

DIFRACCION EN EL TIEMPO  
O. Costa de Beauregard.

Institut Henri Poincaré. París.

(Recibido: Julio 10., 1954)

RESUMEN

*El tema del presente trabajo ha sido investigado independientemente por M. Moshinsky<sup>8\*</sup> y por el autor<sup>4,9</sup>. Recientemente M. Moshinsky<sup>10</sup> ha mostrado la equivalencia entre su punto de vista y el del autor.*

*Nuestro método en este problema está basado esencialmente sobre la geometría del espacio-tiempo de Minkowski, y en el análisis intuitivo que Fresnel ha dado para la difrac-*

---

\*Para las referencias véase la versión original de este artículo.

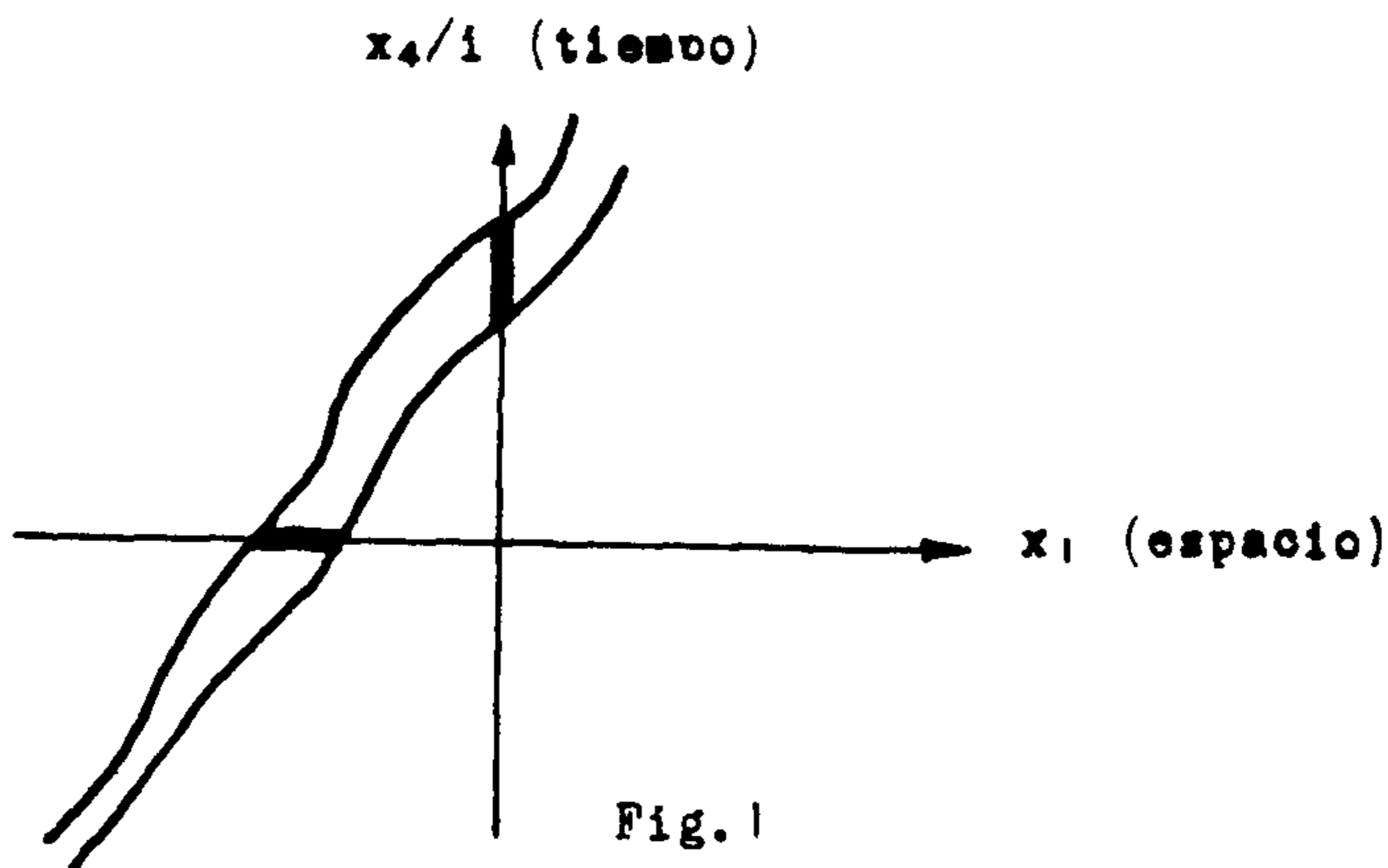
ción. En esta forma, las fórmulas fundamentales de la mecánica ondulatoria se obtienen en forma simétrica en lo que se refiere a espacio y tiempo, y la interpretación de Feynman<sup>6</sup> de los estados de energía negativa, se ve claramente ilustrada.

## I. INTRODUCCION.

Consideremos una onda incidente, asociada a una partícula relativista, y tal que una de las componentes espaciales del cuadrivector de corriente, como por ejemplo  $j_1$ , tenga un signo determinado, como:

$$j_1 > a > 0 \quad , \quad (1)$$

donde  $a$  es un número dado. Además, supondremos que la magnitud de la corriente se vuelve despreciable fuera de un tubo en el espacio-tiempo, cuya sección espacial es finita (Fig. 1).



Bajo estas suposiciones, y debido a la ecuación de continuidad:

$$\partial_\lambda j^\lambda = 0, \quad (\partial_\lambda = \partial/\partial x^\lambda; \quad \lambda, \mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

la función de onda puede normalizarse ya sea por la fórmula:

$$\frac{1}{ic} \iiint_{x_4=0} j_4 dx_1 dx_2 dx_3 = 1, \quad (x_4 = ict), \quad (3)$$

o por la fórmula:

$$\iiint_{x_1=0} j_1 dx_2 dx_3 dt = 1. \quad (4)$$

Desde el punto de vista físico, las suposiciones anteriores serán cumplidas si la partícula es emitida en forma de una onda "prácticamente" plana y monocromática, limitada en el espacio y tiempo, por un "colimador" operado durante un tiempo finito:

Supongamos que en el plano  $x_1 = 0$  del espacio tridimensional, tenemos una pantalla impenetrable y perfectamente absorbente con un agujero el cual estará inicialmente y finalmente cerrado. En cualquier instante, el contorno de este agujero estará descrito por ecuaciones de la forma:

$$x_1 = 0 \quad \mathcal{E}(x_2, x_3, t) = 0 \quad \text{o} \quad \mathcal{E}(x_2, x_3, x_4) = 0 \quad (5)$$

En el espacio-tiempo, la imagen de la evolución de este diagrama, será una pantalla tridimensional paralela a los --

ejes  $x_2, x_3$  y  $x_4$ , con un agujero  $\mathcal{D}$ , de acuerdo con las ecuaciones (5). El tipo de agujero más simple está limitado, en los planos  $x_2, x_4$  y  $x_3, x_4$  por dos semicontornos temporales, que se intersectan en los puntos inicial  $I$  y final  $F$  del espacio-tiempo. Como el vector  $F-I$  es temporal, el eje  $x_4$  puede tomarse a lo largo de él.

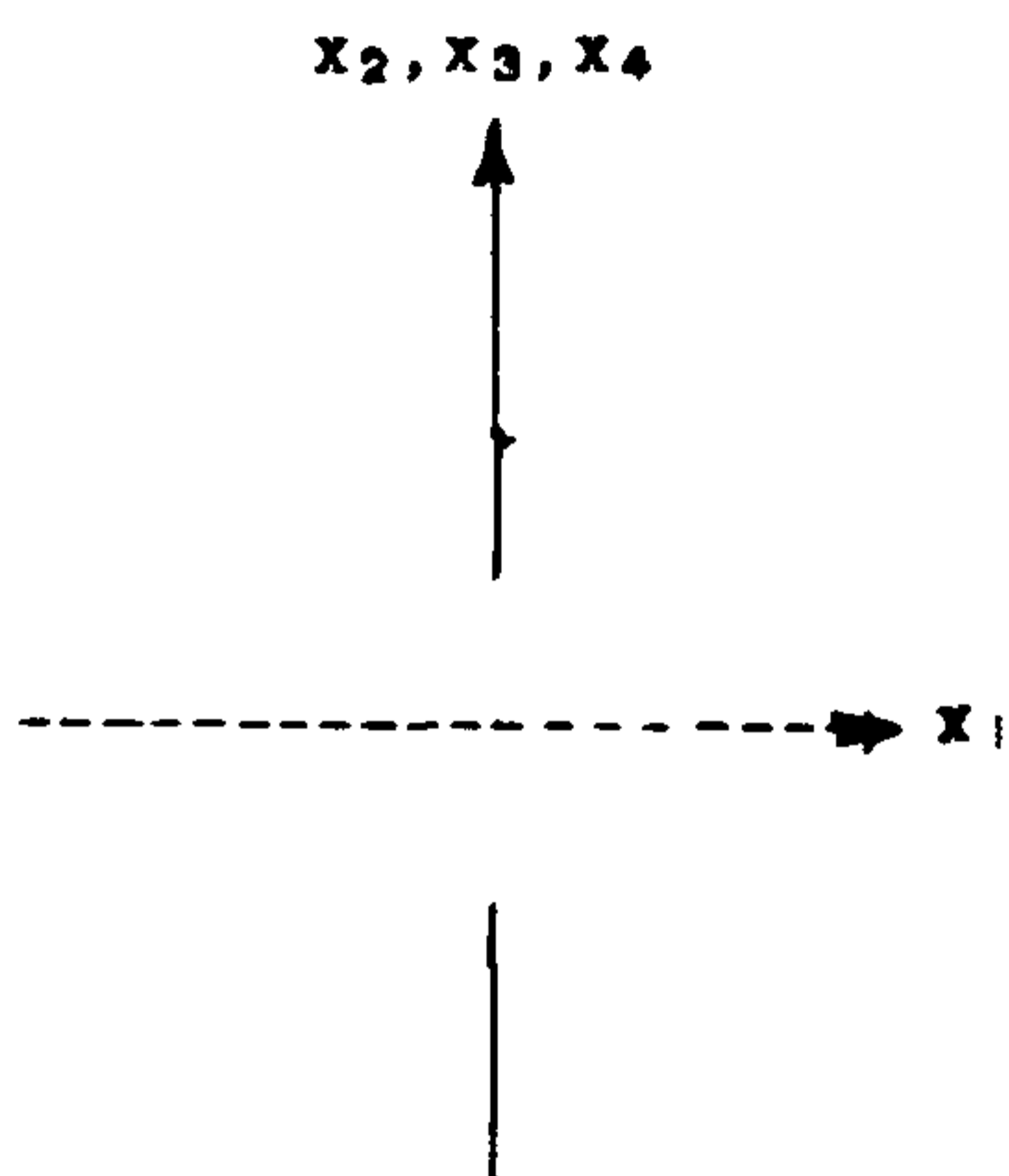


Fig.2. Esquema de la pantalla tridimensional.

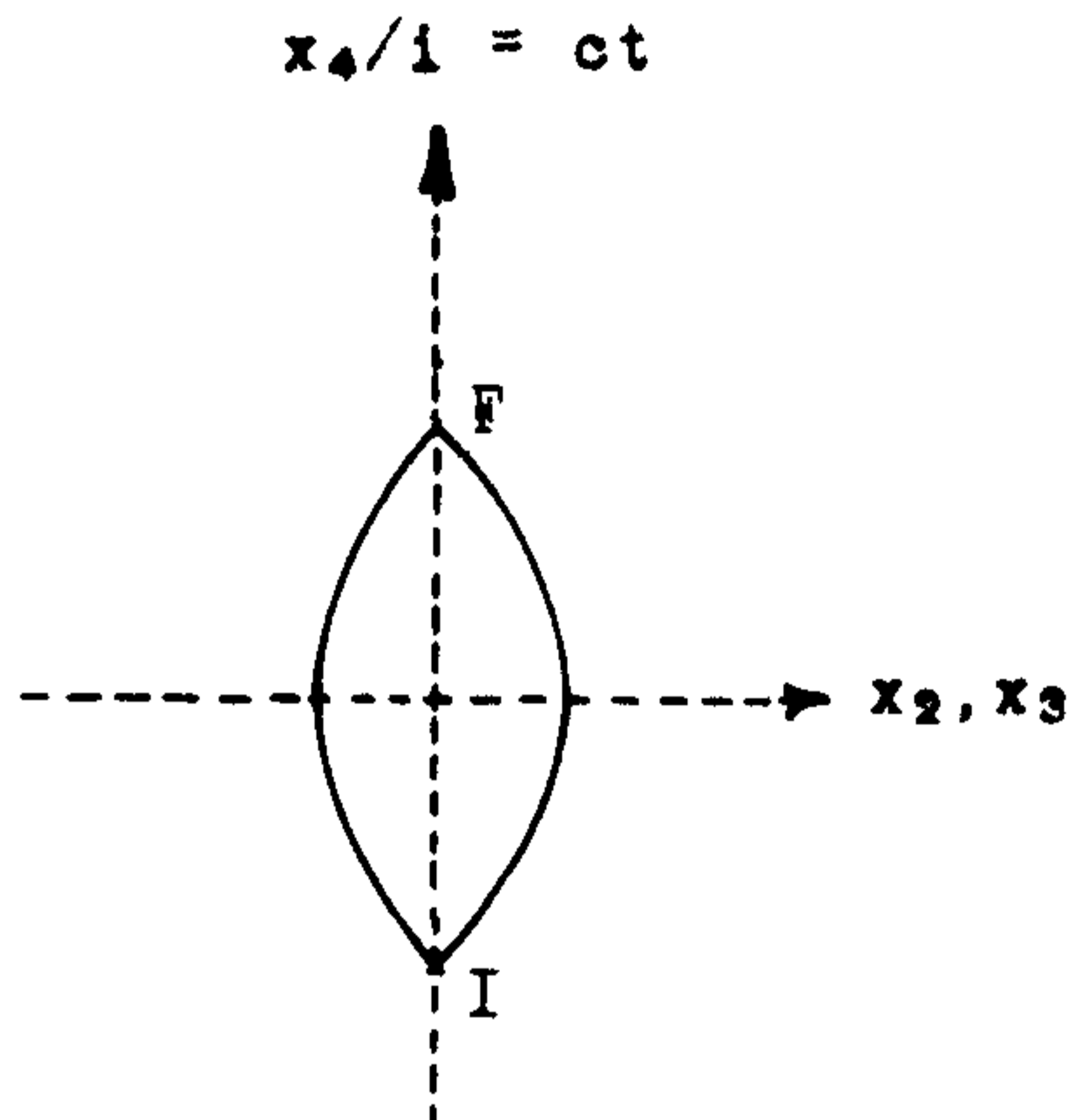


Fig.3. Esquema del agujero tri-dimensional.

En esta forma puede verse que la difracción en el tiempo de la onda incidente, debido a la operación de abrir y cerrar el diafragma, es equivalente a la difracción en el espacio debida a las dimensiones limitadas del agujero. La 2a, 3a y 4a relaciones de incertidumbre aparecerán en una forma completamente simétrica. Desde luego, las variaciones de cantidad de movimiento y energía de la partícula causadas por estas difracciones en el espacio y el tiempo, deberán ser tomadas (o dadas) por la pesada pantalla macroscópica y por el mecanismo del diafragma.

Si seleccionamos los casos en que la partícula cae efec-

tivamente sobre el agujero  $\Omega$ , la condición de normalización<sup>4</sup> se convierte en:

$$\iiint_{\Omega} j_1 dx_2 dx_3 dt = 1 \quad . \quad (6)$$

Una vez que el efecto de la pantalla observadora se toma en consideración, la ecuación de la onda difractada en el plano  $x_1 = 0$  toma la forma:

$$\psi(x_1 = 0, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 0 & \text{fuera de } \Omega, \\ \psi_0(x_1 = 0, x_2, x_3, x_4) & \text{dentro de } \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\psi_0$  representa la onda incidente no perturbada.

Se ve ya claramente que en nuestro problema, el parámetro natural de evolución no es ya  $t$  (o lo que es lo mismo  $x_4$ ) sino  $x_1$ . A lo largo de valores crecientes de este parámetro, hablaremos por ejemplo de "antes" o "después" de la pantalla, aunque para no confundir estas palabras con su concepción temporal la usaremos entre comillas.

## II. TEORIA COVARIANTE DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER.

Las fórmulas correspondientes han sido derivadas por el autor<sup>9</sup> siguiendo una sugestión original de Marcel Riesz<sup>8</sup>; una descripción completa ha sido dada recientemente<sup>11</sup>, y aquí sólo resumiremos brevemente los resultados.

**A., Fórmulas asociadas con la ecuación  
de Gordon de segundo orden.**

Denotaremos por  $\mathfrak{G}$  un hiperboloide de dos capas en el espacio momental de 4 dimensiones, dado por:

$$k^\lambda k_\lambda + k_0^2 = 0 \quad , \quad (8)$$

por  $i\delta v_\lambda$  el elemento de volúmen direccional sobre el hiperboloide (el cual es colineal a  $k_\lambda$ ), y por  $\delta v (> 0)$  la longitud  $i\delta v_\lambda$  de acuerdo con la definición\*:

$$k_0 \delta v_\lambda = k_\lambda \delta v \quad (9)$$

Con esta notación la transformación de Fourier directa de la función de onda toma la forma:

$$(2\pi)^{3/2} \psi(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathfrak{G}} e^{i\mathbf{k}^\nu \mathbf{x}_\nu} \zeta(\mathbf{k}) \delta v \quad , \quad (10)$$

y la transformación de Fourier inversa se escribe como:

$$(2\pi)^{3/2} \zeta(\mathbf{k}) = \frac{1}{2k_0} \iiint_{\mathfrak{E}} \epsilon(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}^\nu \mathbf{x}_\nu} (ik^\lambda + \delta^\lambda) \psi(\mathbf{x}) \delta u_\lambda \quad , \quad (11)$$

donde  $\mathfrak{E}$  es cualquier superficie espacialoide,  $\epsilon(\mathbf{k})$  el bien conocido conmutador de signo:

---

\*Con  $\lambda = 4$ , uno reconoce el bien conocido invariante relativístico  $i(d^3\vec{k}/k_4)$ .

$$\epsilon(k) = \frac{k_4/i}{|k_4/i|} \quad , \quad (12)$$

y  $i\delta u_\lambda$  el elemento de volumen en  $\mathcal{G}$ . Se verifica fácilmente que se satisfacen las ecuaciones de Gordon:

$$-(\partial_\lambda \partial^\lambda - k_0^2) \psi(x) = 0 \quad \text{y} \quad (k^\lambda k_\lambda + k_0^2) \zeta(k) = 0 \quad , \quad (13)$$

y que  $\zeta(k)$  definida por (11) es independiente de  $\mathcal{G}^*$ . La presencia de las derivadas normales  $\partial^\lambda \psi \delta u_\lambda$  en (11) era de esperarse.

Introduciendo (11) en (10) obtenemos la solución formal del problema de Cauchy:

$$\psi(x') = \iiint_{\mathcal{G}} S^\lambda(x'-x) \psi(x) \delta u_\lambda(x) \quad , \quad (14)$$

donde:

$$S^\lambda(x) = D(x) (ik^\lambda + \partial^\lambda) \quad , \quad (15)$$

y  $D(x)$  es la función de propagación, primero definida por Stuckelberg<sup>3</sup>,

$$D(x) = \frac{1}{2k_0(2\pi)^3} \iiint_{\mathcal{G}} \epsilon(k) e^{ik^\nu x_\nu} \delta v \quad ; \quad (16)$$

Esta  $D$ , igual  $D_{ret} - D_{av}$ , es cero fuera del cono de -

---

\*Escriba la diferencia entre dos expresiones (11) con dos  $\mathcal{G}$ 's diferentes, y convierta en una integral cuádruple.

luz. Las fórmulas anteriores (14) a (16) son substancialmente las mismas que las dadas por Schwinger<sup>5</sup> para el fotón.

Definamos ahora por  $[\partial^\lambda] = \overset{\rightarrow}{\partial}^\lambda - \overset{\leftarrow}{\partial}^\lambda$ , al bien conocido operador que aparece en la corriente de Schrödinger y de Gordon; y sean  $\bar{\psi}, \bar{\zeta}$  los conjugados de  $\psi$  y  $\zeta$ . La igualdad covariante de Parseval toma entonces la forma:

$$\frac{i}{2k_0} \iiint_{\mathcal{E}} \bar{\psi}_1 [\partial^\lambda] \psi_2 \delta u_\lambda = \iiint_{\mathcal{E}} \epsilon(k) \bar{\zeta}_1 \zeta_2 dv \quad . \quad (17)$$

Debido a la ecuación de continuidad, al miembro izquierdo de (17) es independiente de la superficie espacialoide.

En caso que  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$ , el miembro derecho de (17) es lo que se conoce como función de distribución en el cuadríespacio momental, y si ponemos:

$$\zeta_1 = \zeta \quad \zeta_2 = \zeta e^{ik^\nu y_\nu} \quad , \quad (18)$$

obtenemos la llamada función característica en el cuadríespacio momental:

$$\frac{i}{2k_0} \iiint_{\mathcal{E}} \bar{\psi}(x) [\partial^\lambda] \psi(x+y) \delta u_\lambda = \iiint_{\mathcal{E}} \epsilon(k) \bar{\zeta} \zeta e^{ik^\nu y_\nu} \delta v \quad . \quad (19)$$

### **B. Fórmulas asociadas con las ecuaciones de 1er. orden para partículas con spin.**

La ecuación de Gordon (13) es siempre una consecuencia de la ecuación de partícula con spin:



$$(a^\lambda \partial_\lambda + k_0)\psi(x) = 0 \quad \text{o} \quad (a^\lambda k_\lambda - ik_0) \zeta(k) = 0 \quad (20)$$

Usando (20) y (9), uno puede transformar (10) en:

$$(2\pi)^{3/2} \psi(x) = -i \iiint_{\mathcal{E}} a^\lambda \delta_{\nu\lambda} e^{ik^\nu x_\nu} \zeta(k) \quad (21)$$

De mucho mayor interés es la transformación (11), cuando en ella se reemplaza  $\partial^\lambda \psi$  por la expresión correspondiente en (20), y para la ecuación de Dirac se obtiene<sup>11</sup>,

$$(2\pi)^{3/2} \zeta_{(\frac{1}{2})}(k) = \frac{i}{2k_0} \iiint_{\mathcal{E}} \epsilon(k) e^{-ik^\nu x_\nu} (i\gamma^\mu k_\mu - k_0) \gamma^\lambda \psi(x) \delta u_\lambda \quad (22)$$

mientras que para la ecuación de Duffin-Kemmer se obtiene:

$$(2\pi)^{3/2} \zeta_{(1)}(k) = \frac{i}{2k_0} \iiint_{\mathcal{E}} \epsilon(k) e^{-ik^\nu x_\nu} [ik^\lambda + ik_\mu (\beta^\mu \beta^\lambda - \beta^\lambda \beta^\mu) - k_0 \beta^\lambda] \psi(x) \delta u_\lambda \quad (23)$$

En lugar de la derivada normal uno tiene ahora una combinación lineal de las componentes  $\psi$ . Las expresiones que corresponden a  $S^\lambda(x)$  en (14), toman ahora la forma:

$$S_{(\frac{1}{2})}^\lambda(x) = (\gamma^\mu \partial_\mu - k_0) \partial^\lambda D(x) \quad (24)$$

$$S_{(1)}^\lambda(x) = [\partial^\lambda + \partial_\mu (\beta^\mu \beta^\lambda - \beta^\lambda \beta^\mu) - k_0 \beta^\lambda] D(x) \quad (25)$$

La expresión (24) fue obtenida por Schwinger<sup>6</sup> para el caso del electrón.

Ambos miembros de la igualdad de Parseval (17) pueden transformarse<sup>11</sup> de acuerdo con la decomposición de Gordon

para el cuadrivector de corriente\*, y obtenemos entonces -  
 $(\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta)$ :

$$\iiint \bar{\psi}_1 a^\lambda \psi_2 \delta u_\lambda = \iiint \epsilon(k) \bar{\zeta}_1 a^\lambda \zeta_2 \delta v_\lambda . \quad (26)$$

La forma correspondiente de la función característica (19) se puede escribir de inmediato; esa fórmula ha sido obtenida también por el autor<sup>7</sup> por otros medios.

### III. LA TEORIA DE FRESNEL EN EL ESPACIO-TIEMPO.

De acuerdo con las hipótesis y definiciones de la sección I, todas las fórmulas de la sección II seguirán siendo válidas cuando la superficie espacialoide  $\mathcal{E}$ , es reemplazada por la superficie temporaloide  $\mathcal{D}$  de la sección I. La amplitud en el espacio momental de la onda difractada estará dada por las fórmulas (7), y (11), (22) o (23), y la amplitud en el espacio-tiempo por las fórmulas (7), (14) y (15), (24) o (25)\*\*

---

\*La corriente total  $\bar{\psi} a^\lambda \psi$  y la corriente de Gordon  $-\bar{\psi} [\partial^\lambda] \psi / 2k_0$ , son integralmente equivalentes en el sentido de las ecuaciones (17) y (26), ya que su diferencia tiene la forma  $\partial_\mu m^{\mu\lambda}$ , donde  $m^{\mu\lambda}$  es un tensor antisimétrico. Al integrarse, este último término puede transformarse en una integral de contorno que tiende a 0.

\*\*Las fórmulas (17) o (26) escritas con  $\mathcal{D}$  en lugar de  $\mathcal{E}$  (o equivalentemente la fórmula (4)), muestran que el criterio de Fresnel para la intensidad de la onda  $|\psi|^2$ , es una simplificación de las fórmulas correctas. Esto continúa siendo válido si uno utiliza el flujo de momento o de energía por unidad de área y tiempo, en lugar del flujo de número de partículas.

Como se dijo con anterioridad, el parámetro natural natural para la evolución de nuestro sistema es la  $x_1$  y usaremos comillas cada vez que nos refiramos a él. Si sobre la superficie  $\mathcal{D}$  del agujero en el espacio tiempo está dada la distribución inicial (7), se obtienen las siguientes cuatro clases de ondas planas difractadas de la Fig. 4:

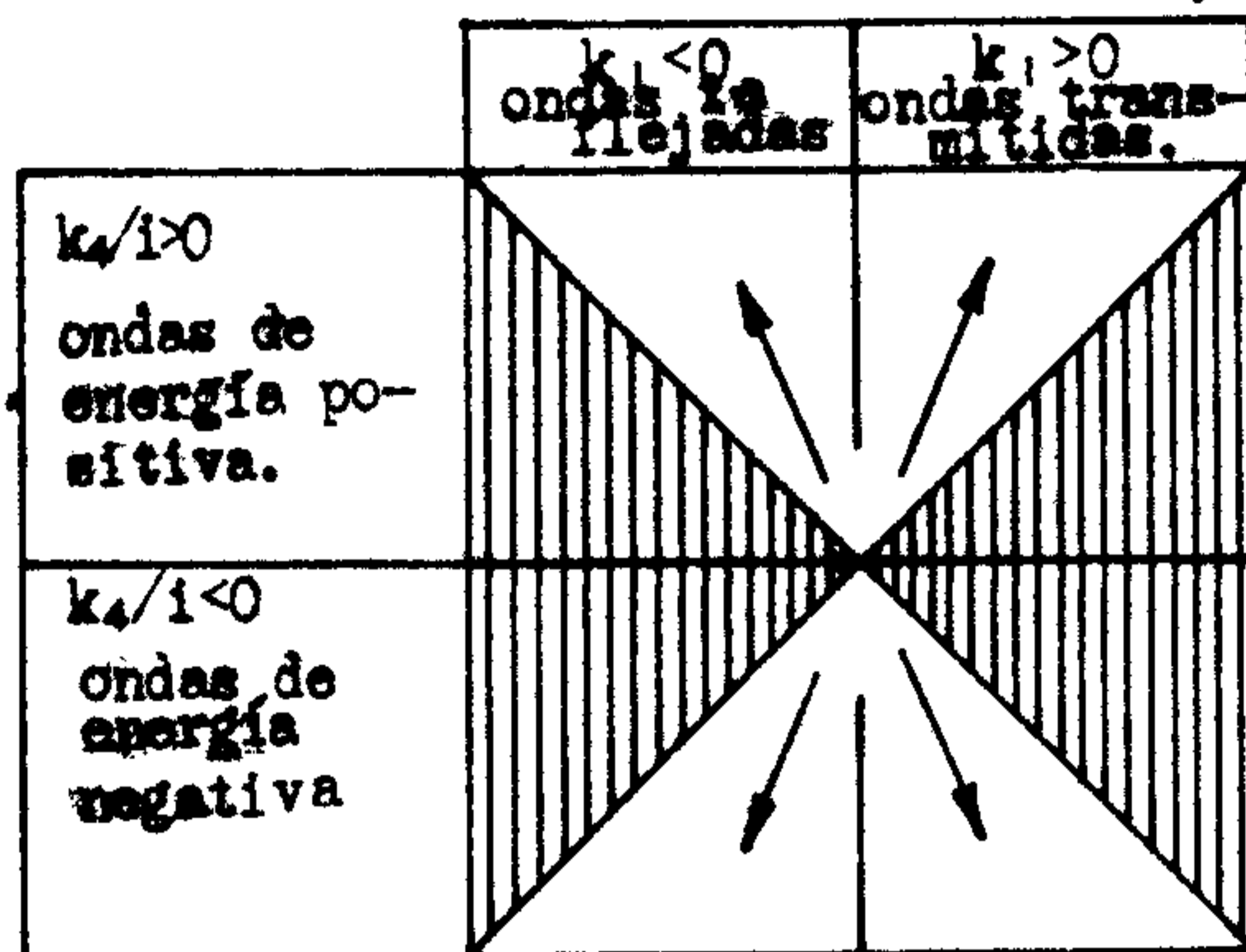


Fig.4 Los cuatro tipos de ondas difractadas.

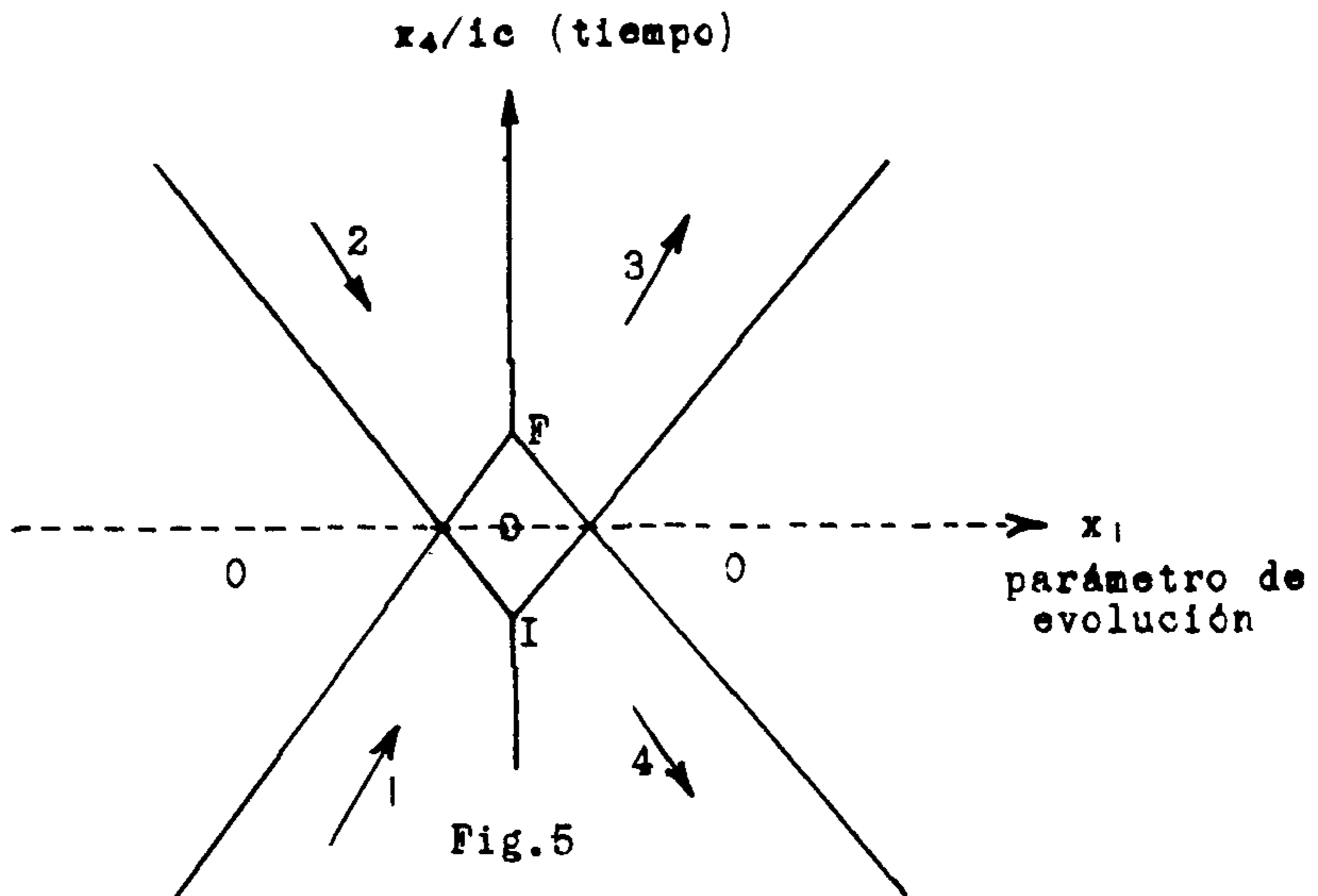
La simetría con respecto al plano  $k_1 = 0$ , sugiere que la aplicación directa de las fórmulas ilustradas en la Fig.4 corresponde al caso de la pantalla perfectamente reflectora, de hecho eso fue demostrado por Moshinsky<sup>10</sup>, en la región  $x_1 > 0$ ,  $x_4/i > 0$  para un caso particular. El problema general amerita sin embargo, una reflexión más detallada.

En este trabajo, estaremos interesados en el caso de la pantalla perfectamente absorbente. En el caso estático - de Fresnel, para la pantalla con un agujero, las ondas reflejadas  $k_1 < 0$  existen desde un punto de vista formal, pero en la realidad no se observan. Uno debe de eliminarlas - del análisis, y haremos lo mismo para el problema en el espacio-tiempo con el que tratamos. De aquí que en las fórmulas

(11), (22) o (23), supondremos que sólo las ondas planas  $k_1 > 0$  tienen una amplitud no-despreciable.

Ahora, las fórmulas indicadas en el párrafo anterior nos darán, en todo el espacio-tiempo, una expresión para la  $\psi$  difractada. Esta  $\psi$  en la región  $x_1 > 0$ , representará a la onda propiamente "transmitida". En la región  $x_1 < 0$  representará una onda ficticia "incidente", que difiere de toda onda "incidente" real por la supresión de todas las componentes de Fourier que la pantalla aniquila. Dada la distribución "inicial" (7), con las restricciones indicadas anteriormente para las ondas planas  $k_1 > 0$ , la función de onda  $\psi$  corresponderá en la región  $x_1 > 0$  a un problema de "predicción", y en la región  $x_1 < 0$  a un problema de "retrodicción".

Consideremos ahora los conos de luz futuro y pasado, asociados respectivamente con los puntos del espacio-tiempo I y F de la fig.3, tal como se ilustra en la Fig.5



La región 0, fuera de los dos conos de luz, está prohibida para cualquier partícula que pasa a través del agujero  $\mathcal{D}$ . En cualquier punto de las regiones 1 y 3 de la fig.5, situado lo suficientemente lejos (en espacio y tiempo) del agujero  $\mathcal{D}$ , la influencia de una onda plana de energía positiva determinada, es preponderante, como puede verse por el argumento de Fresnel de la fase estacionaria. En forma similar, en puntos distantes de las regiones 2 y 4, la influencia de una onda plana de energía negativa es preponderante.

Tenemos ahora el problema de la interpretación de los estados de energía negativa. Es claro que la asociación de ondas planas de energías negativas con las ideas "macroscópicas" referentes a la identificabilidad de las partículas, implicara la paradoja de causalidad avanzada: la operación del mecanismo del obturador será telegrafada hacia el pasado, y traerá de allí a partículas de energía negativa.

La solución de esa paradoja reside esencialmente en el uso de las estadísticas de Fermi-Dirac o de Bose-Einstein.

Sea:

$$P_{12} = P_{21} \quad , \quad (27)$$

las probabilidades asociadas por las fórmulas de la sección II con la transición entre un estado "inicial" 1 y un estado "final" 2, que es siempre igual a la probabilidad de -- transición recíproca "2  $\rightarrow$  1". En el caso de la transición para una sola partícula, esta probabilidad debe super-cuantizarse de acuerdo con:

$$n_1 P_{12} n_2 = n_2 P_{21} n_1 \quad , \quad (28)$$

donde  $n_1$  es el número de ocupación "inicial" del estado - "inicial" 1 y  $n_2$  el número de ocupación "final" del estado - "final" 2, en la hipótesis que la transición puede tener lugar. En el caso de las estadísticas de Fermi-Dirac,  $n_1, n_2 = 0, 1$ , y por ejemplo  $n_2 = 0$  si el estado "final" 2 está "inicialmente" ocupado. En el caso de estadísticas de Bose-Einstein  $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$

En otras palabras, es esencialmente la nueva propiedad de estadísticas cuánticas, esto es, el papel explícitamente simétrico de los números de ocupación de los estados inicial y final, que destruye la paradoja de causalidad avanzada. La asociación del concepto de ondas de energía negativa con las estadísticas de Maxwell-Boltzmann sería paradójica. Para una generalización relativista de la teoría cuántica, las estadísticas cuánticas son tan necesarias como por ejemplo la representación del spin; posiblemente este sea un argumento extra en favor de una conexión esencial entre spin y las estadísticas cuánticas.

La interpretación dada arriba es esencialmente, la interpretación de Feynman<sup>6</sup> para los estados de energía negativa. Uno tiene cuatro sub-casos (ilustrados en la Fig. 8), 1-difracción ordinaria de un electrón, 2-aniquilación de un par, 3-creación de un par, 4-difracción ordinaria de un positrón. En los trabajos de Feynman, los números de ocupación no están explícitamente introducidos, pero en el caso - de fermiones, hay la palabra si:  $P_{12}$  es la probabilidad de transición si el estado inicial está inicialmente ocupado y

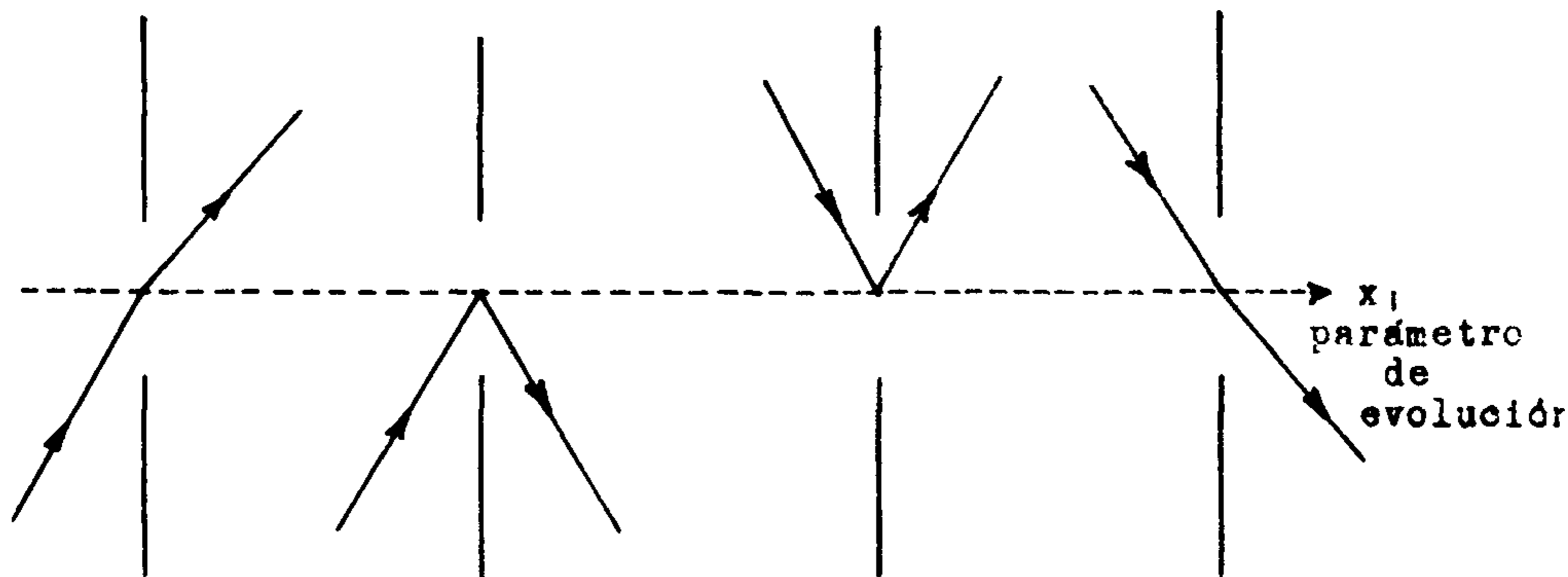


Fig.6 Cuatro tipos de difracción de electrones.

si el estado final esta inicialmente vacío (inicial y final, en el sentido ordinario o también en el "sentido  $x_1$ "); las aserciones simétricas son válidas en el problema de la retrodicción.

#### IV. OBSERVACIONES SOBRE UNA REJILLA DE DIFRACCION EN EL TIEMPO.

Cualquier sistema físico periódico, por ejemplo un oscilador o un rotador, puede considerarse como una rejilla --temporaloide en el espacio-tiempo de Minkowski.

En una rejilla ordinaria, denotemos por  $k_0$  el número de líneas por unidad de longitud, y por  $k_1$  el número de onda incidente en la misma dirección (los frentes de onda, deben ser desde luego, paralelos a las líneas de la rejilla). Los números de onda difractados en la misma dirección están dados por:

$$k_d = k_1 \pm nk_0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

Este resultado es válido también para una rejilla temporaloide, por ejemplo, en el caso de la fórmula de Fermi para la difracción de una onda por un rotor. Un efecto típico sería el del efecto Raman en el espectro de rotación de las moléculas, cuando las moléculas son muy pesadas.

## V. CONCLUSION.

Como fue claramente postulado por de Broglie en sus trabajos iniciales sobre mecánica cuántica de 1925<sup>1</sup>, la simetría de Minkowski entre el espacio y el tiempo es una característica esencial de los fenómenos cuánticos; esto no es una sorpresa, si uno se da cuenta que la teoría ondulatoria es por un lado la base de la Teoría de la Relatividad, y por otro lado, la base de la Teoría Cuántica y del Principio de Complementaridad. Pero, para formular explícitamente esta simetría esencial entre el espacio y el tiempo se necesitaba más información de la que se podía disponer en 1925. De todos modos, - una introducción elemental a la Teoría Cuántica Covariante (que ha sido brillantemente desarrollada por Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson, etc.) es posible.