \right)^{-1} \quad \text{III.21}$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$\frac{v_0}{|y_0 - \underline{v}_0|} = \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{E_1}{E_0} - 2 \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{E_1}{E_0}} \cos \varphi_0 \right)^{-\frac{1}{2}} = \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{III.22}$$

$$\frac{v_0 \gamma}{|y_0 - \underline{v}_0|} = \rho \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{III.23}$$

$$\frac{|y_0 + \gamma \underline{v}_0|^2}{|y_0 - \underline{v}_0|^2} = \left[ 1 + \frac{a_2(\gamma+1)^2}{2} \right] \left[ 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right]^{-1} \quad \text{III.24}$$

y de III.17

$$\cos \theta' + \rho \cos(\theta' + \varphi_0) = \left( \frac{E}{E_0} - \frac{1+a+a_1+a_2}{2} \right) \frac{2}{1-a} \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{III.25}$$

Substituyendo III.22-III.25 en III.15 y simplificando,

se obtiene

$$\cos \theta = \frac{1}{\gamma+1} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \left[ 1 + \rho \cos \varphi_0 + \gamma \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta' \right] \quad \text{III.26}$$

Eliminando ahora  $\lambda$  entre III.2b y III.12, y usando III.19 y III.20 resulta la ecuación

$$\pm \text{sen} \theta' = \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \pm (\gamma+1) \sqrt{\frac{E}{E_0}} \text{sen} \theta - \rho \text{sen} \varphi_0 \right] \quad \text{III.27}$$

con signo - en ambos miembros para una dispersión en el semiplano B, y  $\pm$  en el primer miembro y  $+$  en el segundo para una dispersión en el semiplano A.

Despejando a  $\cos \theta'$  en III.26:

$$\cos \theta' = \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ (\gamma+1) \sqrt{\frac{E}{E_0}} \cos \theta - 1 - \rho \cos \varphi_0 \right] \quad \text{III.28}$$

Substituyendo finalmente estas dos últimas ecuaciones en III.21, se obtiene

$$\text{sen} \theta' d\theta' = - \frac{2dE}{E_0(1-a)} \left( 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-a)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \pm \text{sen} \theta - \frac{\rho}{\gamma+1} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \text{sen} \varphi_0 \right] \left[ \pm \text{sen} \theta \pm \rho \text{sen} \omega \right]^{-1} \quad \text{III.29}$$

con signo + para dispersión en el semiplano A y - para dispersión en el semiplano B.

Considérese ahora un neutrón de energía  $E_0$  que se mueve en la dirección del vector unitario  $\underline{\Omega}_0$ . Después de una

dispersión por un núcleo que se mueve en la dirección  $\underline{\Omega}_1$ , con una energía  $E_1$ , el neutrón se moverá con una energía  $E$  en la dirección  $\underline{\Omega}$ . Sea  $P(E, \underline{\Omega}, E_0, \underline{\Omega}_0, E_1, \underline{\Omega}_1)$  la probabilidad de que un neutrón en un estado  $(E_0, \underline{\Omega}_0)$  pase, por colisión con un núcleo en el estado  $(E_1, \underline{\Omega}_1)$ , al estado  $(E, \underline{\Omega})$  por unidad de energía  $E$  y unidad de ángulo sólido, o sea, que  $P(E, \underline{\Omega}, E_0, \underline{\Omega}_0, E_1, \underline{\Omega}_1) dE d\underline{\Omega}$  es la probabilidad de una transición del estado  $(E_0, \underline{\Omega}_0)$  al estado con energía  $(E, dE)$  y dirección  $(\underline{\Omega}, d\underline{\Omega})$ . Si en el sistema C la sección de dispersión es

$$d\sigma_s = I(\theta', \chi') \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\chi' \quad \text{III.30}$$

siendo  $\theta'$  y  $\chi'$  los ángulos de la dirección final de vuelo del neutrón con respecto a la inicial, por III.29 se tiene

$$d\sigma_s = \frac{2I(\theta', \chi')}{E_0 (1-\alpha)} \left[ 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-\alpha)} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\pm \operatorname{sen}\theta - \frac{\rho}{\gamma+1} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \operatorname{sen}\varphi_0}{\pm \operatorname{sen}\theta \pm \rho \operatorname{sen}\omega} dE d\chi' \quad \text{III.31}$$

y puesto que

$$P(E, \underline{\Omega}, E_0, \underline{\Omega}_0, E_1, \underline{\Omega}_1) dE d\underline{\Omega} = \frac{|d\sigma_s|}{\sigma_s} \delta[\cos\theta - \cos\theta] \quad \text{III.32}$$

en donde  $\cos\theta$  verifica la ecuación II.28, se tiene para la función de colisión o de dispersión

$$P(E, \underline{\Omega}, E_0, \underline{\Omega}_0, E_1, \underline{\Omega}_1) = \frac{2I(\chi', \varphi)}{E_0 (1-\alpha) \sigma_s} \left[ 1 + \frac{2a_1}{\gamma(1-\alpha)} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta \mp \frac{\rho}{\gamma+1} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \operatorname{sen}\varphi_0}{\operatorname{sen}\theta + \rho \operatorname{sen}\omega} \delta[\cos\theta - \cos\theta] \quad \text{III.33}$$



con ambos signos para una dispersión en el semiplano A, y el signo + para una dispersión en el semiplano B.

#### IV.- MAXIMOS Y MINIMOS DE LA ENERGIA FINAL DEL NEUTRON.

Vamos a encontrar ahora los valores máximos y mínimos de la energía final del neutrón, los cuales corresponderan obviamente a los valores máximos y mínimos del impulso final. Para hacer el cálculo vamos a atacar sucesivamente el problema según que el parámetro del blanco sea nulo, positivo o negativo, y en cada caso distinguiendo entre una dispersión en el semiplano A y una en el semiplano B.

1o.- Parametro del blanco nulo.  $b = 0$ .

1a.- Dispersión en el semiplano A. Por II.25 se tiene para la energía final del neutrón

$$E = \frac{4E_0}{(\gamma+1)^2} u^2 \quad \text{IV.1}$$

y derivando respecto a  $\theta$ :

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{8E_0}{(\gamma+1)^2} u \frac{du}{d\theta} \quad \text{IV.2}$$

de modo que los valores extremos se tienen para valores de  $\theta$  tales que

$$u = 0 \quad \text{o} \quad \frac{du}{d\theta} = 0 \quad \text{IV.3}$$

y usando II.5 y II.9 se ve que estas condiciones son de la forma:

$$\tan \theta_1 = \rho \operatorname{sen} \varphi_0 (1 + \rho \cos \varphi_0)^{-1} \quad \text{IV.4}$$

$$\tan \theta_2 = -(1 + \rho \cos \varphi_0) (\rho \operatorname{sen} \varphi_0)^{-1}. \quad \text{IV.5}$$

es inmediato entonces que

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta_1 \quad \text{IV.6}$$

y substituyendo en II.9 se obtiene

$$u(\theta_1) = + \sqrt{1 + 2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2} \quad \text{IV.7}$$

$$u(\theta_2) = 0 \quad \text{IV.8}$$

en tanto que para los valores extremos de la energía resulta

$$E_{\max} = (1 - a) (E_0 + E_1) \quad \theta = \theta_1 \quad \text{IV.9}$$

$$E_{\min} = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \theta_1 \quad \text{IV.10}$$

con

$$\tan \theta_1 = \left[ (1 - a) \frac{E_1}{E_0} - a \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{IV.11}$$

1b.- Dispersión en el semiplano B. Las condiciones - que debe satisfacer  $\theta$  para que se tengan valores extremos - de la energía son en este caso

$$\tan \theta_1 = -\rho \operatorname{sen} \varphi_0 (1 + \rho \cos \varphi_0)^{-1} \quad \text{IV.12}$$

$$\tan \theta_2 = (1 + \rho \cos \varphi_0) (\rho \operatorname{sen} \varphi_0)^{-1} \quad \text{IV.13}$$

y resulta

$$u(\theta_1) = - \sqrt{1+2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2} \quad \text{IV.14}$$

$$u(\theta_2) = 0 \quad \text{IV.15}$$

De II.12 se ve que en el intervalo entre  $\theta_2$  y  $\theta_1$  el impulso sería negativo, las soluciones no corresponden en consecuencia a ninguna realidad física, y por lo tanto debe concluirse que el neutrón no puede ser dispersado en direcciones comprendidas entre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

Para aclarar la dependencia de  $p$ , y en consecuencia de  $E$ , con el ángulo de dispersión, vamos a girar el eje polar por un ángulo  $\theta_0$  tal que

$$\tan \theta_0 = \rho \operatorname{sen} \varphi_0 (1 + \rho \cos \varphi_0)^{-1}, \quad \text{IV.16}$$

llamando  $\theta'$  al ángulo de dispersión con respecto al nuevo eje polar, se tiene

$$u(\theta') = \sqrt{1+2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2} \cos \theta' \quad \text{IV.17}$$

y resulta

$$\frac{p(\theta')}{p_0} = \sqrt{(1-a) \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} \cos \theta' \quad \text{IV.18}$$

$$\frac{E(\theta')}{E_0} = (1-a) \left(1 + \frac{E_1}{E_0}\right) \cos^2 \theta' \quad \text{IV.19}$$

La ecuación de  $p$  como función de  $\theta'$  es la ecuación de

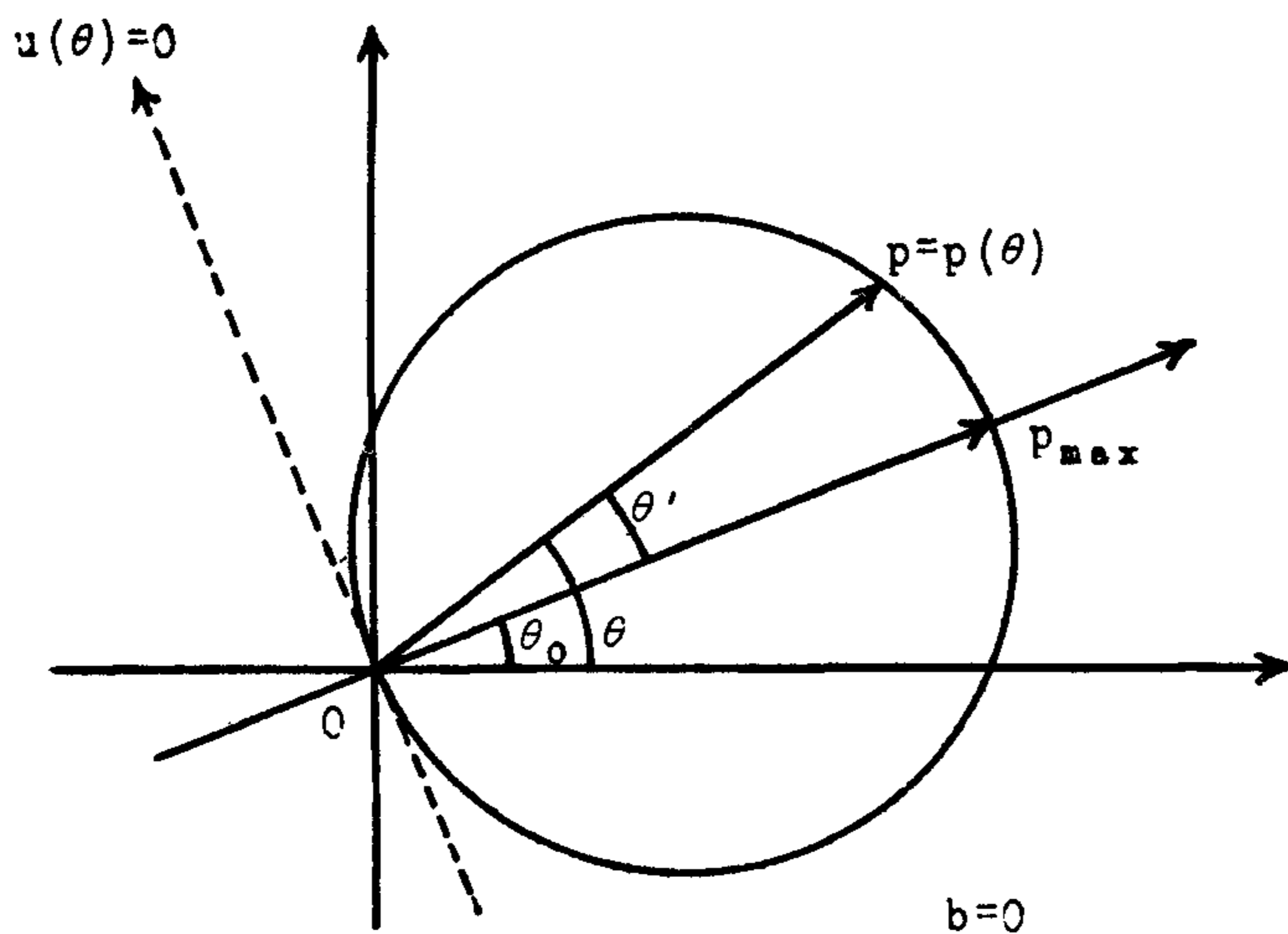


Fig. 4

un círculo con un diámetro como eje polar, y con el polo sobre el círculo (Fig.4). De aquí se ve que el neutrón solo puede dispersarse en la región  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0$  en el semiplano A, y  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0$  en el semiplano B, que es la región limitada por la recta  $u(\theta) = 0$ .

2o.- Parámetro del blanco positivo.  $b > 0$ .

De acuerdo con II.26 y II.13, la energía y el momento están dados por

$$E = \frac{E_0}{(\gamma+1)^2} [u + \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}]^2 \quad \text{IV.20}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\gamma+1} [u + \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}] = \sqrt{\frac{E}{E_0}} \quad \text{IV.21}$$

y derivando E con respecto a  $\theta$ :

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{2E_0}{(\gamma+1)^2} \frac{(u+\sqrt{u^2+(\gamma+1)b})^2}{\sqrt{u^2+(\gamma+1)b}} \frac{du}{d\theta} \quad \text{IV.22}$$

Puesto que  $b > 0$ ,  $\sqrt{u^2+(\gamma+1)b} > |u|$ , y entonces los valores extremos de la energía se tienen cuando

$$\frac{du}{d\theta} = -\text{sen } \theta - \rho \text{ sen } \omega \frac{d\omega}{d\theta} = 0 \quad \text{IV.23}$$

esta ecuación tiene dos soluciones, una correspondiente a una dispersión en el semiplano A, y otra a una dispersión en el semiplano B, las cuales están dadas respectivamente por

$$\tan \theta_1 = \rho \text{ sen } \varphi_0 (1 + \rho \cos \varphi_0)^{-1} \quad \text{IV.24}$$

$$\tan \theta_2 = -\rho \text{ sen } \varphi_0 (1 + \rho \cos \varphi_0)^{-1} = \tan(\pi - \theta_1) \quad \text{IV.25}$$

y para estos valores de  $\theta$  se tiene

$$u(\theta_1) = + \sqrt{1 + 2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2} \quad \text{IV.26}$$

$$u(\theta_2) = - \sqrt{1 + 2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2} \quad \text{IV.27}$$

y de IV.26 se obtiene

$$E_{\text{max}} = E_0 + \frac{2E_0}{(\gamma+1)^2} \left\{ \rho^2 - \rho(\gamma-1) \cos \varphi_0 - \gamma + \sqrt{(1 + 2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2)(\gamma^2 + \rho^2 - 2\gamma\rho \cos \varphi_0)} \right\} \quad \text{IV.28}$$

para  $\theta = \theta_1$  en el semiplano A, y

$$E_{\min} = aE_0 + \frac{2E_0}{(\gamma+1)^2} \left\{ \rho^2 - \rho(\gamma-1) \cos \varphi_0 + \gamma - \sqrt{(1+2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2)(\gamma^2 + \rho^2 - 2\gamma\rho \cos \varphi_0)} \right\} \quad \text{IV.29}$$

para  $\theta = \pi - \theta_1$  en el semiplano B.

Hagamos nuevamente una rotación del eje polar por un ángulo  $\theta_0$ , lo cual lleva  $u(\theta)$  a la forma IV.17, y entonces  $\left(\frac{p}{p_0}\right)$  satisface la ecuación

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 - 2 \frac{p}{p_0} r_1 \cos \theta' + r_1^2 - \left(\frac{b}{\gamma+1} + r_1^2\right) = 0 \quad \text{IV.30}$$

con

$$r_1^2 = \frac{1+2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2}{(\gamma+1)^2} \quad \text{IV.31}$$

que es la ecuación de un círculo con centro sobre el eje polar, distancia  $r_1$  del centro al polo, y radio  $r$  definido por

$$r^2 = \frac{b}{\gamma+1} + r_1^2 \quad \text{IV.32}$$

y puesto que  $b > 0$ ,  $r > r_1$  y por lo tanto el círculo encierra al polo (Fig.5).

La energía máxima se tiene entonces para una dispersión en el semiplano A por un ángulo  $\theta_0$ , y la energía mínima para una dispersión en el semiplano B por un ángulo  $\theta_2 = \pi - \theta_0$ . El neutrón puede ser dispersado en todas las di

recciones.

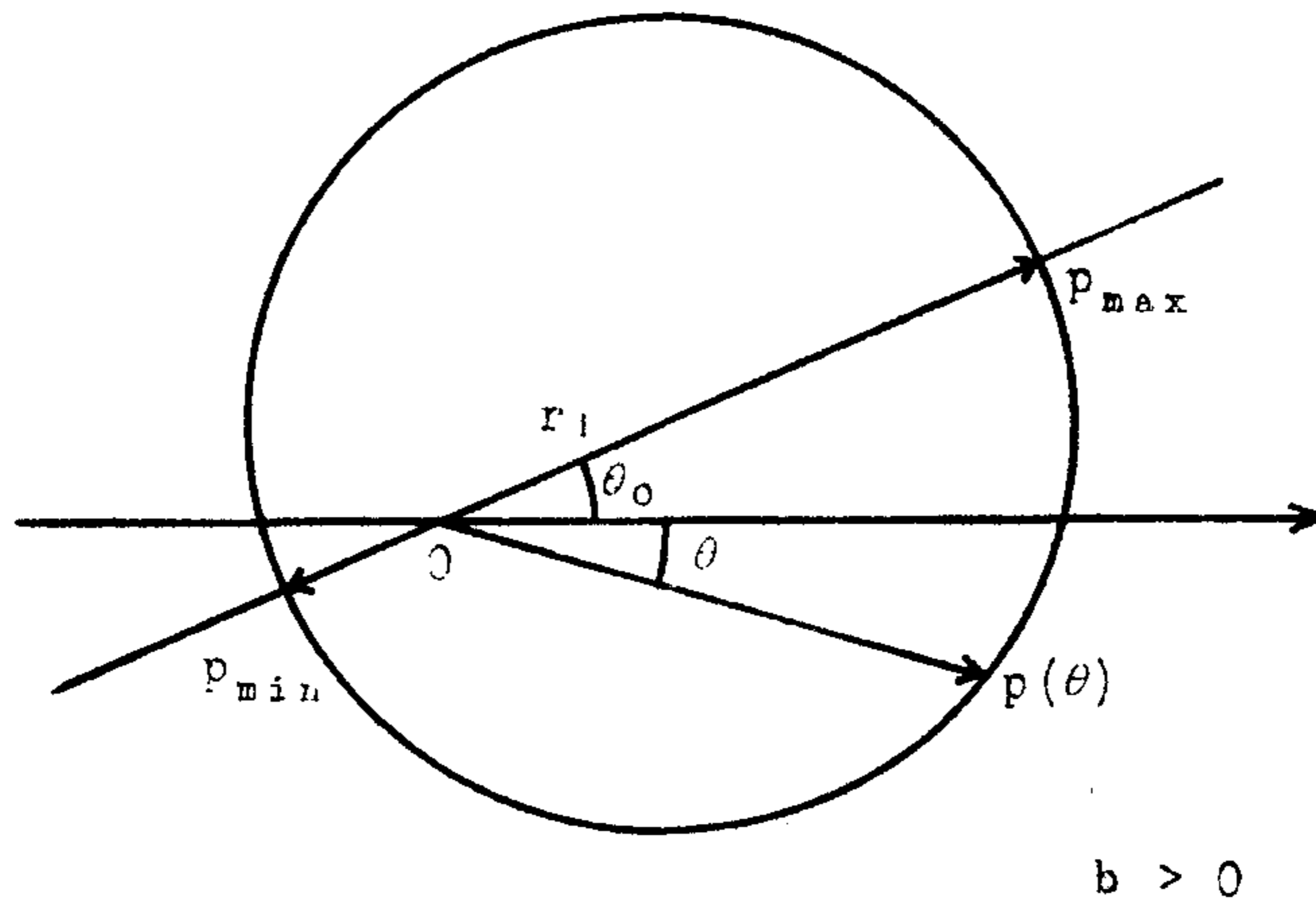


Fig.5

30.- Parámetro del blanco negativo.  $b < 0$ .  
La energía final del neutrón es en este caso

$$E = \frac{E_0}{(\gamma+1)^2} [u \pm \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}]^2 \quad \text{IV.33}$$

y el impulso

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{E}{E_0}} = \frac{1}{\gamma+1} [u \pm \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}] \quad \text{IV.34}$$

derivando respecto a  $\theta$ :

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{2E_0}{(\gamma+1)^2} \frac{(u \pm \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b})^2}{\sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}} \frac{du}{d\theta} \quad \text{IV.35}$$

y siendo  $b < 0$ ,  $|u| > \sqrt{u^2 + (\gamma+1)b}$ , de modo que los valores

extremos se tienen cuando

$$\frac{du}{d\theta} = -\text{sen } \theta - \rho \text{ sen } \omega \frac{d\omega}{d\theta} = 0 \quad \text{IV.36}$$

pero esta condición es idéntica a la del caso anterior, de modo que también son válidas para el caso que ahora nos ocupa las ecuaciones IV.24, 25, 26, 27.

Ahora bien, por IV.27,  $u(\theta_2) < 0$ , y de IV.33 se ve que en este caso el impulso es negativo, de modo que la solución no tiene significación física; para  $\theta_1$  se tienen sin embargo, dos valores extremos de  $E$ , dados por IV.28 y IV.29 según que se tome el signo + o el - en IV.33.

Girando nuevamente el eje polar alrededor del polo por un ángulo  $\theta_0$ , se encuentra que  $p(\theta')$  satisface la ecuación

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \mp 2 \frac{p}{p_0} r_1 \cos \theta' + r_1^2 - \left(\frac{b}{(\gamma+1)} + r_1^2\right) = 0 \quad \text{IV.37}$$

con  $r_1$  y  $r$  definidos por IV.31 y IV.32; y puesto que ahora  $r$  es menor que la distancia  $r_1$  del polo al centro, IV.37 es la gráfica de un círculo con el eje polar coincidiendo con un diámetro, y con el polo fuera del círculo, como se indica en la Fig.6.

Se ve desde luego que para un valor dado del ángulo de dispersión, el neutrón puede ser dispersado con dos valores diferentes del impulso, los cuales corresponden desde luego, de acuerdo con II.22 a valores diferentes del impulso final del blanco. Es inmediato también que si el neutrón se dispersa en la dirección  $\theta_0$  con la energía máxima (o mínima), el



blanco sera dispersado a su vez con energía mínima (o máxima). Otra conclusión inmediata es que en este caso existen direc-

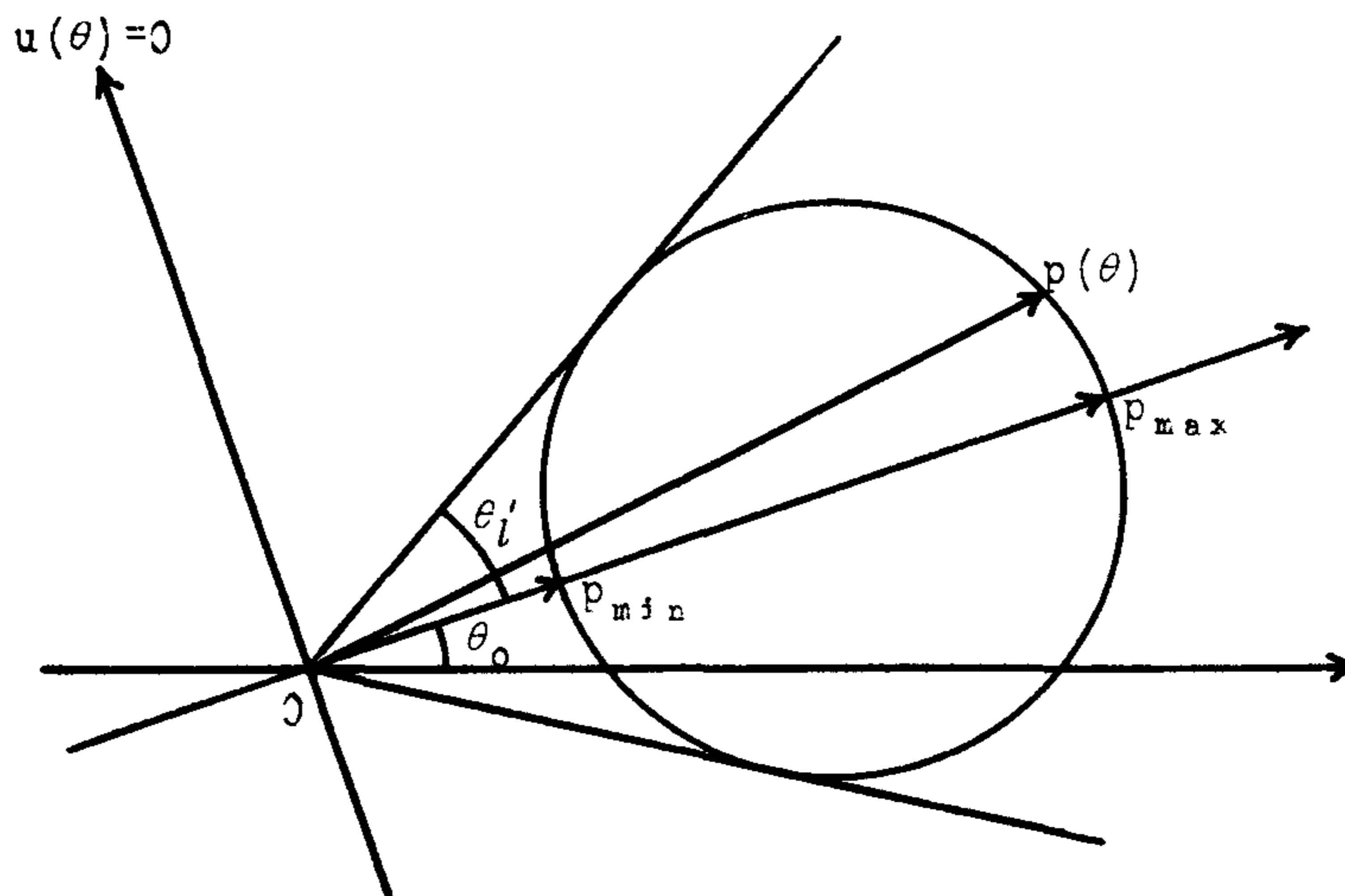


Fig.6

ciones límites de dispersión, las cuales están dadas por las tangentes al círculo que pasan por el polo.

La manera mas sencilla de encontrar los valores límites  $\theta_1$  del ángulo de dispersión, es encontrar primero los valores límites de  $\theta'$  y de estos encontrar  $\theta_{11}$ . Por otra parte, se ve de IV.34 que para tener  $p(\theta')$  real, debe cumplirse la condición

$$u^2(\theta') + (\gamma+1)b = u^2(\theta') - (\gamma+1)|b| \geq 0 \quad \text{IV.38}$$

se obtiene inmediatamente

$$\tan^2 \theta \leq \tan^2 \theta'_i = \frac{1+2\rho \cos \varphi_0 + \rho^2 + (\gamma+1)(1+2\rho \cos \varphi_0 - \gamma)}{(\gamma+1)|\gamma-1-2\rho \cos \varphi_0|} \quad \text{IV.39}$$

y los dos valores limites del angulo de dispersion estan dados por la condicion

$$\tan^2 \theta_l = \tan^2(\theta_0 \pm \theta'_i) = \frac{\frac{\rho \operatorname{sen} \varphi_0}{1+\rho \cos \varphi_0} \pm \tan \theta'_i}{1 \mp \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi_0}{1+\rho \cos \varphi_0} \tan \theta'_i} \quad \text{IV.40}$$

Para finalizar esta discusion diremos entonces que las energias maxima y minima con  $b < 0$  estan dadas por IV.28 y IV.29, ambas para una dispersion por un angulo  $\theta_0$  definido por IV.16.

Es interesante hacer notar que todos los resultados obtenidos en las secciones II, III y IV se reducen automaticamente a los resultados usuales (blanco en reposo) haciendo simplemente  $\rho = 0$  en las formulas correspondientes<sup>1,2</sup>

## V.- ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL PARAMETRO DEL BLANCO.

Como se ha visto en las secciones anteriores, el signo del parametro del blanco es de gran importancia ya que de él dependen indiscutiblemente las caracteristicas de la dispersion. Es conveniente por lo tanto hacer algunas consideraciones sobre el signo de dicho parametro, el cual, de acuerdo con II.10 y III.12 está definido por

$$b = \gamma - 1 - 2\rho \cos \varphi_0 = \gamma - 1 - 2\gamma \frac{V_0}{v_0} \cos \varphi_0 \quad \text{V.1}$$

y es por lo tanto una función de la relación de las masas  $\gamma$ , de la relación de velocidades,  $\frac{V_0}{v_0}$ , y del ángulo de incidencia del blanco  $\varphi_0$ . Vamos a ver pues como varía  $b$  con  $\gamma$  para  $\frac{V_0}{v_0}$  y  $\varphi_0$  dadas, con  $\frac{V_0}{v_0}$  para  $\gamma$  y  $\varphi_0$  dadas, y con  $\varphi_0$  para  $\gamma$  y  $\frac{V_0}{v_0}$  dadas.

Como función de  $\gamma$ ,  $b$  es una línea recta de pendiente

$$m = 1 - 2 \frac{V_0}{v_0} \cos \varphi_0 \quad \text{V.2}$$

y ordenada al origen  $-1$ . Si  $m > 1$ ,  $b > 0$  para toda  $\gamma$ . Si  $1 \geq m > 0$ , hasta una cierta  $\gamma_n$  se tendrá  $b < 0$ , y a partir de ella  $b > 0$ . Finalmente, si  $m \leq 0$ ,  $b < 0$  para toda  $\gamma$

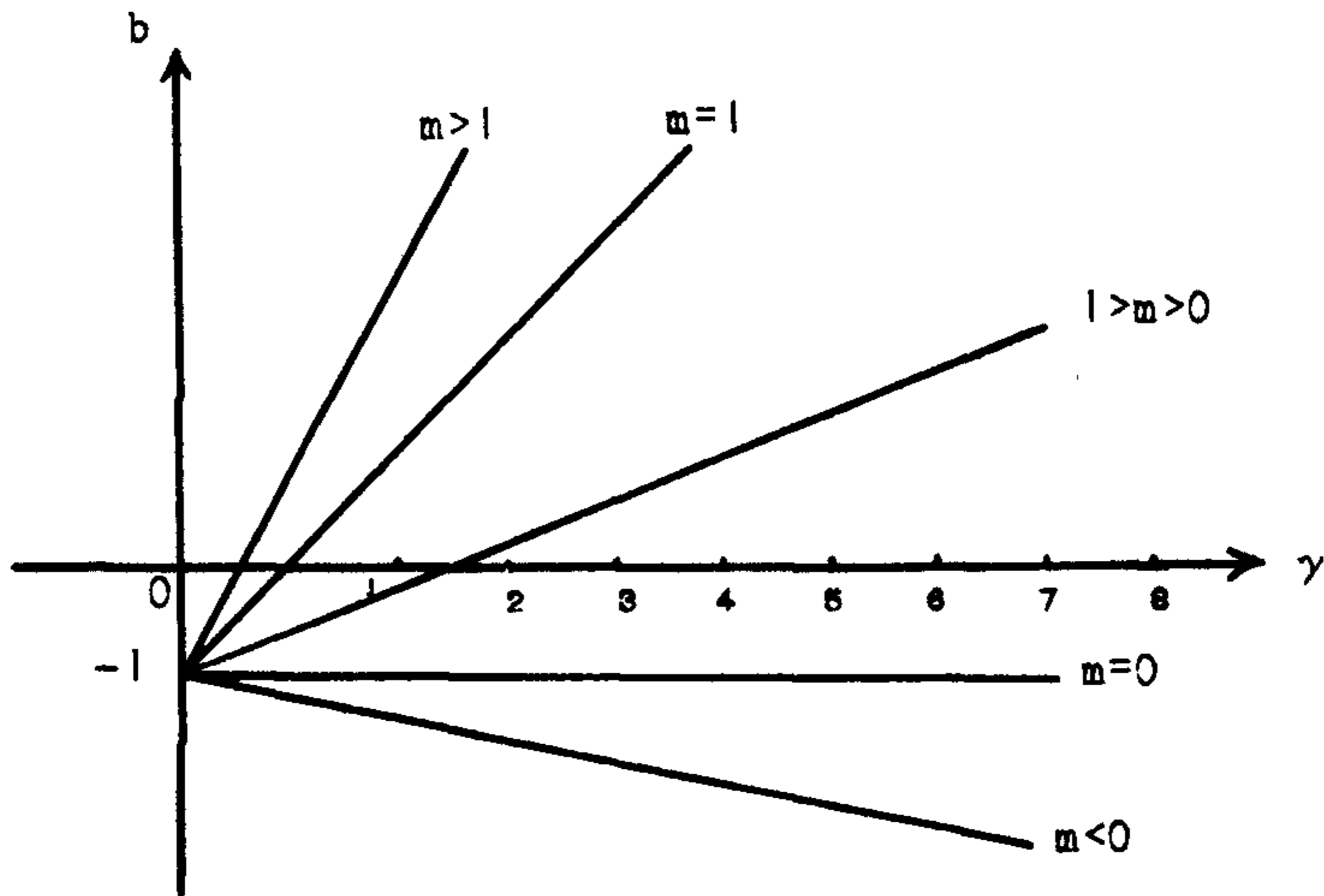


Fig.7

Como función de  $\frac{V_0}{v_0}$ ,  $b$  es una línea recta de pendiente  $-2\gamma \cos \varphi_0$  y ordenada al origen  $\gamma - 1$ . Para todo valor -

de  $\gamma$ , si  $\pi \geq \varphi_0 > \frac{\pi}{2}$ ,  $b \geq 0$  para cualquier relación de velocidades. Si  $\gamma = 1$ ,  $b < 0$  para  $\frac{\pi}{2} > \varphi_0 \geq 0$ . Si  $\gamma > 1$   $b < 0$  para  $0 \leq \frac{V_0}{v_0} \leq \left(\frac{V_0}{v_0}\right)_1$ , y  $b > 0$  para  $\frac{V_0}{v_0} > \left(\frac{V_0}{v_0}\right)_1$ , siendo  $\left(\frac{V_0}{v_0}\right)_1$  un cierto valor de la relación de velocidades, el cual está determinado por  $\gamma$  y por  $\varphi_0$ .

Como función de  $\varphi_0$ ,  $b$  es una cosenoide desplazada sobre los ejes (Fig.8).

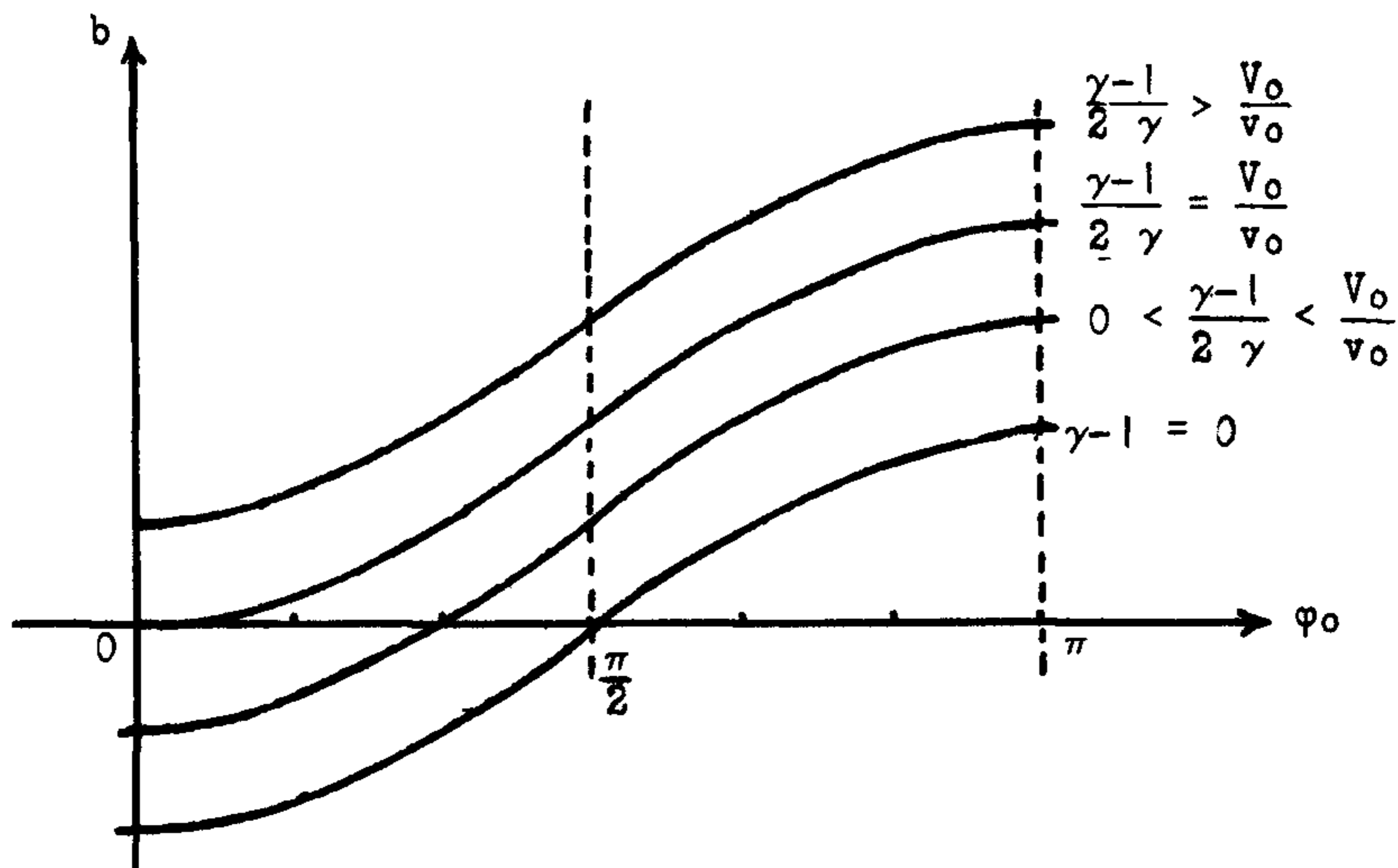


Fig.8

Se ve que para cualquier valor de  $\gamma$ ,  $b \geq 0$  si  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ , y que

$$b \leq 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 = \text{ang} \cos \left( \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{v_0}{V_0} \right)$$

$$b > 0 \quad \text{para} \quad \varphi_0 < \varphi \leq \pi$$

Es interesante hacer notar que en la práctica, para -

$\gamma > 1$  se tiene  $\frac{1}{2} \leq \frac{\gamma-1}{2\gamma} < \frac{1}{2}$  y es por lo tanto posible que la relación  $\frac{v_0}{v_0}$ , que va en general aumentando a medida que el neutrón se va decelerando, tome valores mayores o menores que  $\frac{\gamma-1}{2\gamma}$ , y en consecuencia, que haya dispersiones con el parámetro del blanco positivo o negativo.

Para terminar, el autor desea agradecer al Prof. Alejandro Medina sus valiosas discusiones sobre este trabajo.

#### REFERENCIAS

1. S.Glasstone and M.C.Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, D.Van Nostrand Co. (1952), ch.VI,p.137.
2. H.Soodak and E.C.Campbell, Elementary pile Theory, J.Willey and Sons, (1950), p.4.