MOVIMIENTO DE UNA MASA QUE ANIQUILA SU PROPIO CAMPO GRAVITACIONAL

Carlos Graef Fernández.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México

(Recibido: Octubre 31, 1954)

RESUMEN

En este trabajo se demuestra que es posible mover un punto masa -de masa tan grande como se quiera- de modo que una partícula exploradora no lo sienta gravitacionalmente. La partícula exploradora esta inicialmente en reposo en un sistema inercial. El punto masa inicia su movimiento con la velocidad de la luz, partiendo de la partícula exploradora, y describiendo una linea recta. La velocidad del punto masa disminuye gradualmente hasta cero; en seguida regresa el

punto masa sobre sus pasos, mas no simétricamente. Su velocidad aumenta gradualmente hasta alcanzar otra vez su valor límite: el de la velocidad de la luz. Durante todo este movimiento -o durante cualquier parte del mismo- el punto masa no provoca ninguna aceleración en la partícula exploradora.

Los fenómenos que se analizan en este trabajo se desarrollan en un marco de referencia inercial de la teoría de la Relatividad Especial. Consiste el marco de un espacio físico de una dimensión, y del tiempo t. En el espacio físico se localizan los puntos por medio de su abscisa x. Se utiliza la Teoría de la Gravitación de Birkhoff. El cuadrado del elemento de arco del espacio-tiempo correspondiente al marco de referencia es:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \qquad (1)$$

Se utilizan aquí el segundo-luz para unidad de longitud, y el segundo para unidad de tiempo.

Se plantea y resuelve en este artículo el problema de encontrar como debe moverse un punto masa, para que se anulen las aceleraciones físicas que este provoca sobre una partícula exploradora en reposo en el marco de referencia inercial.

En la Teoría de la Gravitación de Birkhoff se caracteriza el campo gravitacional por un tensor[1] doblemente covariante h_{ij}. Las líneas de universo[2] de las partículas exploradoras son senderos (paths) dados por las ecuaciones di ferenciales:

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t}\right)\frac{dt}{ds}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \quad ; \qquad (2)$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t} \quad \frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t}\right)\frac{dt}{ds}\frac{dx}{ds} \, . \qquad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) obtenemos la expresión para la aceleración en el espacio físico, utilizando tiempo t como variable independiente. Designaremos a las derivadas con respecto a s por medio de un acento, y a las derivadas con respecto a t por medio de un punto. Entonces se obtiene

$$\dot{x} = \frac{x'}{t'} \quad ;$$

$$\ddot{x} = \frac{t'x'' - x't''}{t'^3} = \frac{x''}{t'^2} - \dot{x}\,\frac{t''}{t'^2} \quad . \qquad (4)$$

De las ecuaciones (4), (3) y (2) se deduce:

$$\ddot{x} = \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t}\right)\dot{x}$$

$$- \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t}\right)\dot{x}^2 - \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x} - \frac{\partial h_{22}}{\partial t}\right)\dot{x}^3 \quad . \qquad (5)$$

Llamamos a $\dot{x}$ velocidad física de la partícula exploradora, para contrastarla con el vector velocidad (t', x') del espacio tiempo; análogamente llamamos a $\ddot{x}$ aceleración física. La ecuación (5) indica, que en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff la aceleración física es un polinomio de tercer grado en la velocidad física, con coeficientes que son funciones de acontecimiento, o sea de tiempo y de lugar.

El problema que se trata aquí consiste en encontrar qué movimiento hay que imprimirle a un punto masa, para que se anule la aceleración $\ddot{x}$ que éste causa en una partícula exploradora en reposo en el punto x. Como la partícula exploradora esta en reposo $\dot{x} = 0$. Hay que mover al punto masa de manera que

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{12}}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

en el punto x, y para todo tiempo t.

El tensor potencial gravitacional de Birkhoff[a] de un punto masa en movimiento arbitrario, esta dado por:

$$h_{ij} = \frac{M[2\underline{v}_i\underline{v}_j - \Delta_{ij}]}{\Delta_{mn}(x^m - \underline{\xi}^m)\underline{v}^n} \quad . \qquad (7)$$

Aquí M es la masa del punto generador del campo. El tensor h_{ij} está calculado para el acontecimiento $A(t,x)$. El vector covariante $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ es el vector velocidad retardado del punto masa en el espacio-tiempo. Se subrayan en (7) las cantidades retardadas con respecto al acontecimiento $A(t,x)$. Asi $\underline{\xi}^1 = \underline{\tau}$ es el tiempo en el que partió la señal gravitacional que llega al punto x en el instante t. El punto masa tiene en el instante $\underline{\xi}^1 = \underline{\tau}$ la abscisa $\underline{\xi}^2 = \underline{\xi}$, y la velocidad física

$$\underline{v} = \frac{d\underline{\xi}}{d\underline{\tau}} \tag{8}$$

El vector covariante $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ tiene además la siguiente expresión:

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} , \frac{-\underline{v}}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} \right) . \tag{9}$$

Sus componentes contravariantes son:

$$(\underline{v}^1, \underline{v}^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} , \frac{\underline{v}}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} \right) . \tag{10}$$

Tanto en (9) como en (10) $(\underline{v})^2$ significa el cuadrado de la velocidad física retardada.

El tensor Δ_{ij} o Δ_{mn} que aparece en (7) es el tensor métrico fundamental del espacio-tiempo de Minkowski; en el caso del espacio físico de una dimensión, esta dado por:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

El denominador del tensor (7) es explícitamente igual a:

$$\Delta_{mn}(x^m - \underline{\xi}^m)\underline{v}^n = \frac{(t-\underline{\tau}) - (x-\underline{\xi})\ \underline{v}}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}} \tag{12}$$

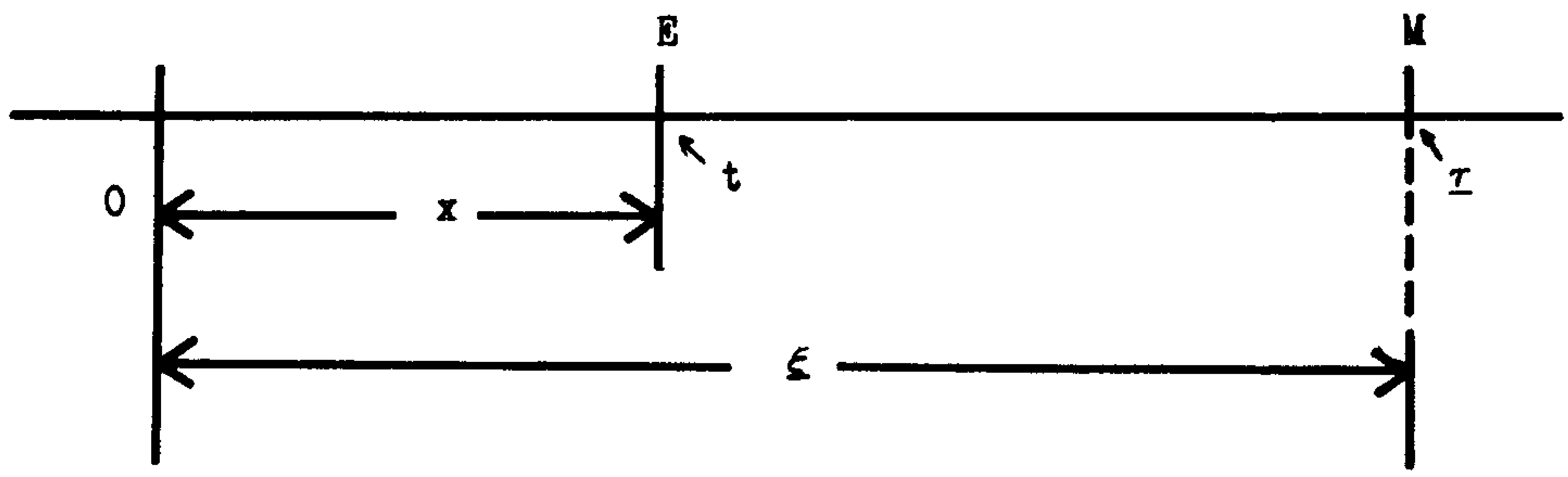
Las cuatro componentes del tensor (7) son entonces:

$$\left.\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{M[1+(\underline{v})^2]}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}\,[(t-\tau)-(x-\xi)\,\underline{v}]} \quad ; \\
h_{12} = h_{21} &= \frac{-2M\underline{v}}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}\,[(t-\tau)-(x-\xi)\,\underline{v}]} \quad ; \\
h_{22} &= \frac{M[1+(\underline{v})^2]}{\sqrt{1-(\underline{v})^2}\,[(t-\tau)-(x-\xi)\,\underline{v}]} \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

De aquí en adelante no habrá peligro de que se confunda el cuadrado de la velocidad física retardada $(\underline{v})^2$ con la segunda componente contravariante $\underline{v}^2$ del vector velocidad en el espacio-tiempo. Designaremos pues a ese cuadrado con "$\underline{v}^2$".

Al moverse un punto masa en forma arbitraria ξ es una función de τ. El tiempo retardado τ y la abscisa retardada ξ del punto masa, son funciones de la t y de la x del acontecimiento A, para el que se está calculando el campo. Como la velocidad retardada $\underline{v} = \frac{d\xi}{d\tau}$, las componentes del tensor h_{ij} en (13) dependen exclusivamente de t y de x. Nuestro problema se reduce a determinar una función ξ de τ tal, que las h_{ij} satisfagan la ecuación (6).

Para poder calcular las derivadas parciales con respecto a t y con respecto a x que intervienen en la ecuación (6), es indispensable tener a la mano las derivadas parciales de τ y ξ con respecto a esas mismas variables. Estas últimas se obtienen fácilmente de las siguientes consideraciones:



Sea E la partícula exploradora. La abscisa de E es x. Se considera a esa partícula en el instante t. Sea M la posición del punto masa en el instante τ; sea ξ su abscisa en ese instante. La señal gravitacional que sale del punto masa en el instante τ llega a la partícula exploradora en el instante t. La velocidad de propagación de la gravitación en la Teoría de Birkhoff es igual a la velocidad de la luz, que es a su vez igual a uno con las unidades que se usan. El tiempo que se tarda la señal gravitacional en llegar de M a E es igual a $t-\tau$. La distancia que recorre la señal es igual a $\xi-x$. Como la velocidad de propagacion es igual a uno, se tiene:

$$t - \tau = \xi - x \, . \tag{14}$$

Recordando que ξ es una función de τ, que a su vez es una función de t y de x, y que $\frac{d\xi}{d\tau} = v$, se obtiene de (14) derivando parcialmente con respecto a t y con respecto a x:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial t} &= \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial x} = \frac{1}{1+\underline{v}} \quad , \\ \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t} &= \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial x} - \frac{\underline{v}}{1+\underline{v}} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Las ecuaciones (13) se simplifican con ayuda de la (14) y adquieren la forma:

$$\left.\begin{aligned} h_{11} &= \frac{M[1+\underline{v}^2]}{[1-\underline{v}]^{\frac{1}{2}}\ [1+\underline{v}]^{3/2}\ [\underline{\xi}-x]} \quad ; \\ h_{12} = h_{21} &= \frac{-2M\underline{v}}{[1-\underline{v}]^{\frac{1}{2}}\ [1+v]^{3/2}\ [\underline{\xi}-x]} \quad ; \\ h_{22} &= \frac{M[1+\underline{v}^2]}{[1-\underline{v}]^{\frac{1}{2}}\ [1+\underline{v}]^{3/2}\ [\underline{\xi}-x]} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Las cantidades retardadas $\underline{v}$ y $\underline{\xi}$ son funciones del tiempo retardado $\underline{\tau}$; éste a su vez es función de t y de x. Llamaremos $\underline{a}$ a la aceleración retardada del punto masa; $\underline{a}$ resulta también función de $\underline{\tau}$, y está dada por:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{d\underline{\tau}} = \frac{d^2\underline{\xi}}{d\underline{\tau}^2} \quad . \qquad (17)$$

Con ayuda de (15), (16) y (17), se obtienen para las derivadas parciales que intervienen en la ecuación (6):

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial x} = \frac{M}{(1-\underline{v})^{\frac{1}{2}}\ (1+\underline{v})^{5/2}\ (\underline{\xi}-x)} \left[\frac{-1+4\underline{v}-\underline{v}^2}{1-\underline{v}^2}\ \underline{a} + \frac{1+\underline{v}^2}{\underline{\xi}-x} \right] \ ; \qquad (18)$$

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial t} = \frac{M}{(1-\underline{v})^{\frac{1}{2}}\,(1+\underline{v})^{5/2}(\underline{\xi}-x)}\left[\frac{-2+2\underline{v}-2\underline{v}^2}{1-\underline{v}^2}\,\underline{a} + \frac{2\underline{v}^2}{\underline{\xi}-x}\right] . \tag{19}$$

Substituyendo (18) y (19) en la ecuación (6), se obtiene después de simplificar:

$$\frac{1+\underline{v}}{1-\underline{v}}\,\underline{a} + \frac{1-\underline{v}^2}{\underline{\xi}-x} = 0 . \tag{20}$$

De la ecuación (20) se obtiene para la aceleración retardada del punto masa:

$$\underline{a} = -\frac{(1-\underline{v})^2}{\underline{\xi}-x} . \tag{21}$$

Elijamos para origen de las abscisas el punto del espacio físico en el que se encuentra la partícula exploradora en reposo; entonces se tiene $x = 0$, y:

$$\frac{d^2\underline{\xi}}{d\underline{\tau}^2} = -\frac{\left(1-\frac{d\underline{\xi}}{d\underline{\tau}}\right)^2}{\underline{\xi}} . \tag{22}$$

La ecuación diferencial (22) nos proporciona a la abscisa retardada $\underline{\xi}$ en función del tiempo retardado $\underline{\tau}$. La función $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{\tau})$ es idéntica a la función $\xi = \xi(\tau)$; por eso podemos suprimir en (22) las líneas que subrayan a $\underline{\xi}$ y a $\underline{\tau}$. Para el movimiento del punto masa que no provoca ninguna aceleración en una partícula exploradora en reposo en el origen de las coordenadas espaciales, se tiene entonces:

$$\ddot{\xi} = -\frac{(1-\dot{\xi})^2}{\xi} . \tag{23}$$

Una primera integral de la ecuación (23) se obtiene muy fácilmente:

$$\xi(1-\dot{\xi})\ e^{\frac{1}{1-\dot{\xi}}} = C \quad . \tag{24}$$

Aquí C es la constante de integración.

La ecuación (24) se puede normalizar mediante la transformación:

$$\begin{aligned} \xi &= CX \quad ; \\ \tau &= CT \quad . \end{aligned} \tag{25}$$

La ecuación diferencial tiene, con las nuevas variables la forma:

$$X(1 - \dot{X})\ e^{\frac{1}{1-\dot{X}}} = 1 \quad . \tag{26}$$

Aquí el punto designa la derivada con respecto a T.

De la ecuación (26) se obtiene:

$$X = \frac{1}{1 - \dot{X}}\ e^{-\frac{1}{1-\dot{X}}} \quad . \tag{27}$$

Introduciendo el parámetro u definido por

$$u = \frac{1}{1 - \dot{X}} \quad , \tag{28}$$

se obtiene para X:

$$X = ue^{-u} \quad . \tag{29}$$

De esta última ecuación se obtiene

$$\frac{dX}{du} = e^{-u}\,[1 - u] \quad . \tag{30}$$

De la definición de u se deduce inmediatamente que

$$\frac{dX}{dT} = \frac{u - 1}{u} \quad . \tag{31}$$

De las ecuaciones (30) y (31) se obtiene la ecuación diferencial de T:

$$\frac{dT}{du} = -ue^{-u} \quad . \tag{32}$$

Integrando resulta:

$$T = e^{-u}\,[1 + u] \quad . \tag{33}$$

La constante de integración se eligió igual a cero. Un valor arbitrario de esa constante significa un corrimiento en el origen de los tiempos que no tiene importancia. Las variables T y X son proporcionales al tiempo τ y la abscisa ξ del punto masa en movimiento [ecuaciones (25)].

La velocidad $\dot{\xi}$ del punto masa es igual a

$$\dot{\xi} = \frac{dX}{dT} \quad . \tag{34}$$

El movimiento del punto masa está totalmente descrito por las ecuaciones:

$$T = e^{-u}\,[1 + u] \quad ,$$

$$X = ue^{-u} \quad , \tag{35}$$

$$\frac{dX}{dT} = \frac{u - 1}{u} \quad .$$

La Teoría de la Relatividad Especial le impone una restricción a la velocidad del punto-masa:

$$\left[\frac{dX}{dT} \right] \leqslant 1 \quad . \tag{36}$$

De aquí se deduce para el parámetro u:

$$u \geqslant \tfrac{1}{2} \quad . \tag{37}$$

La tabla de la siguiente hoja, muestra los valores de T, de X y de la velocidad del punto masa.

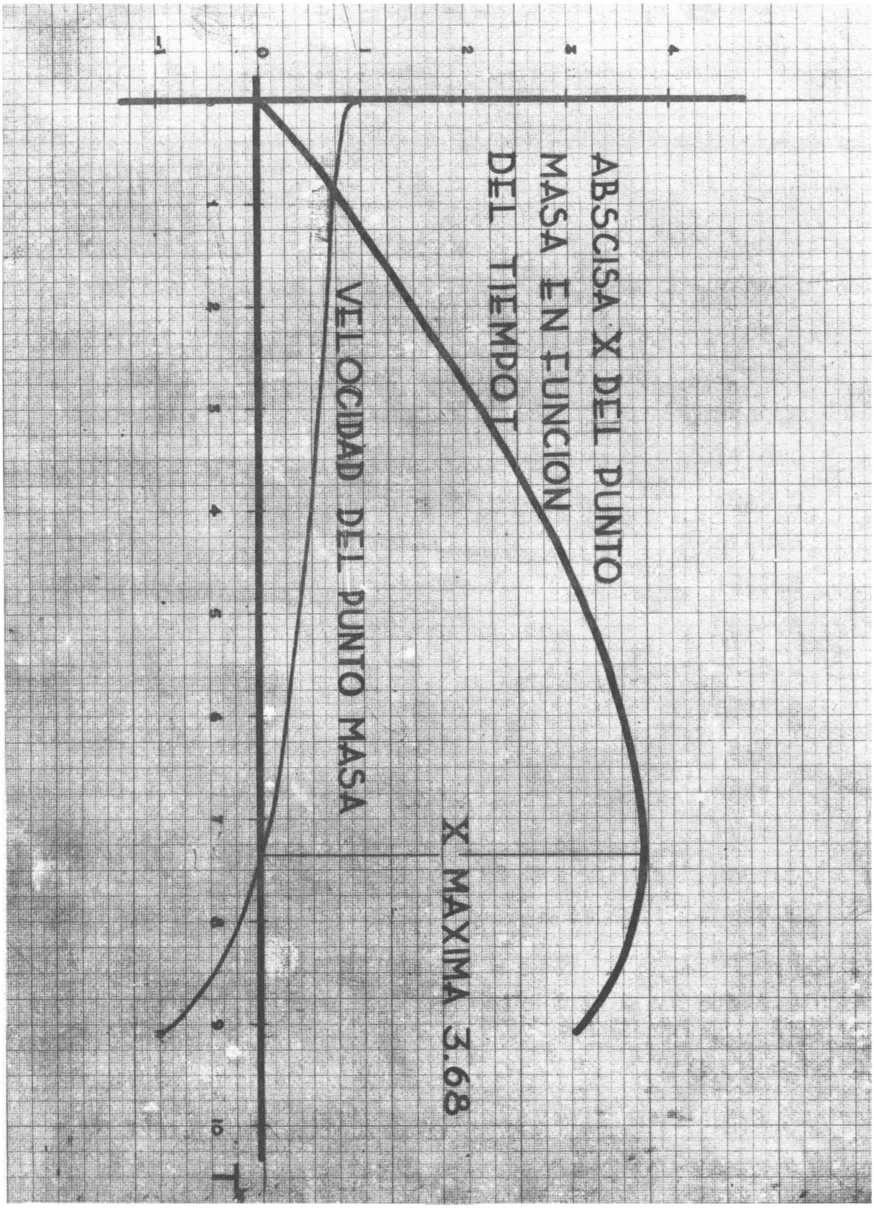
La gráfica exhibe a X y a la velocidad como función de T. De la figura se deduce que el punto masa parte del origen con la velocidad de la luz, alejándose en línea recta. Su velocidad disminuye hasta anularse. Esto acaece cuando la abscisa del punto masa vale 0.367879 C. En seguida invierte el punto masa el sentido de su velocidad, acercándose al origen, hasta adquirir la velocidad de la luz cuando tiene la abscisa 0.303266 C. Durante todo este movimiento el punto masa no provoca ninguna aceleración en una partícula exploradora que se haya colocado en el origen de las coordenadas al -

TABLA

$\xi = CX$; $\tau = CT$; $v = \dfrac{d\xi}{d\tau}$;

C es una constante arbitraria.

T	X	v
0.0000	0.0000	+1.0000
0.0005	0.0004	+0.9000
0.0012	0.0011	+0.8889
0.0030	0.0027	+0.8750
0.0073	0.0064	+0.8511
0.0174	0.0149	+0.8333
0.0404	0.0337	+0.8000
0.0916	0.0733	+0.7500
0.1991	0.1494	+0.6667
0.4060	0.2707	+0.5000
0.6626	0.3614	+0.1667
0.6990	0.3661	+0.0909
0.7174	0.3674	+0.0476
0.7358	0.3679 máximo	0.0000
0.7541	0.3674	−0.0526
0.7725	0.3659	−0.1111
0.7907	0.3633	−0.1765
0.8088	0.3595	−0.2500
0.8266	0.3543	−0.3333
0.8442	0.3476	−0.4286
0.8614	0.3393	−0.5385
0.8781	0.3293	−0.6667
0.8943	0.3173	−0.8182
0.9098	0.3033	−1.0000



ABSCISA X DEL PUNTO
MASA EN FUNCION
DEL TIEMPO T
VELOCIDAD DEL PUNTO MASA
X MAXIMA 3.68
T

iniciarse el movimiento. Como C es una constante arbitraria, hay toda una familia monoparamétrica de movimientos del punto masa que tienen la propiedad de no ser sentidos por la partícula exploradora. Todos estos movimientos se obtienen del dado por X(T), por medio de la transformación de semejanza

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{X}{C} \quad , \\ \tau &= \frac{T}{C} \quad ; \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{dX}{dT} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

La velocidad en puntos homólogos es la misma en todos los movimientos. Cualquier parte de uno de esos movimientos no es sentido gravitacionalmente por la partícula exploradora.

REFERENCIAS.

1. G.D.Birkhoff, Bol.Soc.Mat.Mex., 1, Nos. 4 y 5 (1944).
2. A.Barajas, Bol.Soc.Mat.Mex., 1, Nos 4 y 5 (1944).
3. C.Graef-Fernandez, Rev.Mex.Fis. 1, No.1(1952).