

DIFRACCION EN EL TIEMPO ASOCIADA A  
UNA DISTRIBUCION DE FUENTES\*

Marcos Moshinsky

Institutos de Física y de Geofísica, Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Octubre 1, 1954)

RESUMEN

*The present paper shows that problems of diffraction in time associated with the opening and closing of a shutter, can be described in terms of a source distribution in the region occupied by the shutter. In this way, we show the equivalence between our own approach to the problems of dif-*

\*Trabajo presentado en el 1er. Congreso Nacional de la Sociedad Mexicana de Física, Guadalajara, Septiembre 1954.

*fraction in time, and the one suggested recently by O. Costa de Beuregard following the ideas of Fresnel with respect to ordinary diffraction. In particular, we look into the problems of diffraction in time for relativistic particles, and give an interpretation of the positive and negative energy terms that appear in the analysis.*

## I. INTRODUCCION.

En publicaciones anteriores<sup>1,2</sup>, el autor ha analizado diversos problemas dinámicos en la mecánica cuántica, en los cuales aparecen los efectos transitorios denominados difracción en el tiempo. En particular, es en el problema de abrir y cerrar un obturador, sobre el que incide un haz de partículas, donde se observan más claramente estos fenómenos de difracción en el tiempo. El análisis de este problema puede hacerse desde dos puntos de vista: uno de ellos, que fue el seguido por el autor, consiste en suponer que el obturador delimita en un instante dado dos regiones del espacio, una en la que está el haz de partículas y otra en la que todavía no penetra, y el análisis consiste en determinar la función de onda a partir de estas condiciones iniciales. El otro punto de vista, seguido por O. Costa de Beuregard<sup>3</sup>, consiste en suponer que al abrir el obturador aparece una distribución de fuentes sobre la región donde se encontraba éste, y el análisis consiste en determinar la función de onda dependiente del tiempo asociada a esta distribución de fuentes.

Los dos puntos de vista tienen su análogo en los fenó-

menos de difracción ordinaria. En efecto, si suponemos que una onda electromagnética plana incide sobre un semiplano perfectamente conductor, como se ilustra en la Fig. 1, la distribución de intensidades a la derecha del plano puede obtenerse por dos análisis distintos. Uno de ellos, propuesto por Sommerfeld<sup>4</sup>, consiste en resolver exactamente el problema de condiciones a la frontera, buscando soluciones de la ecuación de onda en una superficie de Riemann apropiada. El otro análisis, propuesto por Fresnel para dar la primera solución coherente al problema de la difracción, consiste en completar el semiplano difractor por una distribución de fuentes cuyas fases relativas están dadas por la onda incidente, y determinar la función de onda asociada a esta distribución de fuentes. Es bien sabido que en el caso de la difracción ordinaria, los dos puntos de vista llevan esencialmente a la misma distribución de intensidades.

El objeto del presente trabajo es demostrar que también en el caso del fenómeno de difracción en el tiempo, los dos puntos de vista expuestos en el primer párrafo de este trabajo, son esencialmente equivalentes. Esto permitirá expresar las funciones de onda transitorias en términos de las funciones elementales<sup>5</sup> asociadas a las diferentes ecuaciones de onda. En el caso relativista, las funciones elementales pueden expresarse como sumas de las contribuciones de las energías positivas y de las energías negativas, y esto hará factible una interpretación de los efectos transitorios en términos de producción de partículas y aniquilación de antipartículas<sup>6</sup>.

En el presente trabajo, supondremos que el obturador - esta representado por un plano perfectamente reflector, cosa que no altera esencialmente la función de onda a la derecha del mismo, pero que en cambio permite describir esa función de onda en forma exacta por una distribución de fuentes. - Analizaremos el problema cuando las ecuaciones de onda son - las de Schrödinger, Klein-Gordon y Dirac, e indicaremos en - estos dos últimos casos las contribuciones de energías posi- tivas y negativas, y como estas últimas desaparecen en el cur- so del tiempo.

## II.- EL CASO DE LA ECUACION DE SCHRÖDINGER.

Aunque el interés principal del presente trabajo se - relaciona con las ecuaciones relativistas, empezaremos por discutir el caso de la ecuación de Schrödinger, donde apare- ce en forma particularmente clara la relación entre los dos puntos de vista mencionados en la sección anterior.

El problema que nos interesa concierne a encontrar la función de onda  $\psi(x,t)$  que satisface la ecuación:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad , \quad (1)$$

(tomamos unidades en que  $\hbar = m = c = 1$ ), y la condición ini- cial:

$$\psi(x,0) = \text{sen } kx \quad \text{si } x < 0, \quad \psi(x,0) = 0 \quad \text{si } x > 0, \quad (2)$$

(que corresponde a un obturador que es un reflector perfec-

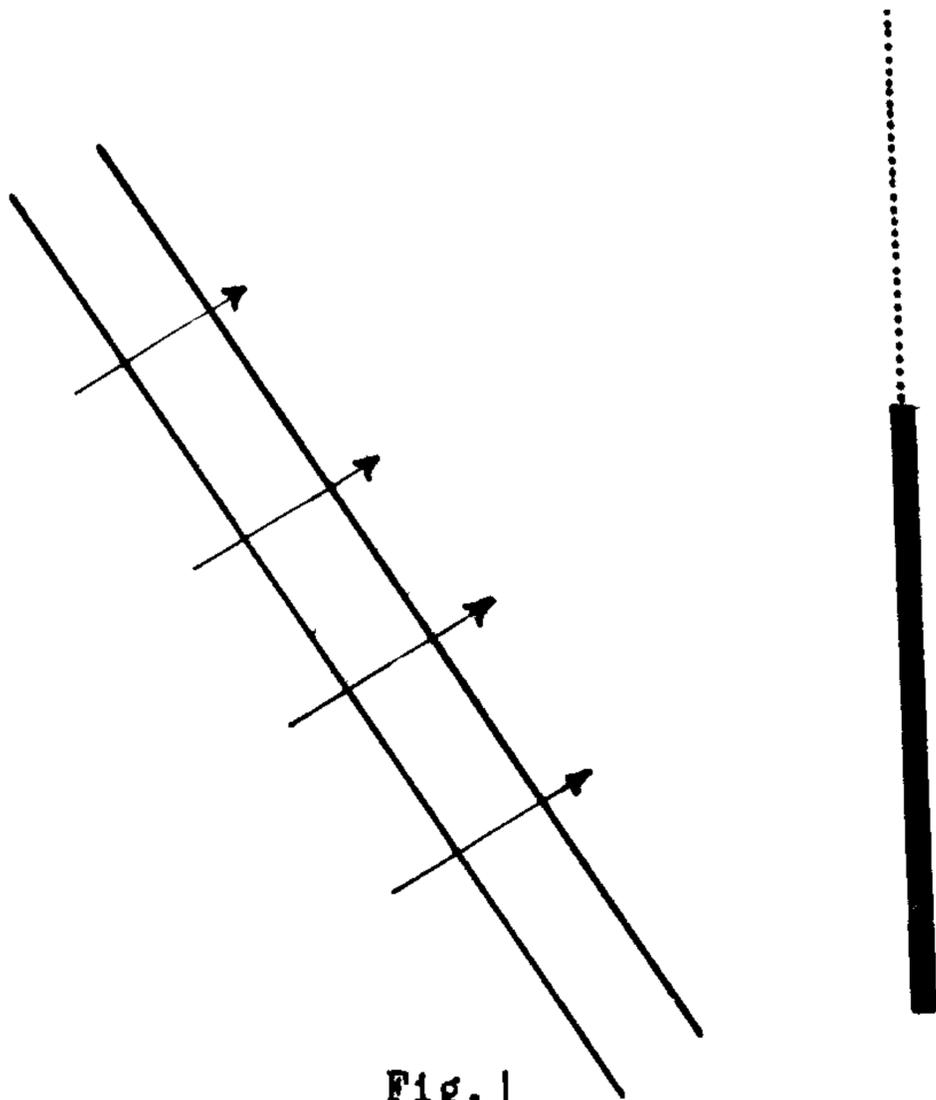
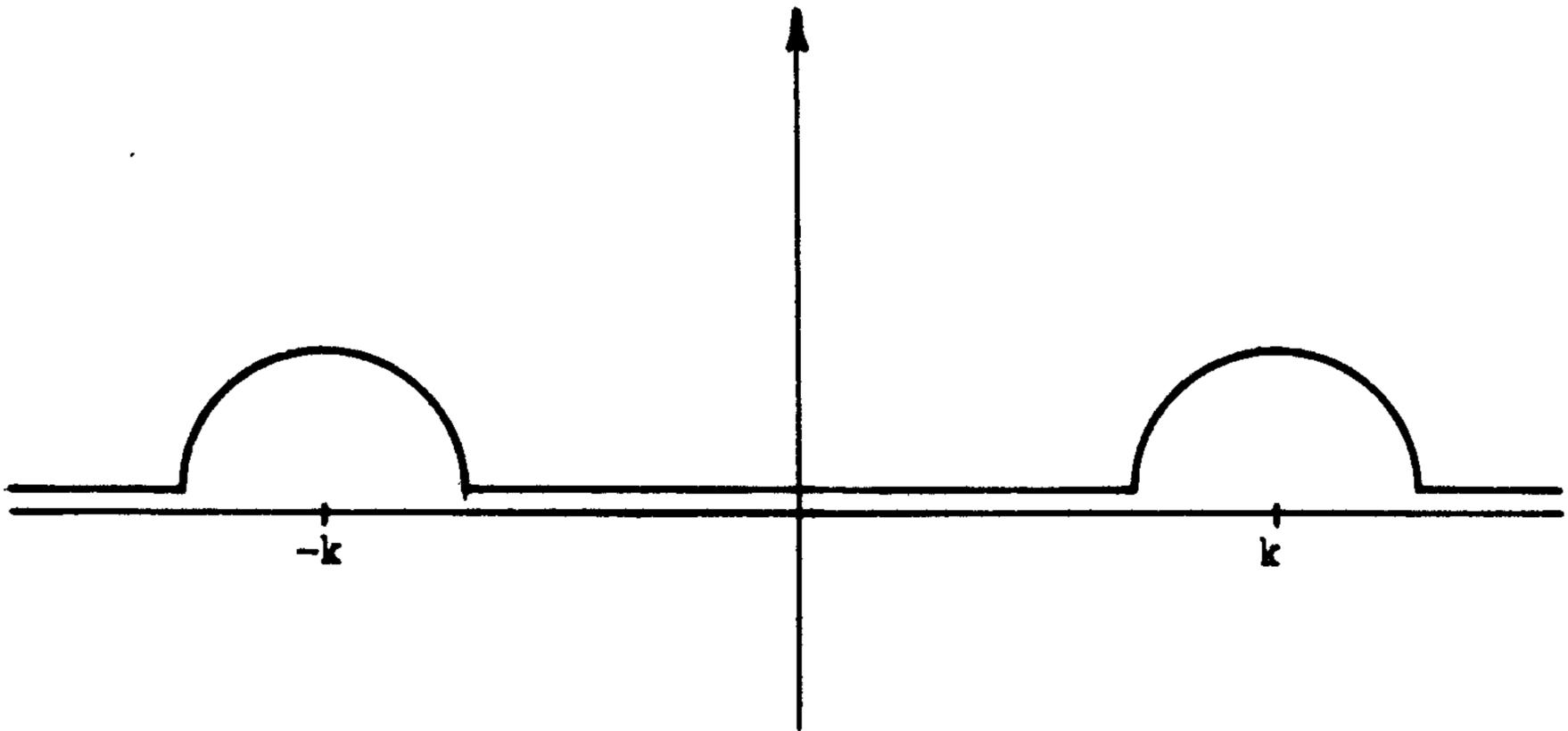


Fig. 1



Plano  $\kappa$

Fig. 2

to), y de expresar esa función  $\psi(x, t)$  en términos de una fuente planar en  $x = 0$ .

Del teorema de la integral de Fourier sabemos que:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) e^{i\kappa x} e^{-i\frac{1}{2}\kappa^2 t} d\kappa, \quad (3)$$

$$\text{donde}^7: \quad f(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \text{sen } kx e^{-i\kappa x} dx =$$

$$= -i(2\pi)^{\frac{1}{2}} k \delta_+(\kappa^2 - k^2) = \frac{1}{i} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} k \left[ \delta(\kappa^2 - k^2) + \frac{i}{\pi(\kappa^2 - k^2)} \right]. \quad (4)$$

Al introducir (4) en (3), sabemos de consideraciones generales<sup>7</sup>, que la integral contendrá sólo el término  $(\kappa^2 - k^2)^{-1}$  si el contorno de  $-\infty$  a  $\infty$  se cambia en el contorno C de la figura 2, y en ese caso tenemos que:

$$\psi(x, t) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\frac{1}{2}\kappa^2 t}}{\kappa^2 - k^2} e^{i\kappa x} d\kappa. \quad (5)$$

Tenemos por otro lado que:

$$\frac{e^{-i\frac{1}{2}\kappa^2 t}}{\kappa^2 - k^2} = \frac{1}{2i} e^{-i\frac{1}{2}k^2 t} \int_0^t e^{-i\frac{1}{2}(\kappa^2 - k^2)\tau'} d\tau' + \frac{e^{-i\frac{1}{2}k^2 t}}{\kappa^2 - k^2}. \quad (6)$$

Introduciendo (6) en (5), vemos que el segundo término de (6) no contribuye nada a la integral, debido a la forma del contorno en (5). Para el primer término de (6) pode

mos intercambiar el orden de las integrales en (5) y obtenemos:

$$\psi(x, t) = k \int_0^t e^{-i\frac{1}{2}k^2(t-\tau')} \left[ \frac{1}{4\pi i} \int_0 e^{-i\frac{1}{2}k^2\tau'} e^{iKx} d\kappa \right] d\tau'. \quad (7)$$

El integrando dentro del paréntesis cuadrado es regular, y podemos pasar de nuevo del contorno C al contorno original que va de  $-\infty$  a  $+\infty$  sobre el eje real. La integral dentro del paréntesis cuadrado se convierte en:

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx} e^{-i\frac{1}{2}k^2\tau'} d\kappa = \frac{1}{2} G(x, \tau') \quad , \quad (8a)$$

donde  $G(x, \tau')$  es la función de Green correspondiente a una fuente planar en  $x = 0$ , dada por<sup>8</sup>:

$$G(x, \tau') = \frac{e^{-i(8/\pi^4)}}{\sqrt{2\pi\tau'}} e^{i\frac{x^2}{2\tau'}} \quad (8b)$$

Introduciendo (8) en (9) y haciendo el cambio de variable  $\tau = t - \tau'$  obtenemos finalmente:

$$\psi(x, t) = \left(\frac{k}{2}\right) \int_0^t e^{-i\frac{1}{2}k^2\tau} G(x, t-\tau) d\tau \quad . \quad (9)$$

De (9) vemos que la función de onda a la derecha de un obturador que es un reflector perfecto, es idéntica a la función de onda debida a una fuente planar en  $x = 0$  que entra

en operación a partir del instante que se abre el obturador, y que tiene una intensidad  $(\frac{k}{2}) e^{-1\frac{1}{2}k^2\tau}$ . Esta equivalencia entre la solución exacta del problema propuesto en esta sección, y lo que podríamos designar como el punto de vista de Fresnel para problemas de difracción en el tiempo, existe solo cuando el obturador es un reflector perfecto. El autor ha demostrado<sup>1</sup> sin embargo, que para otros tipos de obturadores, e.g. cuando el obturador absorbe todas las partículas incidentes, las funciones de onda a la derecha del obturador no difieren esencialmente entre sí. De aquí que podamos afirmar que en todos los casos el punto de vista de Fresnel para problemas de difracción en el tiempo, nos da soluciones que se aproximan mucho a las soluciones exactas del problema.

Es fácil ver, de la forma (5), para la función  $\psi(x,t)$ , así como de (9), que  $\psi(x,t)$  es solución de la ecuación inhomogénea:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{k}{2} e^{-1\frac{1}{2}k^2 t} \delta(x) \quad (10)$$

con la condición inicial  $\psi(x,0) = 0$ . De (10) se concluye que el fenómeno de difracción en el tiempo puede también asociarse a una distribución de fuentes.

### III.- EL CASO DE LA ECUACION DE KLEIN-GORDON.

Este caso ya fue discutido por el autor en una publicación anterior<sup>9</sup>, y nos limitaremos a dar los resultados por

el interés que presentan en relación con el análisis para la ecuación de Dirac, que se dará en la siguiente sección.

El problema es el de expresar en términos de una fuente planar en  $x = 0$ , la función de onda  $\psi(x, t)$ , que satisface:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1 \right) \psi(x, t) = 0 \quad (11)$$

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \text{sen } kx & \text{si } x < 0. \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t=0} = \begin{cases} -iE \text{ sen } kx & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (12)$$

donde  $E = (k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ . Como se ve de (12), el obturador de nuevo se supone como reflector perfecto. En la publicación anterior<sup>9</sup>, se mostró que para  $x > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\psi(x, t)$  puede expresarse como:

$$\psi(x, t) = \int_0^t [-k e^{-iE\tau}] D(x, t-\tau) d\tau, \quad (13)$$

donde:

$$D(x, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x} \text{sen } \epsilon t \frac{d\kappa}{\epsilon}, \quad \epsilon = (\kappa^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

es la función elemental asociado a una ecuación de Klein-Gordon<sup>10</sup> de una sola dimensión.

La función  $D(x, t)$  puede expresarse en términos de componentes de energía positiva y negativa, si descomponemos  $\text{sen } \epsilon t$  en términos de  $\exp(\mp i\epsilon t)$ . Nos va a interesar seguir el comportamiento en el tiempo de las contribuciones de

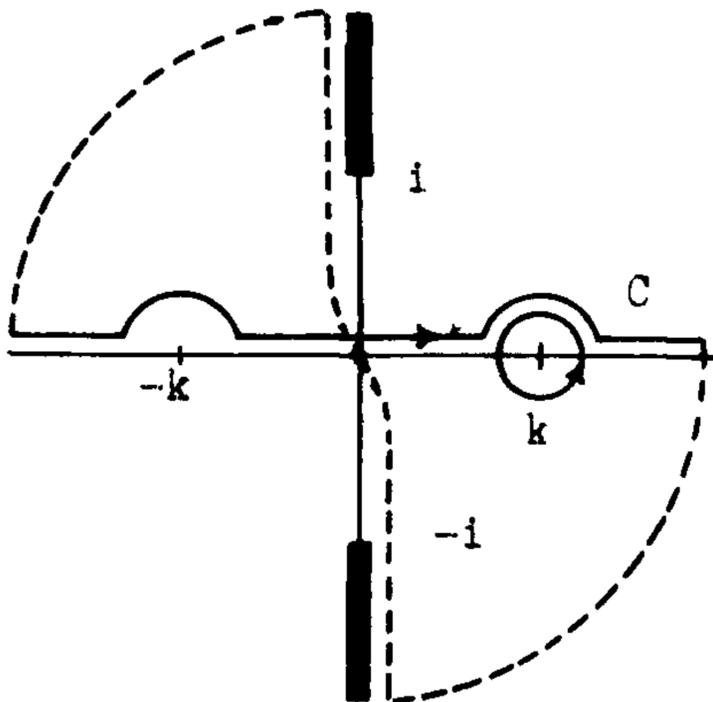
energía positiva y negativa para la función de onda  $\psi(x, t)$ . Para ello introducimos (14) en (13) e intercambiando el orden de integración obtenemos<sup>9</sup> que:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \psi_+(x, t) + \psi_-(x, t) = \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_0 \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{e^{-i\epsilon t}}{\epsilon - E} + \frac{e^{i\epsilon t}}{\epsilon + E} \right) \right] e^{i\kappa x} d\kappa, \end{aligned} \quad (15)$$

donde el contorno  $C$  es el de la Fig. 1. En (15) vemos que las contribuciones de energía positiva están asociadas con  $e^{-i\epsilon t}$ , y las de energía negativa con  $e^{i\epsilon t}$ . Si consideramos las contribuciones conjuntas de energía positiva y negativa, vemos que la parte del integrando contenido en el paréntesis cuadrado es función meromorfa de  $\kappa$ , ya que no cambia cuando  $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ . En tal caso no tenemos que hacer ningún corte en el plano  $\kappa$ . Pero si queremos analizar separadamente  $\psi_+(x, t)$  y  $\psi_-(x, t)$  entonces las respectivas integrales ya no son funciones meromorfas de  $\kappa$ , y necesitamos hacer cortes en el plano  $\kappa$ , que tomamos de  $\kappa = i$  a  $\kappa = i\infty$  y de  $\kappa = -i$  a  $\kappa = -i\infty$ , a lo largo del eje imaginario. En la primera capa de la superficie de Riemann, en la cual  $\epsilon = (\kappa^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ , es donde se extiende el contorno  $C$  de integración. Claramente el integrando que corresponde a energías positivas es el que tiene polo en el plano del contorno  $C$ , como se indica en la Fig. 3. Para la integral de energías negativas, podemos tomar el contorno  $C'$  de la Fig. 4.

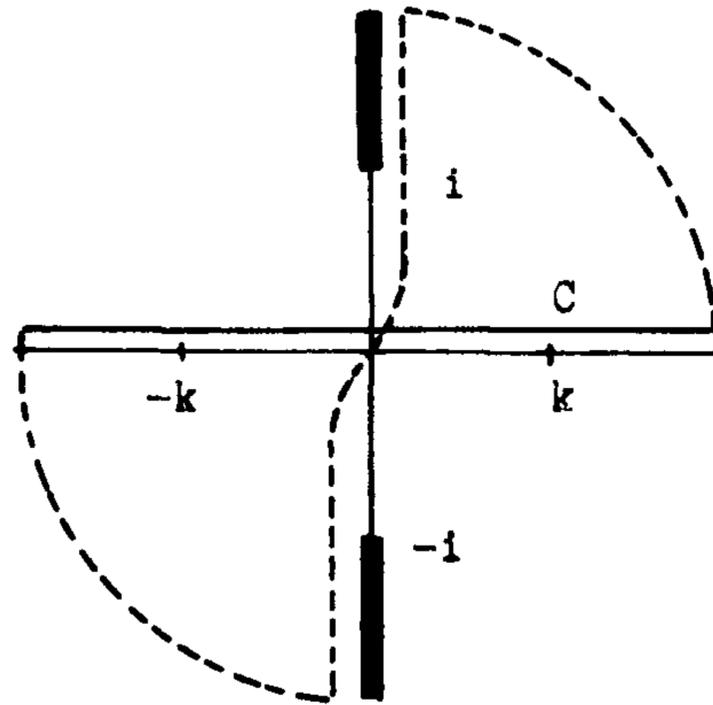
De (15) vemos de inmediato que para  $x > 0$  y  $t = 0$ , las contribuciones de energía positiva y negativa se compen

san en forma que las condiciones (12) se satisfacen, y de hecho, de (13) vemos<sup>1</sup> que  $\psi(x,t) = 0$  si  $0 < t < x$ . Lo que nos interesa ahora es de ver en que forma se comportan las contribuciones de energía positiva y negativa cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $t > x$  podemos cerrar el contorno  $C$  correspon-



Plano  $\kappa$

Fig. 3



Plano  $\kappa$

Fig. 4

diente a  $\psi_+(x,t)$  en la forma como se indica en la Fig.3. Como  $\epsilon^2 = \kappa^2 + 1$ , tenemos que  $\epsilon_x \epsilon_y = \kappa_x \kappa_y$  (donde los índices  $x,y$  indican parte real e imaginaria respectivamente) y  $\epsilon_x, \epsilon_y$  no cambian de signo en el interior de los cuadrantes. A lo largo de todo el contorno punteado de la Fig.3,  $\epsilon_y < 0$  a excepción de la parte  $i$  a  $-i$  sobre el eje imaginario, donde  $\epsilon_y = 0$ . Las contribuciones de los semicírculos punteados tienden a 0 cuando el radio de estos tiende a  $\infty$  por contener  $\exp(-|\epsilon_y|t)$ , y en lo que respecta a la contribución del eje imaginario, esa también  $\rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ , ya sea por contener la  $\exp(-|\epsilon_y|t)$  si  $|k| > 1$ , o por oscilar muy rápidamente en el intervalo finito de  $-i$  a  $i$ .

Resta solo entonces la contribución del polo en  $\kappa = k$ , que por el hecho de ser  $(\epsilon - E)^{-1} = [(\epsilon + E)/(\kappa + k)] (\kappa - k)^{-1}$  nos da:

$$\psi_+(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{2i} e^{ikx} e^{-iEt} \quad (16)$$

Para las contribuciones de energía negativa cuando  $t > x$ , tenemos que cerrar el contorno como se indica en la Fig. 4, ya que ahora tenemos  $e^{i\epsilon t}$  en lugar de  $e^{-i\epsilon t}$ . De nuevo sobre todo el contorno punteado tenemos un término  $\exp(-\epsilon_y t)$ , donde  $\epsilon_y > 0$ , y la contribución se anula cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como para energías negativas el integrando no contiene polos en  $\kappa = \pm k$  vemos que:

$$\psi_-(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \quad (17)$$

En esta forma vemos que la distribución de fuentes en  $x = 0$ , nos da inicialmente contribuciones de energía positiva y negativa (partículas y antipartículas dentro de una interpretación de Feynman<sup>1</sup>) que se compensan, pero a medida que transcurre el tiempo, las contribuciones de energía negativa van desapareciendo (aniquilación de las anti-partículas), mientras que la contribución de las energías positivas tiende a su forma estacionaria dada por (16). Una interpretación detallada a lo largo de estas líneas ha sido propuesta recientemente por Costa de Beauregard<sup>3</sup>.

#### IV. EL CASO DE LA ECUACION DE DIRAC.

Nuestro problema ahora es el de expresar las funciones de onda que satisfacen la ecuación de Dirac en el problema del obturador, en términos de las funciones de propagación  $S_{\alpha\beta}(x, t)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) asociadas a esta ecuación. La función de onda  $\Psi(x, t)$  representa un spinor de dos componentes - (nuestro problema es unidimensional), de la forma:

$$\Psi(x, t) = \begin{bmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

que satisface la ecuación<sup>2</sup>:

$$\left[ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \right] \Psi = 0, \quad (19a)$$

donde:  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (19b)$

y la condición inicial correspondiente a un obturador que es un reflector perfecto<sup>2</sup> es:

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{2i} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k}{E+1} \end{bmatrix} e^{ikx} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-k}{E+1} \end{bmatrix} e^{-ikx} \right\} \quad (20)$$

En la referencia 2, que designaremos en adelante por I, obtuvimos las funciones de onda en el caso que no hay onda reflejada, y para obtener la solución correspondiente a

la condición inicial (20), solo tenemos necesidad de restar de (16I) una expresión idéntica en la que se reemplaza  $k$  por  $-k$ , para obtener finalmente:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & (E+1)^{-1} (8\pi)^{-1} \int_C \{(\epsilon+1)(E+1)+k\kappa\} \frac{\exp i(\kappa x - \epsilon t)}{\kappa - k} \left[ \frac{1}{\frac{\kappa}{\epsilon+1}} \right] \frac{d\kappa}{\epsilon} \\ & + (E+1)^{-1} (8\pi)^{-1} \int_C \{(-\epsilon+1)(E+1)+k\kappa\} \frac{\exp i(\kappa x + \epsilon t)}{\kappa - k} \left[ \frac{1}{\frac{\kappa}{-\epsilon+1}} \right] \frac{d\kappa}{(-\epsilon)} \\ & - (E+1)^{-1} (8\pi)^{-1} \int_C \{(\epsilon+1)(E+1)-k\kappa\} \frac{\exp i(\kappa x - \epsilon t)}{\kappa + k} \left[ \frac{1}{\frac{\kappa}{\epsilon+1}} \right] \frac{d\kappa}{\epsilon} \\ & - (E+1)^{-1} (8\pi)^{-1} \int_C \{(-\epsilon+1)(E+1)-k\kappa\} \frac{\exp i(\kappa x + \epsilon t)}{\kappa + k} \left[ \frac{1}{\frac{\kappa}{-\epsilon+1}} \right] \frac{d\kappa}{(-\epsilon)}, \quad (21) \end{aligned}$$

donde como en la sección anterior  $\epsilon = (\kappa^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ,  $E = (k^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ , y el contorno  $C$  está dado por la Fig. 2.

Agrupando términos obtenemos de (21) que:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & \frac{k}{E+1} \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_C \frac{e^{i(\kappa x - \epsilon t)}}{\epsilon - E} \left[ \frac{\epsilon+1}{\kappa} \right] \frac{d\kappa}{\epsilon} + \right. \\ & \left. + \int_C \frac{e^{i(\kappa x + \epsilon t)}}{-\epsilon - E} \left[ \frac{-\epsilon+1}{\kappa} \right] \frac{d\kappa}{(-\epsilon)} \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Hacemos uso ahora de la identidad:

$$(\pm\epsilon + E)^{-1} e^{\pm 1\epsilon t} = \pm i e^{-1Et} \int_0^t e^{\pm 1(\epsilon + E)\tau'} d\tau' + (\pm\epsilon + E)^{-1} e^{-1Et}, \quad (23)$$

para expresar las primeras partes de los integrandos de (22) en términos del segundo miembro de (23). Como en la sección I, la contribución del segundo término de (23) es 0, por la forma del contorno C, y en el primer término podemos intercambiar el orden de las integraciones para obtener:

$$\Psi(x, t) = \frac{k}{E+1} \frac{1}{4\pi i} \left[ \int_0^t e^{-1E(t-\tau')} \left\{ \int_C e^{-1\epsilon\tau'} \binom{\epsilon+1}{\kappa} e^{1\kappa x} \frac{d\kappa}{\epsilon} \right\} + \int_0^t e^{-1E(t-\tau')} \left\{ \int_C e^{1\epsilon\tau'} \binom{-\epsilon+1}{\kappa} e^{1\kappa x} \frac{d\kappa}{(-\epsilon)} \right\} \right]. \quad (24)$$

Como los integrandos entre llaves {} en (24) son regulares, podemos tomar el contorno de  $-\infty$  a  $+\infty$  a lo largo del eje real, para tener finalmente:

$$\Psi(x, t) = \frac{k}{E+1} \frac{1}{4\pi i} \left[ \int_0^t e^{-1E(t-\tau')} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-1\epsilon\tau'} \binom{\epsilon+1}{\kappa} \frac{1}{\epsilon} + e^{1\epsilon\tau'} \binom{-\epsilon+1}{\kappa} \frac{1}{(-\epsilon)} \right] e^{1\kappa x} d\kappa \right\} d\tau' \right]. \quad (25)$$

Es posible ahora expresar  $\Psi(x, t)$  en términos de la función de propagación  $S(x, t)$ , que es una matriz de  $2 \times 2$  definida por<sup>5</sup>:

$$S(x, t) = \left( -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x} \operatorname{sen} \epsilon t \frac{d\kappa}{\epsilon} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} \epsilon+1 & \kappa \\ \kappa & \epsilon-1 \end{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} + e^{i\epsilon t} \begin{pmatrix} -\epsilon+1 & \kappa \\ \kappa & -\epsilon-1 \end{pmatrix} \frac{1}{(-\epsilon)} \right\} e^{i\kappa x} d\kappa. \quad (26)$$

En efecto de (25) y (26) vemos que:

$$\Psi(x, t) = -\left(\frac{k}{E+1}\right) \int_0^t e^{-iE(t-\tau')} S(x, \tau') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau' \quad (27)$$

e introduciendo la variable  $\tau = t-\tau'$  obtenemos finalmente:

$$\Psi(x, t) = \int_0^t S(x, t-\tau) \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{-k}{E+1}\right) e^{-iE\tau} \right] d\tau \quad (28)$$

Como en los casos anteriores, la función de onda asociada al problema del obturador puede expresarse en términos de una distribución de fuentes en  $x = 0$ , que empiezan a operar desde el momento de abrirse el obturador. De (26) vemos que la función de propagación  $S(x, t)$ , puede expresarse en términos que contienen solamente energías positivas o negativas. Podemos por lo tanto, desarrollar para partículas de Dirac un análisis similar al que llevamos a cabo para partículas de Klein-Gordon en la sección anterior, y ver como el desarrollo de la función de onda en el curso del tiempo va asociado a la creación de partículas de energía positiva, y a la aniquilación de las de energía negativa (6, 11).

#### REFERENCIAS.

1. M.Moshinsky. Phys.Rev. 88, 625 (1952).
2. M.Moshinsky. Rev.Mex.Fis. 1, 151 (1952).
3. O.Costa de Beauregard. Colloques internationaux du C.N.R.S. 38, 207 (1950).
4. A.Sommerfeld. Theorie der Beugung Cap. XX de Frank. V.Mises. Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. (Fried. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1935), Vol. II pp. 808-87).
5. G. Wentzel Quantum Theory of Fields. (Interscience Publishers Inc. New York 1949) pp. 23, 179.
6. O.Costa de Beauregard. Rev.Mex.Fis. 4, 201 (1954)
7. W.Heisenberg. Z.Physik 120, 519 (1943).
8. W.Pauli. Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik (Edward Broth. Ann Arbor Mich, 1949) p.104.
9. M.Moshinsky C.R. Acad.Sci. Paris 238, 2395 (1954).
10. J.Schwinger. Phys.Rev. 75, 677 (1949).
11. R.P.Feynman.. Phys.Rev. 76, 749, 769 (1949).