

RESTRICCIONES CUANTICAS SOBRE LA MENSURABILIDAD
DE LOS CAMPOS EN LA TEORIA DE LA GRAVITACION.

James L. Anderson*

Universidad de Maryland, College Park, Maryland, U.S.A.

(Recibido: Junio 30, 1954)

RESUMEN

La mesurabilidad del campo gravitacional se discute tanto desde el punto de vista clásico como del cuántico. Se muestra que clásicamente la medición puede hacerse si se usan partículas exploradoras con masa que tiende a 0. Por otro lado, se encuentra que debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, deben usarse partículas exploradoras con masa extremadamente grande para obtener resultados precisos. Así,

*Trabajo hecho bajo los auspicios de la U.S. Office of Naval Research.

pues, parece que una determinación precisa del campo gravitacional no es posible si se toman en cuenta las restricciones cuánticas.

I.- INTRODUCCION

En cualquier intento de combinar las disciplinas de la mecánica cuántica y la relatividad general, deben discutirse cuales son las restricciones, si es que las hay, que las condiciones cuánticas imponen sobre la mensurabilidad del campo gravitacional. Tal estudio es necesario si se intenta cuantizar el campo gravitacional directamente, ya que es de esta manera como se le da significación física a las reglas de conmutación postuladas entre las variables del campo. Aun cuando no se este interesado en cuantizar el campo gravitacional, las restricciones cuánticas, tales como las relaciones de incertidumbre, aun serán aplicables por lo menos en lo concerniente a los aparatos de medición.

En este trabajo vamos a analizar los procedimientos disponibles para medir el campo gravitacional y a discutir las limitaciones que sobre estas mediciones imponen las relaciones de incertidumbre. Vamos a tratar el campo gravitacional como un campo clásico no lineal, despreciando aquellos efectos que puedan provenir de fluctuaciones cuánticas. Al tratar el efecto de la imposición de condiciones cuánticas sobre nuestros aparatos de medición, vamos a seguir el método usado por Bohr y Rosenfeld¹ en su tratamiento del problema análogo en la teoría electromagnética lineal. Nuestra principal conclusión será que en general es imposible medir

el campo gravitacional dentro de una región del espacio \mathcal{Q} tiempo, con precisión arbitrariamente alta.

II.- MEDICION CLASICA DEL CAMPO GRAVITACIONAL.

Antes de considerar los efectos cuánticos, debemos primero discutir como puede medirse clásicamente el campo gravitacional. En la teoría electromagnética, es la existencia de la ley de fuerza de Lorentz la que nos permite medir el campo, en efecto, la medición del campo se efectúa de hecho midiendo el cambio ocasionado por la fuerza del campo en el impulso de un cuerpo explorador. Sin embargo, en la teoría de la gravitación no hay una ley de fuerza del tipo Lorentz. Como veremos mas adelante, la afirmación de que una partícula material se mueve a lo largo de una geodésica en general no es cierta.

Esta carencia de una ley de fuerza en la teoría de la gravitación de la relatividad general, no es un defecto de la teoría, sino mas bien una consecuencia de ella. Para que una ley de fuerza tal como la de Lorentz tenga significado, es necesario que se pueda separar el campo en dos partes, una perteneciente al cuerpo cargado y la otra a la parte restante del campo. Esta última parte del campo es la que aparece en la ley de fuerza. En el caso del campo electromagnético es posible efectuar esta separación, (aunque no de una manera completamente determinada), debido a que las ecuaciones del campo son lineales.

De hecho, una ley de fuerza del tipo Lorentz no es necesario para la teoría. Como ya han demostrado Einstein², Infeld y Hoffmann, si se representan los puntos masa por sin-

gularidades, entonces las interacciones entre dos de tales puntos masa son realmente determinadas por las ecuaciones del campo. Posteriormente Infeld y Schild³ pudieron demostrar - que una partícula de masa infinitesimal en un campo gravitacional dado, se mueve a lo largo de geodésicas del espacio, confirmando de esta manera la vieja hipótesis de Einstein de que las partículas materiales se mueven a lo largo de geodésicas. Nótese, sin embargo, que los resultados de Infeld son válidos únicamente cuando el campo gravitacional de la partícula es extremadamente pequeño comparado con el campo gravitacional en el cual se encuentra. Debido a la no linealidad - de las ecuaciones del campo gravitacional, la separación del campo de la partícula puede hacerse únicamente de un modo - aproximado, y cuanto más pequeña sea la masa de la partícula tanto mejor será la aproximación. Es por esta razón que es posible tratar dentro del marco de la relatividad general el movimiento de un planeta en el campo del Sol de un modo satisfactorio mediante la suposición de que se mueve a lo largo de geodésicas del campo del Sol. Si se intenta aplicar - este mismo procedimiento al problema de los dos cuerpos, por ejemplo, al de una estrella doble, se llega a resultados contradictorios⁴.

Por todo lo expuesto anteriormente vemos que la manera clásica de medir el campo gravitacional consiste en observar el movimiento de una partícula exploradora cuya masa es extremadamente pequeña comparada con las masas que producen el campo gravitacional*. Lo más importante de este trabajo, es entonces hacer notar que las ecuaciones de movimiento para el -

* Véase Nota 1 al final del artículo.

cuerpo explorador (ver la nota 1), por medio de las cuales esperamos medir el campo gravitacional, son únicamente aproximadas, y que son rigurosamente ciertas únicamente en el límite cuando la masa del cuerpo explorador se anula. La situación en la teoría de la gravitación es entonces radicalmente diferente de la situación en la teoría electromagnética, en la cual la ecuación de fuerza de Lorentz se supone ser válida - cualquiera que sea el valor de la carga.

III.- MEDICION CUANTICA DEL CAMPO GRAVITACIONAL.

Si intentamos ahora imponer restricciones cuánticas sobre nuestras mediciones, siguiendo el método de Bohr y Rosenfeld, nos encontramos inmediatamente en dificultades. Considérese por ejemplo una medición hecha para determinar $\{_{44}^1\}$. Emplearíamos para ello una partícula exploradora que inicialmente estuviera en reposo, de tal manera que $U^i = (0,0,0,1)$. Entonces el cambio con el tiempo del impulso mU^i de la partícula exploradora estaría dado por

$$\frac{d}{dt} (mU^i) = \frac{dp^i}{dt} = m \{_{44}^1\} \quad (1)$$

Entonces, para medir $\{_{44}^1\}$, podríamos permitir que la partícula exploradora fuera acelerada por el campo gravitacional durante un intervalo de tiempo T . Al final de este intervalo el cuerpo explorador habría adquirido una cierta cantidad de impulso p^i dado por

$$p^i = m \{_{44}^1\} T \quad (2)$$

de modo que una medición de p' es equivalente a una medición de $\{_{44}^1\}$. La incertidumbre en el valor de $\{_{44}^1\}$ esta dada por

$$MT\Delta \{_{44}^1\} > \Delta p' \quad . \quad (3)$$

El impulso final p' puede medirse permitiendo que el cuerpo explorador interaccione con algún otro objeto durante un tiempo Δt . Durante esta medición se dará origen a una incertidumbre incontrolable $\Delta x'$ en la posición del cuerpo explorador la cual esta dada por la relación de incertidumbre

$$\Delta p' \Delta x' \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

Así pues, la incertidumbre en la medición de $\{_{44}^1\}$ esta dada por

$$\Delta \{_{44}^1\} \geq \frac{\hbar}{m T \Delta x} \quad (5)$$

Este resultado es suficiente por sí mismo para aclarar la naturaleza de nuestras dificultades.

Con objeto de aumentar la precisión en nuestra medición de $\{_{44}^1\}$ tendríamos que aumentar el valor de m como lo indica la ecuación (5), pero entonces los resultados de Infeld y Schild ya no serían válidos y no podríamos usar (1) para determinar $\{_{44}^1\}$

IV.- CONCLUSIONES

Sería desde luego inapropiado concluir basándonos en el análisis anterior, que la mecánica cuántica y la relatividad general son incompatibles. Sin embargo, no puede menos que sorprender el hecho de que el método más sencillo para medir clásicamente el campo gravitacional, sea inconsistente con los requerimientos de la mecánica cuántica*. Esto justifica en consecuencia los comentarios que se hacen a continuación.

En primer lugar, es difícil ver de que manera puede procederse en un intento para cuantizar el campo gravitacional en analogía con el campo electromagnético. Para hacerlo, deben postularse relaciones de conmutación entre las variables del campo, a las cuales a su vez se les debe dar significación física por medio de los resultados experimentales. Bohr y Rosenfeld han encontrado como hacer esto para el campo electromagnético. Pero es obvio que no se puede proceder de la misma manera en el caso gravitacional, ya que no puede definirse el significado del campo gravitacional desde un punto de vista cuántico. Aun cuando es posible por lo menos formalmente, aplicar los métodos de la mecánica cuántica al campo gravitacional, no es de ninguna manera clara que tal modo de proceder corresponda a alguna realidad física.

En segundo lugar, nos encontramos frente al problema de averiguar si el campo gravitacional, aun tratado como un concepto clásico, es compatible o no, con los requerimientos de la mecánica cuántica. Es desde luego tentador tratar de usar los resultados anteriores para argüir en contra de una disci

*Véase Nota 2 al final del artículo.

plina o de la otra. Sabemos, sin embargo, que cada teoría posee una cierta área de aplicabilidad. La mecánica cuántica ha tenido un éxito sin paralelo en la descripción de los fenómenos atómicos. La relatividad general, por otra parte, aun cuando no tan rica en predicciones experimentales, tiene una cierta simplicidad y consistencia lógica a las cuales es difícil renunciar.

Para terminar es conveniente hacer notar que hay por lo menos una salida posible a nuestras dificultades, la cual vamos a describir. Como ya hemos mencionado anteriormente, en una teoría no lineal tal como la de la relatividad general, la interacción entre las fuentes del campo esta implícitamente contenida en las ecuaciones del campo. En las ecuaciones de movimiento de estas fuentes, no aparece en ninguna parte el concepto del campo gravitacional.

Podría entonces adoptarse la actitud de considerar el campo gravitacional como un mero formulismo matemático. La realidad física en la teoría estaría entonces representado por las fuentes del campo, esto es, por las partículas materiales. La teoría nos dice entonces la manera como se mueven estas partículas bajo la acción de sus interacciones mutuas. Podría después aplicarse las condiciones cuánticas a estas partículas, en otras palabras, podría cuantizarse su movimiento.

Aun cuando tal manera de proceder es extremadamente difícil de llevar a la práctica (las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse únicamente en una forma aproximada de la relatividad general) tiene, sin embargo, el siguiente argumento en su favor. En ninguna parte de las ecuaciones finales

de movimiento aparece el concepto de interacción puntual, y es una creencia bastante generalizada que es precisamente en este concepto de interacción puntual donde se originan las actuales dificultades teóricas en el tratamiento de los campos. En consecuencia, no es completamente descabellado sospechar que una revisión de la situación en la teoría de la gravitación pueda conducir a una mejor comprensión de otras teorías del campo.

El autor desea agradecer al Dr. Willem V.R. Malkus sus interesantes discusiones sobre el material presentado en este trabajo.

NOTA 1.- Rigurosamente hablando, el movimiento de nuestra partícula exploradora está gobernado por las ecuaciones para una geodésica:

$$\frac{dU^a}{d\tau} = -\{^a_{1\kappa}\} U^1 U^\kappa$$

en la que $\{^a_{1\kappa}\}$ es el símbolo de Christoffel de segunda clase definido por

$$\{^a_{1\kappa}\} = \frac{1}{2} g^{a\beta} (g_{1\beta,\kappa} + g_{\kappa\beta,1} - g_{1\kappa,\beta})$$

y en la que U^1 es el cuadrivector velocidad de la partícula exploradora.

Se ve entonces que lo más que podemos medir mediante la observación del movimiento de un cuerpo explorador son los valores de los símbolos de Christoffel. Las $g_{1\kappa}$ son el análogo a los potenciales de la teoría electromagnética

tanto que los $\{_{i\kappa}^a\}$ son el análogo de los campos eléctrico y magnético. Al hablar de una medición del campo gravitacional lo que realmente significa es una medición de uno de los símbolos de Christoffel. Este cambio de énfasis de las $g_{i\kappa}$ a los $\{_{i\kappa}^a\}$ como observamos de la teoría no debe ocasionar mas dificultades en el presente análisis de las que origina el procedimiento análogo en la teoría electromagnética.

NOTA 2.- Es posible argumentar que aun cuando la ecuación (1) no es válida para masas grandes podría quizá obtenerse a partir de la teoría general una ley de fuerza más universal, válida para todo valor de la masa. Sin embargo, esto no es muy probable, pues como ya hemos mencionado anteriormente nuestras ecuaciones son no lineales y cualquier separación del campo en la parte que se va a medir y en la parte que corresponde al cuerpo explorador podría ser muy arbitrario y artificial. Mas aún, hay que tomar en cuenta el hecho de que en los resultados finales de Einstein, Infeld y Hoffmann no aparece en ninguna parte el campo gravitacional.

Para las referencias véase el original en inglés de este artículo.