SOBRE LA SINTESIS DE SISTEMAS LINEALES PARA LA TRANSMISION SIN RETRASO, RETRASADA Y PREDICCION LINEAL DE SEÑALES. I

Manuel Cerrillo V.

Instituto Nacional de la Investigación Científica e Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México

INTRODUCCION

0.1. Un problema básico en la síntesis de sistemas lineales en el dominio del tiempo.

Uno de los objetivos importantes que se persigue en la síntesis de sistemas lineales se describe como sigue:

"Sean $\varphi(t)$ y $\gamma(t)$ dos funciones uniformes reales y de variación acotada de la variable real t, tales que:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \equiv 0 & \text{para} \quad -\infty < t < 0 \\ \not\equiv 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant t < \infty \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \equiv 0 & \text{para} \quad -\infty < t < t_o = \text{const.} \\ \not\equiv 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant t_o \leqslant t < \infty \end{cases} \qquad 1, (\mathrm{I}\text{-}0.1)$$

ahora, prescribiendo de antemano dos funciones $\varphi(t)$ y $\gamma(t)$ que satisfagan las condiciones anteriores, pero de otra manera arbitrarias, se pregunta:

¿Será posible construir un sistema lineal "finito" y "pasivo", cuyos elementos sean concentrados o distribuidos, pero siempre en número finito en extensión y valor, y que tenga dos pares externos de terminales, sistema tal, que cuando sea actuado en un par de terminales por fuerzas de excitación de la forma $\varphi(t)$ su respuesta, en el otro par de terminales, sea de la forma $\gamma(t)$?"

Debe notarse que se postula la condición de "finitud" en la resolución del problema, es decir, que el número de elementos en número y extensión, así como los valores característicos de los elementos sean finitos. Bajo esta postulación se vuelve difícil la solución del problema mencionado.

0.11. Varios contra ejemplos pueden producirse que indican que el problema no siempre tiene una solución exacta, al menos en la forma como aquél se ha establecido. Un contra ejemplo simple lo constituye el problema de transmisión pura, que se define por la condición $\gamma(t) = \varphi(t)$ para $0 < t < \infty$. El problema de la transmisión retrasada, que se define por $\gamma(t) = \varphi(t-t_o)$, $0< t_o = \text{const} < \infty$, no tiene solución exacta, bajo la postulación de finitud del sistema lineal. El problema de transmisión adelantada, que se definiría por $\gamma(t) \equiv \varphi(t+t_o)$, $0< t_o = \text{const} < \infty$, no tiene una solución por razones físicas obvias.

La demostración de que el problema de transmisión no tiene solución exacta será dado en una sección posterior.

0.12. El problema de transmisión pura y sus asociados de transmisión atrasada y adelantada, son importantísimos y fundamentales en la teoría de la comunicación. La no existencia de soluciones exactas que satisfagan lo estipulado en el problema básico en la sección 0.10, no implica que no puedan encontrarse soluciones aproximadas que, dentro de ciertas tolerancias, representan una solución "aceptable" Una modificación apropiada de la postulación del problema básico antes indicado, permite encontrar soluciones, muchas de ellas con carácter de aproximado, a muchos problemas que no tendrán solución exacta bajo la estipulación original. Se debe hacer notar que la condición de finitud del sistema linear no será removida en ningún caso, puesto que es posible construir sistemas que estén formados por un número infinito de elementos, que tengan extensiones infinitas, o que sus elementos tengan valores infinitos.

0.13. El objeto principal de este artículo es discutir y dar soluciones apropiadas al problema de transmisión y asociados, cuando se modifica adecuadamente lo dicho en la sección 0.10; antes de introducir estas modificaciones conviene introducir algunos conceptos preparatorios que se derivan en las secciones siguientes:

0.2. ***La integral de convolución como herramienta básica.***

La caracterización de un sistema lineal puede hacerse mediante la integral de convolución o resultante de Laplace como sige:

$$\gamma(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)\, S_c(\tau)\, d\tau = \int_0^t \varphi(\tau)\, S_c(t-\tau)\, d\tau \qquad 1,(I-0.2)$$

donde $S_c(t)$ representa a la función del sistema en el dominio del tiempo. La función $S_c(t)$ se define como la respuesta de un sistema lineal de cuatro terminales, cuando la excitación es producida por el impulso unidad $U_o(t-0)$ introducida al instante $t = 0$.

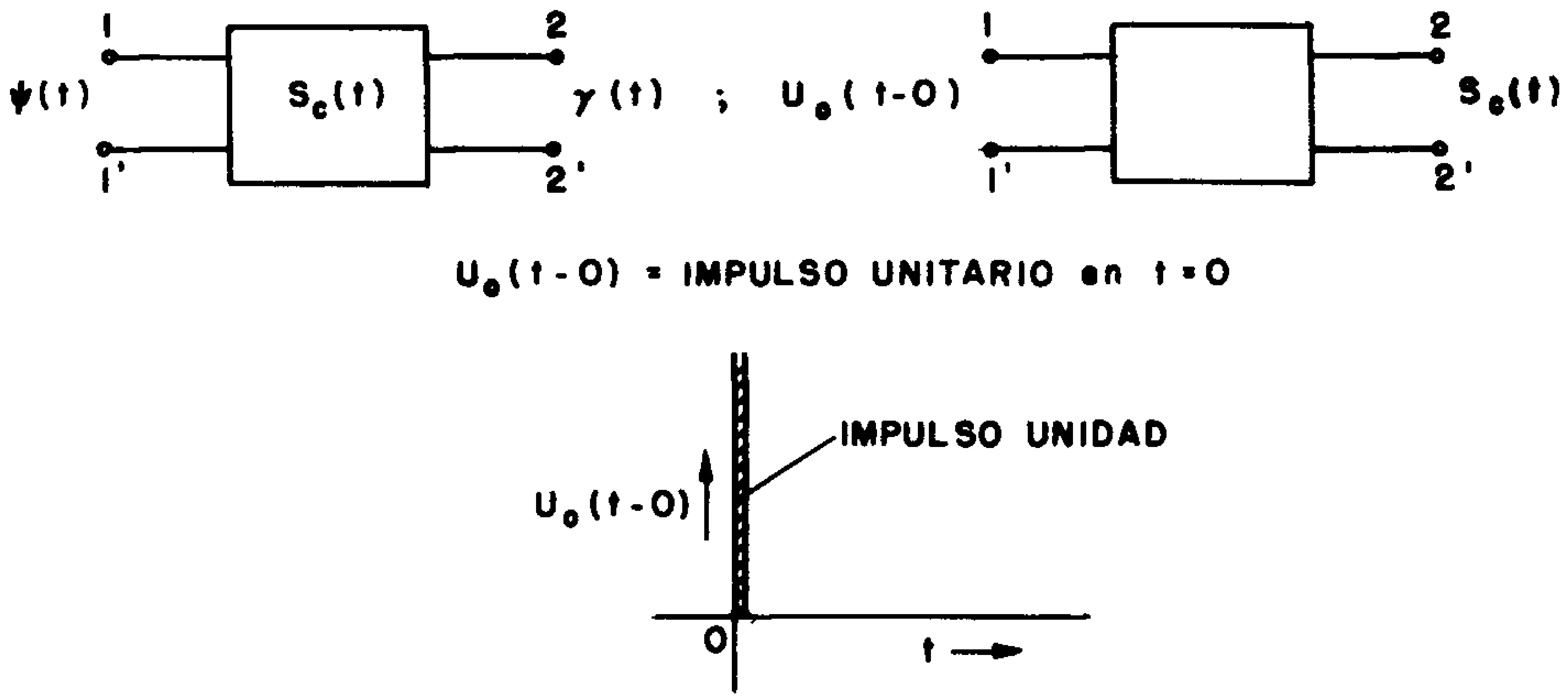


Fig. 1,(I-0.2)

La figura 1,(I-0.2) muestra esquemáticamente la situación representada por la integral de convolución .

La integral 1,(I-0.2) será tomada momentáneamente en el sentido de Riemann para ilustrar mejor algunos puntos tendientes a demostrar la no existencia de soluciones del problema de transmisión. Dicha integral de convoluciones será tomada en adelante en el sentido de Stieltjes.

0.3. ***La no solución del problema de transmisión en sistemas finitos con kernel contínuo.***

Se demostrará que el problema de transmisión no tiene una solución exacta cuando se introduce la condición de finitud del sistema lineal en cuestión.

0.31. Como es bien sabido, la respuesta $S_c(t)$ de un sistema lineal finito y pasivo al impulso unidad, es una función acotada, uniforme y contínua para $t>0$. En el caso de transmisión $\gamma(t) \equiv \varphi(t)$ se tendrá:

$$\varphi(t) = \int_0^t S_c(t-\tau)\ \varphi(\tau)\ d\tau \qquad 1,(I\text{-}0.31)$$

que se convierte en una ecuación integral de Volterra de la primera clase. La teoría de las ecuaciones integrales nos enseña dos cosas:

1o. Que bajo las condiciones que debe satisfacer la función de excitación $\varphi(t)$ y por la continuidad del kernel $S_c(t-\tau)$, el primer miembro de 1,(I-0.31) es una función contínua. Luego solamente podrían existir soluciones para excitaciones de la clase C_o, lo que limitaría la generalidad del problema de transmisión.

2o. En estas circunstancias la ecuación de Volterra admite como solución única $\varphi(t) = 0$, que es una solución sin sentido en el problema de transmisión.

0.32. Existen otras soluciones triviales en el problema de transmisión . La primera, por ejemplo, es que el sistema se reduzca a una resistencia en paralelo . La segunda, en el caso de que el sistema sea una linea ideal de transmisión terminada en su impedancia natural (transmisión retrasada). La linea de transmisión ideal no es realizable en el estricto sentido de la palabra.

0.33. El método básico de ataque al problema de transmisión y asociados que se sigue en este artículo, es usando la integral de convolución en el sentido de Stieltjes.

$$\gamma(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)\, dK(\tau) = \int_0^t S_c(t-\tau)\, d\psi(\tau) \qquad 1,(I\text{-}0.33)$$

pudiendo ser las funciones $\varphi(t)$ y $S_c(t)$ singulares pero integrales en el sentido de Stieltjes. $K(t)$ y $\psi(t)$ son funciones de distribución asociadas respectivamente a $\varphi(t)$ y $S_c(t)$.

Antes de continuar con el estudio de estas integrales es necesario introducir los conjuntos de "Tolerancias" y de "Aperturas".

0.40. ***Conjuntos de "Tolerancias" y "Aperturas"***. Se introducirán ahora otros conceptos preparatorios para la formulación de una postulación del problema básico mencionado en la sección 0.1, de manera que existan soluciones a problemas importantes, como el de transmisión, cuya solución no existe bajo la postulación original. Tales conceptos son los de "Tolerancia" y de "Apertura".

0.41. Introduciremos aquí el conjunto de "Aperturas" y "Tolerancias". Sea $\gamma(t)$ una función de variación acotada que satisface los requisitos prescritos en la sección 0.1. La figura 1, (I-0-41) muestra una posible gráfica de $\gamma(t)$. Asociemos a soporte de $\gamma(t)$:

a. Un conjunto numerable de intervalos abiertos finitos $[a_k]$, tales que $\Omega\,[a_k] = 0$. Estos intervalos pueden degenerar en puntos. La longitud de los intervalos puede ser pequeña pero no necesariamente así.

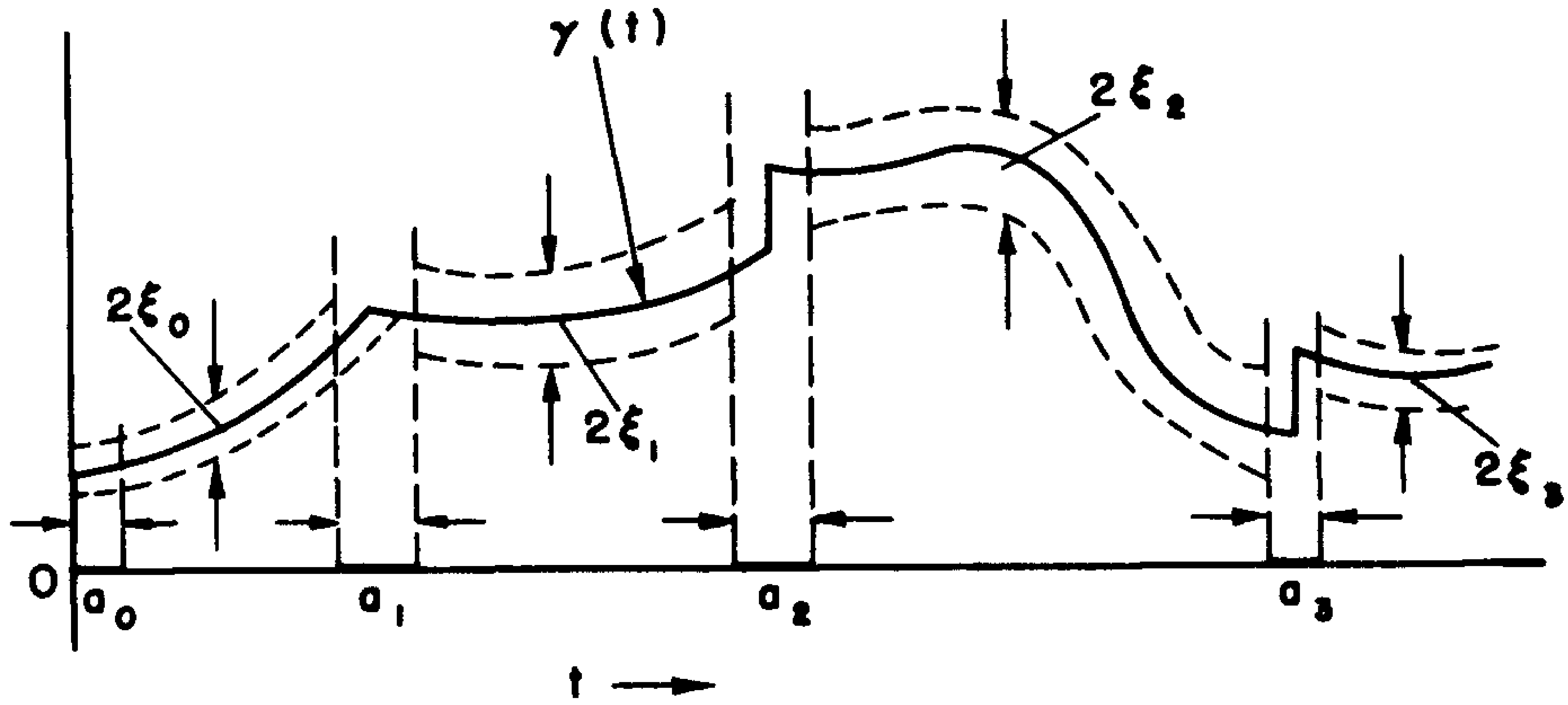


Fig. 1(I-0.41). Conjunto de Tolerancias y Aperturas.

Supondremos que a_n , $n = 0, 1, 2, \ldots$ representa la longitud de cada intervalo. Este conjunto, que se describe de antemano, se denomina conjunto de "Aperturas" La colocación y distribución de los intervalos a_k , $k = 0, 1, 2, \ldots$ no tiene de momento especial interés. Más tarde, se sujetará la posición de cada apertura a los puntos de discontinuidad, singularidad, etc. de las funciones $\varphi(t)$ y $\gamma(t)$.

Asociemos a la gráfica de $\gamma(t)$:

b. Un conjunto numerable de números positivos pequeños $[\epsilon_i]$, $\epsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Los valores ϵ_i , $i = 1, 2, \ldots$ sirven para trazar vecindades a lo largo de la gráfica de $\gamma(t)$ en los intervalos de t , contenidos en el complemento de $[a_n]$.

0.50. ***Funciones aceptables de excitación y respuesta.***

Aquí introduciremos el concepto de funciones aceptables $\gamma^*(t)$ asociadas a $\gamma(t)$.

$\gamma^*(t)$ es una función de variación acotada, real y uniforme de la variable real t , tal que:

i. La gráfica de $\gamma^*(t)$ corre siempre en el interior de cada región vecinal definida por el conjunto $[\epsilon_i]$ cuando $t \epsilon$ complemento $[a_n]$.

ii. La gráfica de $\gamma^*(\tau)$ puede correr completamente fuera de las regiones vecinales adyacentes a cada a_n cuando $t \epsilon a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

iii. $\gamma^*(t) \equiv 0$ para $-\infty < t < 0$

La condición i , equivale a escribir:

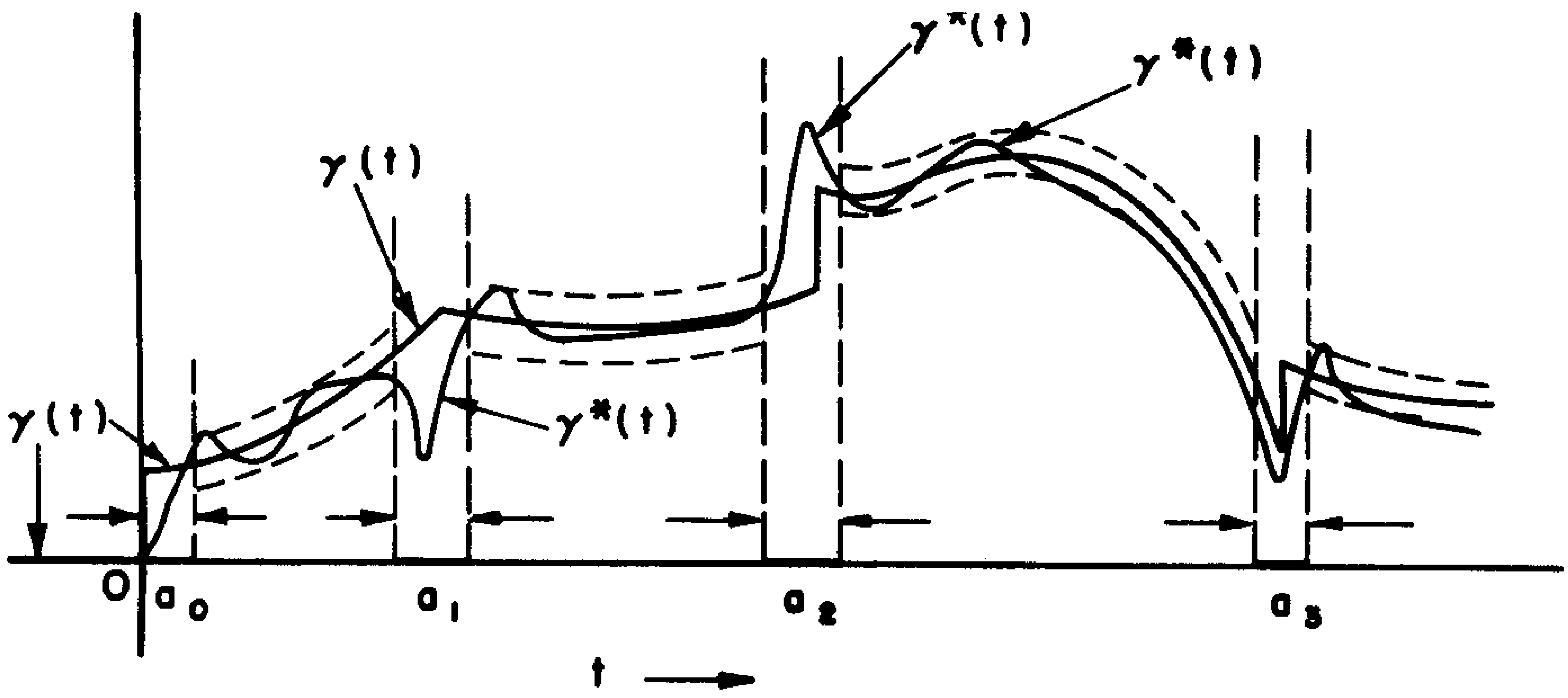
$$| \gamma(t) - \gamma^*(t) | \leqslant \epsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

cuando t no está contenido en $[a_k]$.

La condición ii indica que el conjunto de tolerancia no controla los límites de variación de $\gamma^*(t)$ en las aperturas.

El parecido numérico regional entre las funciones $\gamma(t)$ y $\gamma^*(t)$ se patetiza llamando a $\gamma^*(t)$ el "símil" de $\gamma(t)$. La función $\gamma^*(t)$ de por sí es llamada una función aceptable.†

† A pesar del parecido entre $\gamma(t)$ y $\gamma^*(t)$ no se dice que $\gamma^*(t)$ sea una aproximación de $\gamma(t)$ en el sentido usual de esta palabra. La función $\gamma^*(t)$ puede, por ejemplo, pertenecer a la clase $L^{(\infty)}$, mientras que $\gamma(t)$ puede ser de clase $L^{(r)}$ $r < \infty$.



1,(I-0.50)

La figura 1, (I-0.50) muestra una función $\gamma^*(t)$ aceptable asociada a $\gamma(t)$ en el sentido ya explicado.

0.51. Presentaremos aquí la clase de funciones $\varphi(t)$, las cuales serán aceptadas como la forma de la función de excitación del sistema de cuatro terminales.

Consideramos primero la clase de funciones $\varphi(t)$ tal que:

i.

$$\varphi(t) \begin{cases} \equiv 0 & \text{para} \quad -\infty < t < 0 \\ \not\equiv 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant t < \infty \end{cases}$$

una función real y uniforme de la variable real t.

ii. $\varphi(t)$ es una función regionalmente contínua, clase $C^{(o)}$, para casi todos los valores de t, $0 \leqslant t < \infty$. Los puntos excepcionales están formados por:

a. Un conjunto numerable de puntos aislados $[t_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ sobre los cuales la función $\varphi(t)$ presenta simples discontinuidades de salto finito.

b. Un conjunto numerable de puntos aislados $[t_i]$, $i = 1, 2, \ldots$

sobre los cuales la función $\varphi(t)$ presenta un comportamiento singular, como impulsos, dobletes, etc., tal que se verifique la condición iii.

iii. La función $\varphi(t)$ debe ser integrable en el sentido de Stielties en cualquier subintervalo finito de tiempo contenido en el intervalo $0 \leqslant t < \infty$ †.

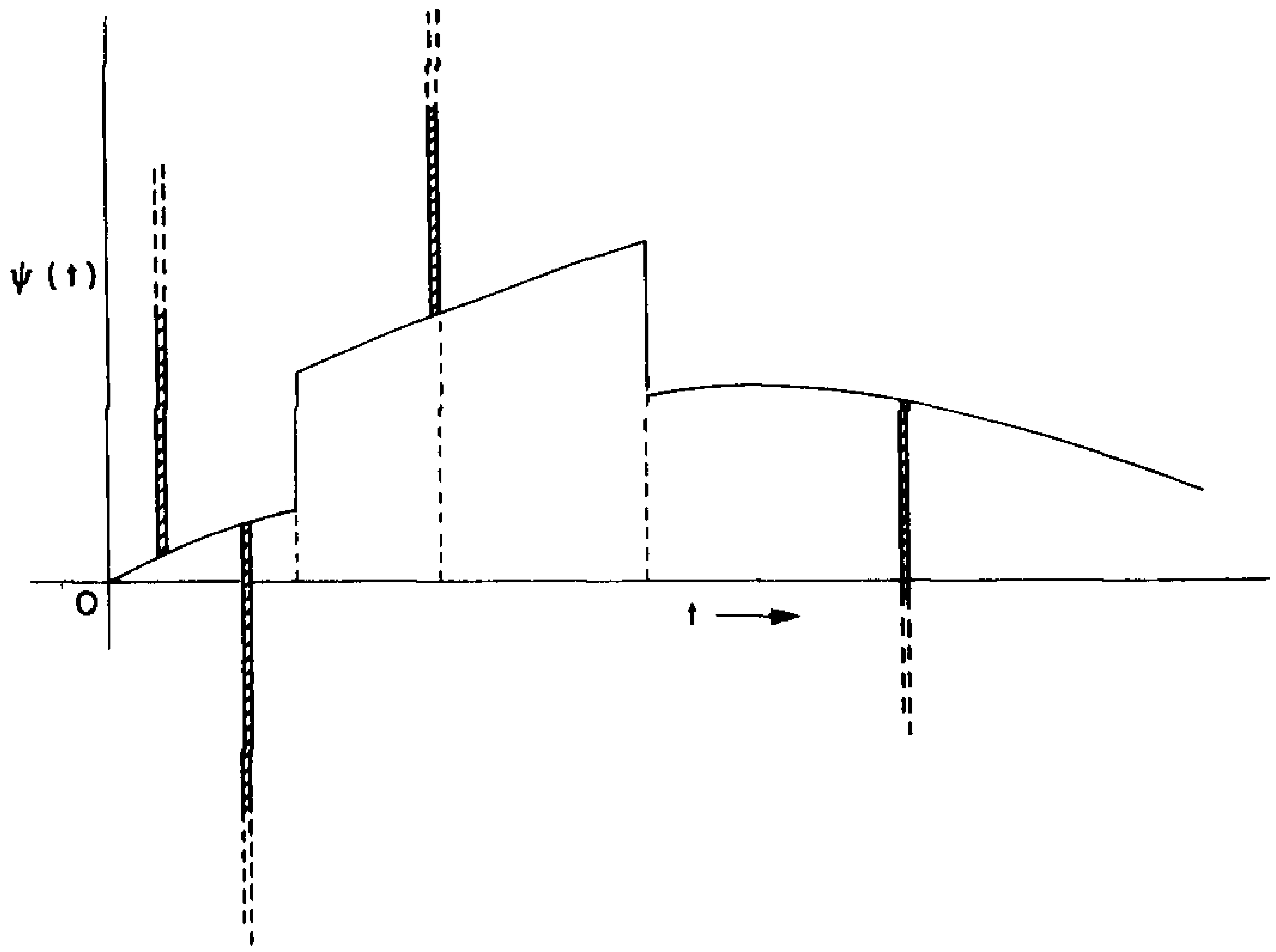


Fig. 1,(I-0.51)

La figura 1, (I-0.51) muestra un ejemplo de una función aceptable $\varphi(t)$ en la cual las singularidades son simplemente impulsos. Se ve con facilidad que la función de la figura 1, (I-0.51) se puede expresar como la suma de tres funciones componentes.

a. Una función $\varphi_1(t)$ continua para todos los valores de t en el intervalo $0 \leqslant t < \infty$.

b. Una función discontinua $\varphi_2(t)$, compuesta por escalones, ascendentes y descendentes en los puntos de discontinuidad de $\varphi(t)$.

† La condición iii implica que la función $\varphi(t)$ sea regionalmente de variación acotada. Esto es una consecuencia de un teorema elemental de las integrales de Stieltjes. En adelante se supondrá que el lector está familiarizado con los teoremas elementales de tales integrales.

c. Una función singular $\varphi_3(t)$ que es nula para casi todos los valores de t, $0 \leqslant t < \infty$, excepto en el conjunto de puntos donde $\varphi(t)$ tiene un carácter impulsivo.

0.52. En problemas generales de síntesis, se extiende la clase de funciones $\varphi(t)$ a cierta clase de funciones "aleatorias", las cuales son integrables en sentidos apropiados. En el presente artículo no se consideran estas clases, puesto que no se trata de transmisión en presencia de ruidos, etc.

0.60. ***Formulación del problema general y de transmisión.*** Una formulación adecuada del problema general de síntesis de sistemas lineales descrito en la sección 0.1, puede darse ahora en términos de los conceptos introducidos.

El problema se expresa ahora:

"Siendo dadas de antemano dos funciones $\varphi(t)$ y $\gamma(t)$ que satisfagan las condiciones prescritas en las secciones 0.5 y 0.51, pero de otra manera arbitrarias; además dados los dos conjuntos $[\epsilon_i]$ y $[a_k]$ ya descritos se pregunta: ¿Será posible construir un sistema lineal finito, pasivo y que tenga 2 pares de terminales externos, sistema tal que, actuado por una excitación de la forma $\varphi(t)$ aplicada a dos terminales, tenga una respuesta $\gamma^*(t)$, siendo $\gamma^*(t)$ un símil de $\gamma(t)$?.

El objeto de este artículo es dar soluciones al problema de transmisión, retardo y predicción lineal, (adelanto), de una señal $\varphi(t)$. La respuesta del sistema debe ser dada por los símiles:

$$\varphi^*(t)\,, \quad \varphi^*(t-t_o)\,; \quad \varphi^*(t+t_o) \qquad 0 \leqslant t_o \leqslant \text{const.}$$

respectivamente.

0.7. ***Situación clásica del problema de transmisión.***

La transmisión de una señal a través de un canal de comunicación, no es una cosa nueva ni en teoría ni en la construcción de los sistemas que la logran.

Es bien sabido teóricamente, que un sistema lineal cuya respuesta a un impulso unitario aplicado al tiempo $t = 0$ sea el mismo impulso aparecido al tiempo $t = 0$, tiene la propiedad de transmitir, sin distorsión o retraso, una señal de la forma $\varphi(t)$ aquí considerada.

Si la respuesta del sistema es un impulso unidad atrasado t_o unidades de tiempo, con respecto al impulso de excitación, entonces la respuesta de tal sistema a una función $\varphi(t)$ será de la forma $\varphi(t-t_o)$. La función transferente de un sistema que se transmite con retraso, pero sin distorsión, es simplemente e^{-sto} en el dominio de la frecuencia. Clásicamente el problema de transmisión se resuelve construyendo sistemas cuya función t transferente se aproxime de alguna manera a la función e^{-sto}. Nótese que en las soluciones anteriores, el kernel de la integral de convolución es simplemente una función singular y no una función continua, por lo que no se contradice con la sección 0.3.

0.71. Conviene ahora aclarar la situación del contenido de este artículo con relación a la situación clásica del problema de transmisión. En el proceso de la discusión siguiente se notarán los puntos relevantes siguientes:

1o. Demostrar que existen muchos kernels singulares, de hecho una infinidad, que permiten la transmisión sin retraso, atrasada o la predicción lineal. El kernel clásico representado por un sólo impulso, es un caso particular de los kernels aquí presentados.

2o. Se producen métodos que permiten pasar de los kernels singulares a kernels continuos, de manera que el carácter intrínseco de la transmisión no sea alterado siguiendo la postulación dada en la sección 0.6 .

3o. Los conceptos y resultados así obtenidos tienen una importancia básica en la fundación general de la teoría de la síntesis de sistemas lineales.

4o. Se describen los métodos básicos de la construcción de los sistemas de 4 terminales, que son potencialmente capaces de producir la transmisión de señales en sus aspectos de no retraso, retraso y adelanto.

5o. Las soluciones dadas en la predicción lineal son producidas mediante kernels de duración finita, y se establecen relaciones simples entre la duración del kernel y el tiempo de adelanto de la predicción.

6o. Como un subproducto, se producen kernels que extraen las derivadas sucesivas de una función $\varphi(t)$ continua.

I. KERNELS COMO DISTRIBUCION DE FUNCIONES DE VENTANA.

1.0. *Método de solución.*

La resultante de Stieltjes, o integral de convolución , es la herramienta básica usada en este artículo para atacar la solución del problema, expuesto ya en la sección 0.6 .

El método de solución consiste en resolver la ecuación integral, expresada por la integral de convolución, y determinar la función $S_c(t)$ que caracteriza analíticamente al sistema lineal buscado. La solución completa del problema de síntesis no termina en la determinación de $S_c(t)$. El siguiente paso es construir o sintetizar, al sistema propiamente dicho, poniendo en evidencia sus elementos, su *distribución*, y *sus valores. Este paso produce la red lineal que satisface las condiciones del problema.*

En la resolución de los dos aspectos anteriores, ocupan un lugar primario ciertas distribuciones de impulso sobre las cuales gravita la solución completa del problema. Para preparar el terreno de la solución del problema propuesto en la sección 0.6, y en particular, el problema de transmisión y asociados, conviene introducir y discutir las distribuciones mencionadas.

1.1. ***Funciones Ventana.*** Comenzaremos por dar algunas definiciones .

El término "pulso" será aquí usado en su connotación usual: La gráfica de una onda de corriente, o voltaje o sus equivalentes, cuando es casi unidireccional y de corta duración, se denomina un pulso.

Por un "tren de pulsos" se entiende una sucesión finita de pulsos consecutivos de duración finita. Las definiciones siguientes están inspiradas sobre los conceptos anteriores.

Definición.- Un pulso simétrico, en forma de punta de lanza, de duración finita a, y que es siempre positivo, o siempre negativo, se llama un pulso de forma de "ventana" . La función que representa este pulso , digamos $v(t)$, se llama función de ventana si, además de satisfacer las condiciones anteriores, tal función es integrable en el sentido de Stieltjes hacia un límite finito > 0, y determinado, aún cuando la duración del pulso tienda hacia cero. Como consecuencia de esta definición, una ventana se convierte necesariamente en un impulso cuando su duración tiende hacia cero. También, no todos los pulsos simétricos y de un solo sentido son necesariamente ventanas, si es que el área contenida por la gráfica del pulso tiende a cero cuando $a \to 0$.

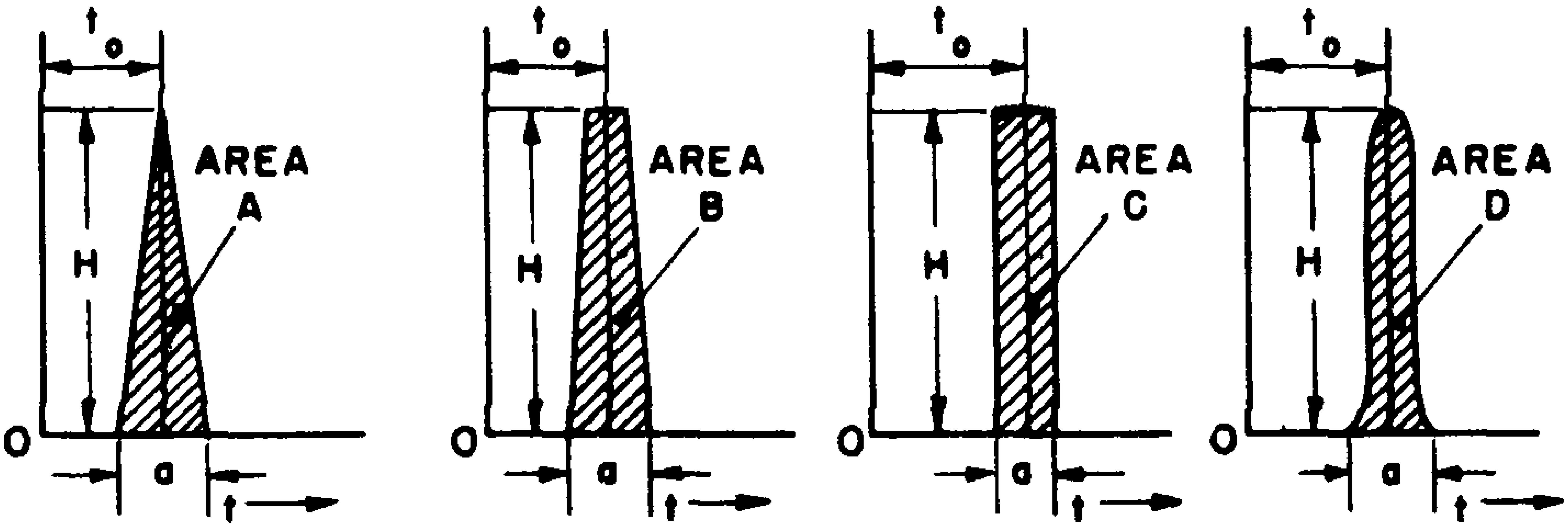


Fig. 1,(I - 1.1)

La figura 1, (I - 1.1) muestra varias formas posibles de ventanas desplazadas un tiempo t_o del origen.

En las discusiones que siguen, se notará que la forma específica de cada ventana no tiene una influencia mayor en los resultados fundamentales aquí obtenidos. La forma de la gráfica de una ventana tiene una influencia secundaria, modificando únicamente la estructura fina, pero no la arquitectura básica, de los resultados aquí obtenidos. En el curso de la discusión se demostrará que los elementos básicos de una función de ventana son su apertura, su desplazamiento del orígen y principalmente, la integral de dicha función.

1.2. ***Distribución de Ventanas.*** *Una entidad básica en esta investigación* son ciertas funciones de distribución formadas mediante funciones de ventana. Se dan las siguientes definiciones: "Una distribución en tiempo de un número finito de ventanas sucesivas no sobrepuestas, pero tampoco desconectadas, es llamado una "densidad de distribución de ventanas". La figura 1,(I - 1,2) muestra una tal densidad de distribución. Nótese que en este arreglo no es necesario que las ventanas sucesivas sean de signo contrario.

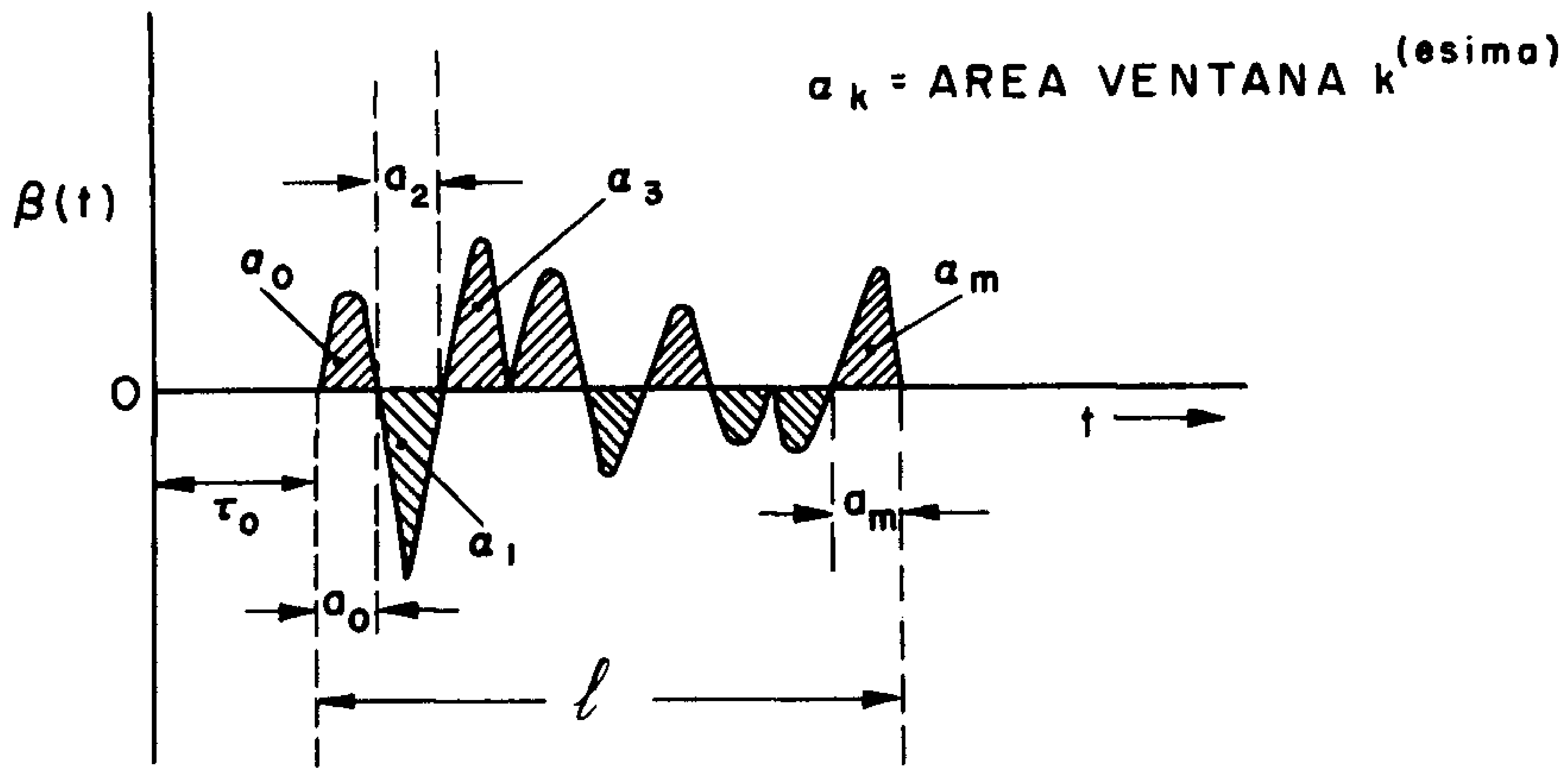


Fig. 1(I - 1.2)

La longitud del intervalo ocupado por el arreglo de ventanas:

$$l = \sum_{k=0}^{m} a_k$$

se llama la medida del soporte del arreglo.

El arreglo de ventanas permite introducir el concepto de la "función de distribución" asociadas con un arreglo específico. Puesto que cada ventana es, por definición, integrable en el sentido de Stieltjes, entonces existe igualmente la integral del arreglo de ventanas, cuando estas son en número finito. La integral de Stieltjes entre $t = \tau_0$ y $t = \tau_0 + l$ se llama la medida de la distribución. Cuando la distribución está formada por un número finito de ventanas de duración mayor que cero, y de altura finita, entonces este arreglo puede ser integrable en el sentido de Riemann. Se tiene entonces:

$$a(\tau_o, l) = \int_{\tau_o}^{\tau_o + l} \beta(t)\, dt$$

La transformación $\tau = t - \tau_o$ permite escribir:

$$\alpha(l) = \int_0^l \beta(\tau)\, d\tau$$

Tomemos ahora el valor de τ en el intervalo $0 < \tau < l$.

Se define entonces la función de distribución por la expresión:

$$\alpha(\tau) = \int_0^\tau \beta(\tau)\, d\tau$$

La generalización de esta expresión a las integrales de Stieltjes se representa mediante la bien conocida notación:

$$\alpha(\tau) = \int_0^\tau d\alpha\,(u)$$

siendo u una variable auxiliar que desaparece al substituir los límites.

El límite de una densidad de distribución de ventanas, cuando la apertura de éstas tiende hacia cero, es un arreglo de impulsos. Dos representaciones posibles están indicadas en la figura 2, (I - 1.2). En la primera hay un colapso hacia cero

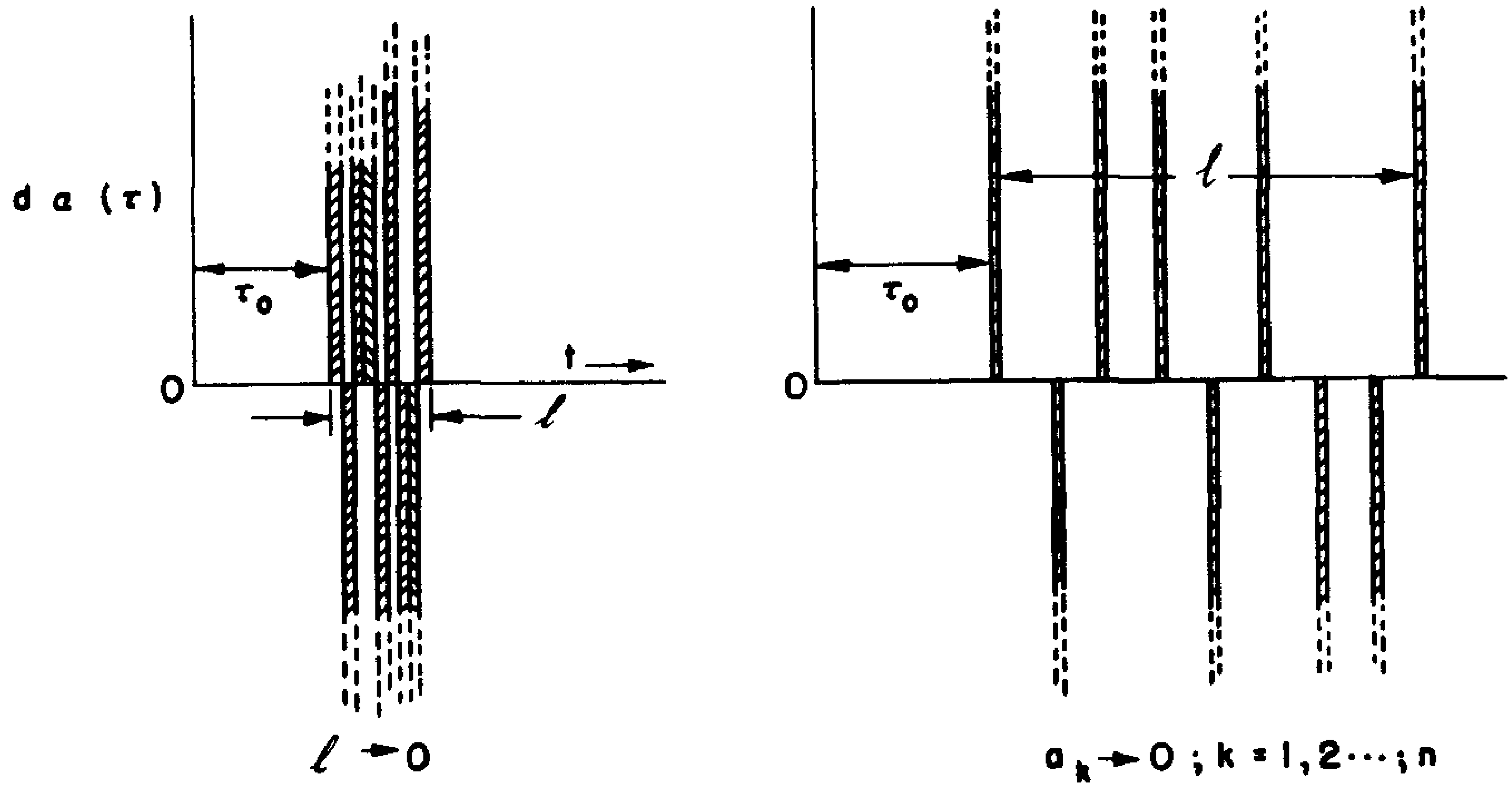


Fig. 2,(I - 1.2)

de la longitud l.

En la segunda figura la longitud l queda, por construcción, constante. En este último caso, la función de ventana se define como el impulso propiamente dicho y se le asigna el valor cero en ambos lados del impulso.

1.3. ***Distribución de duración infinita.*** Una distribución de ventanas puede tambien definirse como un arreglo de un número infinito de ventanas que cubren el intervalo $0 \leqslant t < \infty$. Distribuciones de este tipo aparecen en la solución de muchos problemas de síntesis de sistemas lineales. Para los fines perseguidos en este artículo, estas distribuciones infinitas tienen muy poco significado. Por este motivo, no se consideran aquí con detalle. Solamente se hará referencia a ellas en algunos procesos de límite.

1.4. ***Funciones del sistema en el dominio del tiempo y arreglos de ventanas.***

En este trabajo se considera a una función de sistema $S_c(t)$ de una red de cuatro terminales como equivalente a un arreglo de ventanas. Ventanas de duración finita son las que ocuparán nuestro interés principal.

La función de sistema de una red lineal de cuatro terminales es, como ya se indicó, la respuesta de tal sistema al impulso unidad. En general, esta respuesta no es de carácter impulsivo. Solamente en casos ideales, no realizables físicamente, la respuesta de un sistema de transmisión a un impulso lo es también por un sistema de transmisión finito, va acompañada siempre por una dispersión o "apertura" del impulso, pudiendo aparecer también oscilaciones que pueden ser pequeñas o despreciables, si el sistema de transmisión está apropiadamente diseñado. En este artículo se demuestra que sistemas que convierten un impulso en una serie de fuertes oscilaciones, también son capaces de transmitir con características superiores a aquellas en que el impulso se transmite con poca dispersión. Por supuesto, esta afirmación se refiere a sistemas finitos pasivos.

La figura 1, (I-1.4) muestra como ilustración, un ejemplo de respuesta de un sistema lineal finito. Cada oscilación se hace equivalente a una función de ventana, y la oscilación completa a un arreglo de ventanas. En un sistema finito de elementos concentrados, aparecen "colas" después de las oscilaciones principales.

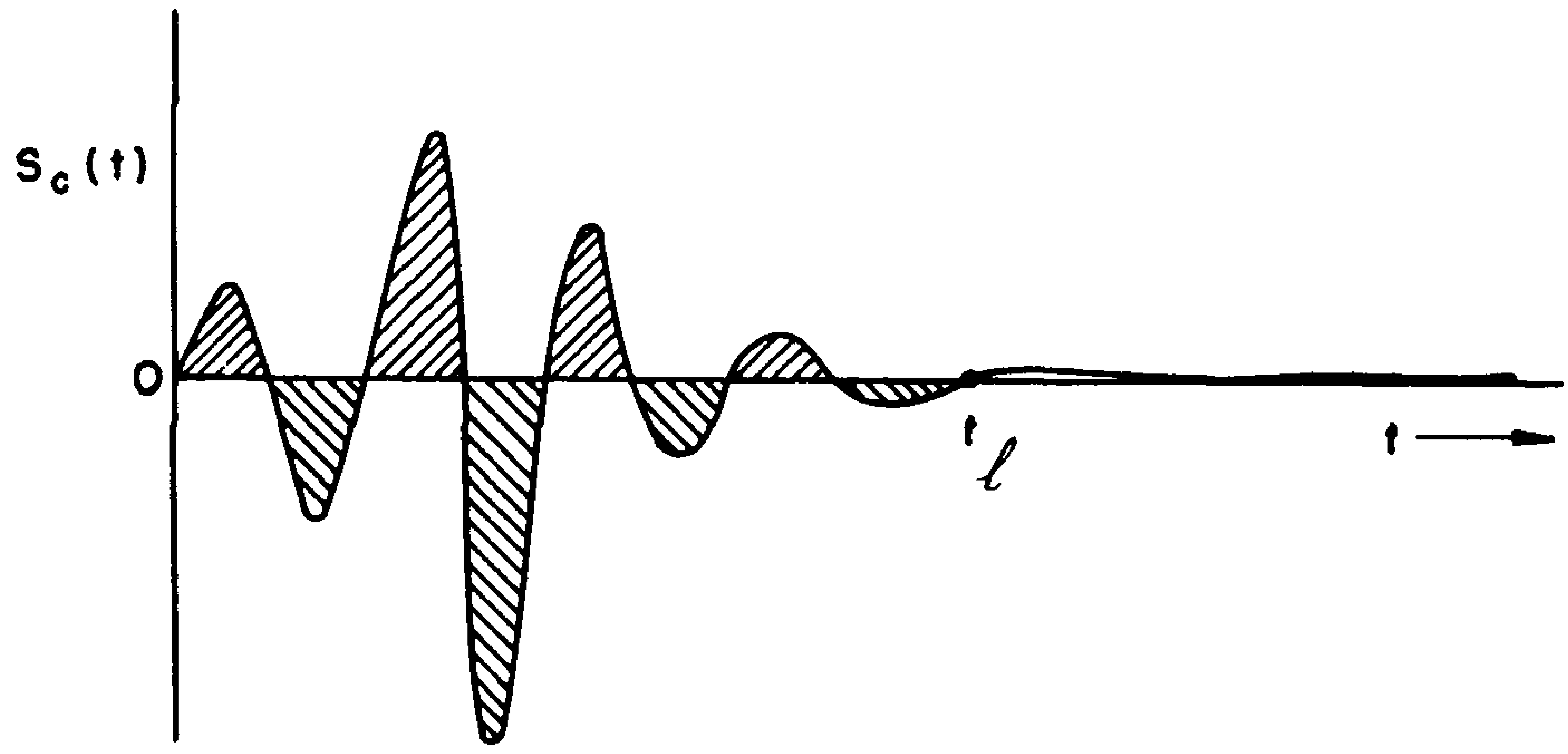


Fig. 1,(I - 1.4)

En este artículo las colas tienen un efecto secundario, y pueden ser ignoradas. Así es que la función $S_c(t)$ indicada en la figura 1,(I - 1.4) puede aproximarse por un arreglo de ventanas de duración t_c.

1.5. *Síntesis de un sistema lineal cuya respuesta* $S_c(t)$ *es una función de ventana de duración finita prescrita.*

Se producirá un método de síntesis de un sistema lineal finito, cuya respuesta al impulso unidad sea una función de ventana de duración finita. Se dará un método de síntesis muy simple y efectivo usando tubos electrónicos. Los aparatos necesarios y los conceptos requeridos son conocidos y simples.

La síntesis de tal sistema usando elementos pasivos, sin tubos electrónicos, puede hacerse, pero su diseño es complicado y no se puede dar en el espacio destinado a este artículo. Una discusión detallada sobre este aspecto de síntesis se encuentra en la referencia No. 1*.

1.41. Los elementos básicos de síntesis usados aquí son:

Una linea artificial de transmisión finita, amplificadoras lineales, e inversor de fase.

1* M.V. Cerrillo y E. F. Bolinder, "On basic Existence Theorems in Network Synthesis. N. Transmission of Impulses", Technical Report No. 246 (Agosto 1952), Research Lab. of Electronics, M.I.T., Cambridge, Mass., U.S.A.

El arreglo fundamental de los aparatos y la operación básica del sistema, están ilustrados en la figura 1,(I - 1.41).

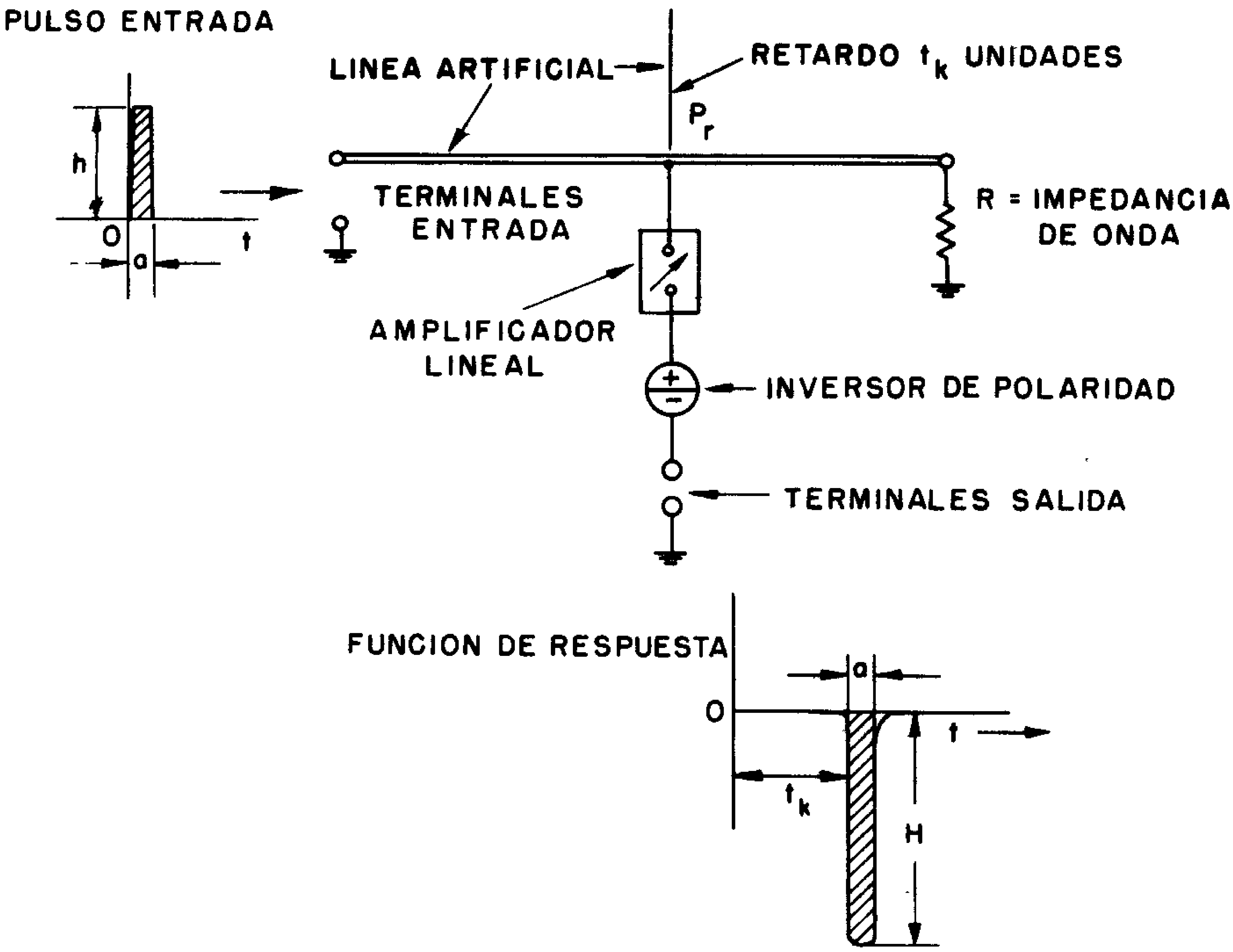


Fig. 1,(I - 1.41)

La línea artificial de transmisión está terminada en su impedancia natural para evitar reflejos. La línea está compuesta por un número N de secciones iguales conectadas en cascadas, produciendo cada una un retraso de t_r unidades. Una toma en la sección k-ésima producirá el retraso $t_k = k t_r$ unidades. El retraso máximo será $t_{max} = N t_r$. Además, la línea artificial está diseñada para transmitir un pulso de duración $t = a$ con despreciable dispersión y "campaneo" (oscilaciones laterales al pulso transmitido).

Se hace una derivación en la sección k-ésima, de donde se alimenta un amplificador lineal de ganancia variable g_n. La impedancia de entrada del amplificador es prácticamente infinita para que no se produzcan reflejos apreciables por su inserción.

Las terminales de salida del amplificador están conectadas a un dispositivo, dentro del amplificador mismo, que permite invertir la polaridad de la señal recibida.

Datos de diseño, construcción, operación etc, de este sistema se pueden encontrar en la referencia 2*.

La operación del sistema indicado es la siguiente. Supongamos que se quiere sintetizar un sistema cuya respuesta sea una ventana de amplitud H, por ejemplo, de apertura a y atrasada t_n unidades. Bastará excitar el sistema de las terminales de entrada con un pulso de duración a, altura h, positivo. Se toma una derivación de la línea artificial en las terminales de la k-ésima sección, y se inserta el amplificador. Se aumenta la ganancia del amplificador hasta tener un pulso de altura H, y se pone el inversor en la posición negativa. En las terminales de salida se tendrá la respuesta deseada.

Para formar el sistema cuya respuesta al impulso unidad fuera un arreglo de ventanas prescrito, bastará repetir el esquema de amplificadores e inversores conectándolos a las puntas de la línea de retraso en los puntos adecuados, para obtener el retraso respectivo de cada ventana. Es claro que la apertura del pulso de excitación debe ser menor o igual al tiempo t_r de retardo de cada sección de la

2* C.A. Stutt, "Experimental Study of Optimum Filters", Technical Report No. 182 (Mayo 1951), Research Lab. of Electronics, M.I.T.

línea artificial. El funcionamiento del sistema es bien obvio, y no se darán mayores detalles. La figura 2,(I - 1,41) muestra el esquema general de un tal sistema.

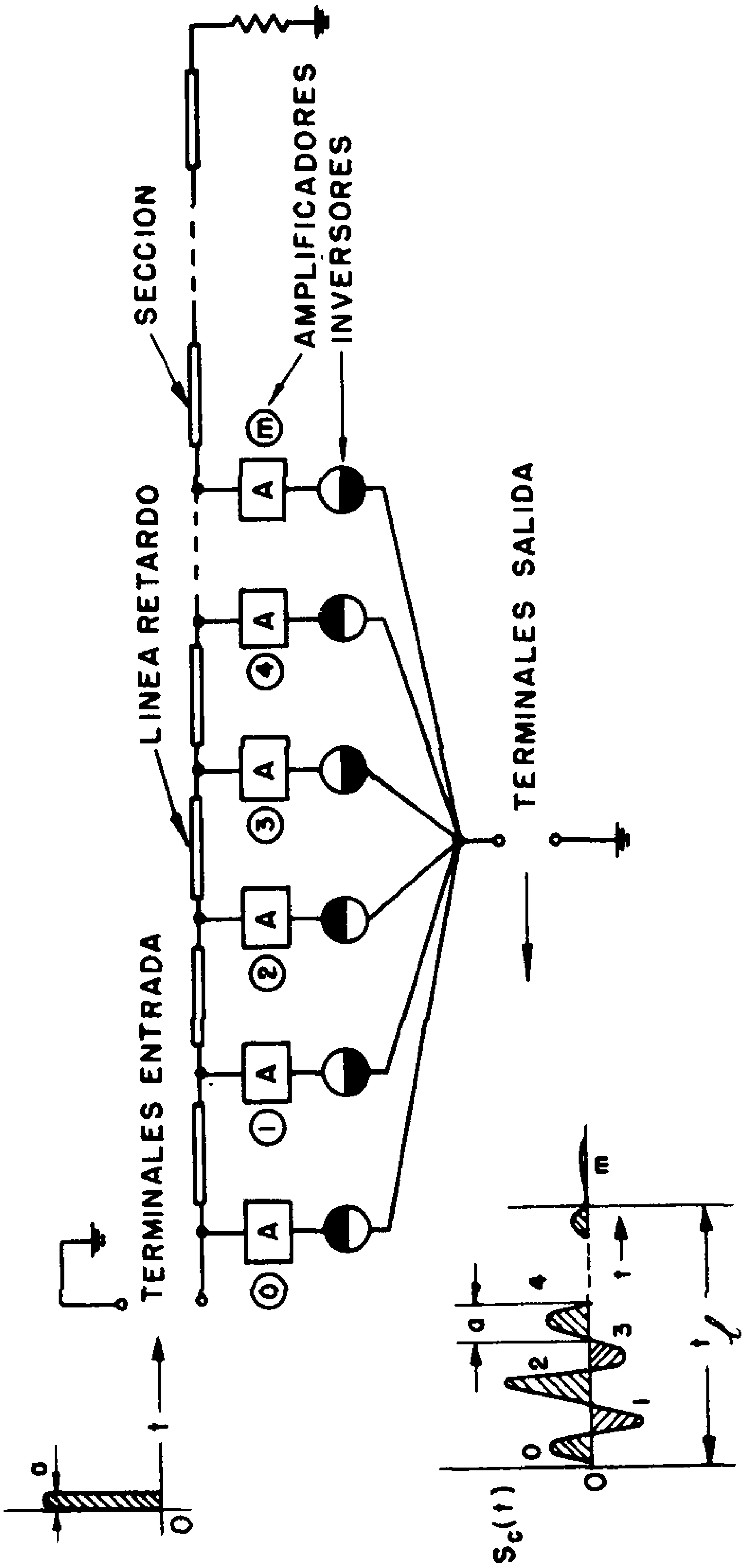


Fig. 2,(I - 1,41)

El sistema indicado en la figura 2,(I - 1.41) está diseñado para formar un arreglo de ventanas de igual apertura. Mediante una selección de la apertura del pulso de excitación, y apropiada selección de las tomas en la línea de retardo, se pueden producir fácilmente arreglos de ventanas de apertura variable.

II. SOLUCION FORMAL EN TERMINOS DE FUNCIONES SINGULARES.

2.0. ***Procedimiento a seguir:*** Nos proponemos resolver la ecuación integral, dada por la integral de convolución, usando funciones singulares para la función $S_c(t)$. Es decir, $S_c(t)$ será obtenida como un arreglo de ventanas.

Hay varias maneras de producir este tipo de solución. El método aquí empleado ha sido elegido para facilitar la solución de los problemas de transmisión pura, atrasada y adelantada, objeto de este artículo. La formulación del problema general de síntesis, tal como se estipuló en la sección 0.6, permite usar distribuciones de ventanas de duración finita, como se demostrará en la discusión de este capítulo. La solución en términos de distribuciones de duración finita, tiene un significado importantísimo en la teoría de la predicción desarrollada sobre el problema de transmisión adelantada.

2.01. Aqui nos ocuparemos de 2 métodos de solución. El primero conduce a un sistema lineal de ecuaciones, que al resolverse produce la solución del problema. El segundo utiliza la teoría del momento en un intervalo finito. En rigor, los dos métodos son equivalentes, pero las formas de cada una de estas soluciones se adaptan mejor a resolver problemas específicos.

2.1. ***Primer método. Caso de excitación representada por una función de la clase c_o.***

Consideraremos primero el caso de que la función de excitación sea una función continua. Esto no constituye una limitación en la generalidad, puesto que se vió en la sección 0.51, que las funciones aceptables contienen, o pueden contener, una componente de la clase c_o. Después se estudiará el efecto de la componente escalonada y de componente impulsiva. La solución para la componente continua tiene, además, importancia tanto teórica como práctica.

La integral de convolución puede escribirse:

$$\gamma(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)\ d\alpha\ (\tau) \qquad 1,(II-2.1)$$

siendo $\alpha(\tau)$ la función de distribución asociada a la densidad de distribución $S_c(t)$, aquí supuesta singular.

Consideremos un arreglo de ventanas de duración[†] finita.

La notación que emplearemos está indicada en la figura 1,(II-2.1). Los impulsos están distanciados δ unidades de tiempo entre sí. En un sistema lineal finito estos impulsos presentan dispersión. Supondremos que la apertura a del pulso dispersado es igual a δ.

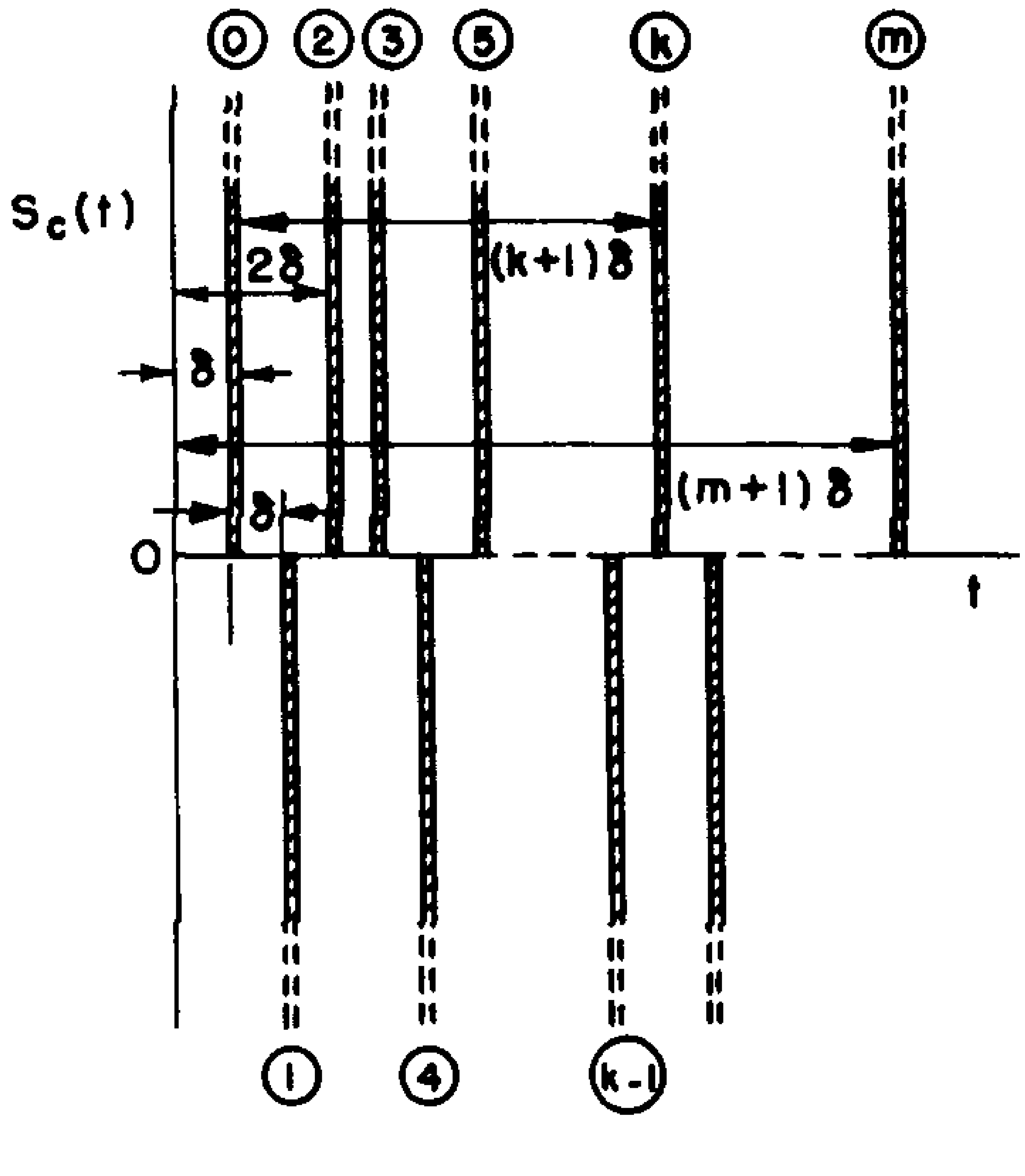


Fig. 1, (II-2.1)

† En la teoría de la predicción lineal, esta distribución se dice que es de "vida" finita. La razón de esta denominación se verá después.

Llamemos a_k la medida en el sentido de Stieltjes del impulso k-ésimo. La integral de Stieltjes 1,(II-2.1) es inmediata y su valor es:

$$\gamma(t) = \sum_{k=o}^{m} \alpha_k \ \varphi [t-(k+1) \ \delta]; \ t \geq t_1; \qquad 2,(II-2.1)$$

t_c = vida de la distribución.

Se ve que la respuesta del sistema al tiempo t es una combinación lineal con coeficientes α_k, $k = 0, \ldots, m$ de los valores de la función de excitación comprendidos entre el tiempo t y el tiempo $t - t_1$, siendo t_1 la vida de la distribución de ventanas. Conviene interpretar la ecuación 2,(II-2.1) como el resultado de un muestreo con pesos α_k de la función de excitación comprendida entre el tiempo t y $t - t_1$.

2.11. Sea t_1 la vida de la densidad de distribución que representa a la función $S_c(t)$. Consideremos ahora que la función de excitación $\varphi(t)$ es regionalmente de la clase C_m en un intervalo t_1. Esta condición se obtiene prácticamente en una infinitud de formas de excitación actual. La discusión de la situación correspondiente a los puntos excepcionales, se hará al final de este capítulo. Bajo la suposición anterior, la función de excitación puede expanderse:

$$\varphi[t-(k+1)\delta] = \varphi(t) - (k+1)\delta\varphi'(t) + \ldots + (-1)^m \frac{(k+1)^m}{m!} \delta^m \varphi^{(m)}(t) + \\ + \theta_{m+1}(t) \qquad 1,(II-2.11)$$

Siendo $\theta_{m+1}(t)$ el residuo correspondiente.

Substituyendo la expresión 1, (II-2.11) y arreglando términos se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(t) &= \sum_{p=o}^{n} \frac{y_p}{p!} \varphi^{(p)}(t) + \theta_{m+1}(t) \\ y_p &= (-1)^p \sum_{k=1}^{m} \mu_k^p \ \alpha_k \ ; \ \mu_k = (1+k)\,\delta \end{aligned}\right\} \qquad 2,(II-2.11)$$

Finalmente introduzcamos la notación:

$$\gamma^{*}(t) = \sum_{p=0}^{m} \frac{y_p}{p!} \varphi^{(p)}(t) \qquad 3,(II-2.11)$$

como la función asociada a $\gamma(t)$. Es claro que $\gamma^{*}(t)$ es un símil de $\gamma(t)$ cuando el residuo $\theta_{m+1}(t)$ es pequeño.

2.2. ***Solución del sistema para*** α_k, $k = 0, ..., n$.

La relación 3, (II-2.11) *nos indica* que la función $\gamma^{*}(t)$ es una combinación lineal con coeficientes constantes y_p de la función $\varphi(t)$ y sus m primeras derivadas. Se ve que la función $\gamma^{*}(t)$ conserva la clase de la función $\varphi(t)$.

Por la naturaleza del problema de síntesis que estamos considerando, las funciones $\gamma^{*}(t)$ así como $\varphi(t)$ y por consiguiente sus derivados son conocidos. Entonces las $m+1$ constantes $y_0, y_1, ..., y_n$ deben determinarse de manera que la expresión 3, (II-2.11) quede satisfecha.

La introducción del conjunto de tolerancias $t[\epsilon_i]$ sección 0.40, proporciona cierta libertad en la elección de la función $\gamma^{*}(t)$. Por ejemplo, se puede elegir una función $\gamma^{*}(t)$ que tenga cerradura en términos de las funciones de excitación. En estas condiciones la determinación de las constantes y_p se hace fácilmente mediante la introducción de un conjunto de funciones ortogonales.

En este artículo, nuestro interés principal es en conexión con el problema de *transmisión* y otros problemas *asociados donde la determinación de las constantes* y_p, $p = 0, 1, ..., m$ es inmediata. Por ejemplo, el problema de transmisión pura se obtiene haciendo simplemente:

$$y_0 = 1 \,;\, y_1 = y_2 = ... = y_m \equiv 0$$

como puede comprobarse sustituyendo estos valores en la expresión 3, (II-2.11), resultando:

$$\gamma^{*}(t) = \varphi(t)$$

En los problemas de síntesis tratados en este artículo, y las y_p se calculan fácilmente. Su determinación precisa se hará en cada caso particular. Lo importante por ahora es calcular las medidas α_0, α_1, ... α_m que están asociadas y definen a la función $S_c(t)$, la cual determina el sistema lineal buscado.

Por consiguiente, se calcularán los constantes α_0, α_1, α_m en función de las y_p. Consideramos el sistema de $m+1$ ecuaciones,

$$y_p = (-1)^p \sum_{k=1}^{m} \mu_k^p \alpha_k \; ; \; p = 0, 1, \ldots, m \qquad 1,(II-2.2)$$

que contiene $m+1$ incógnitas α_0, α_1, ... y α_m. Para simplicar la notación pondremos:

$$z_p = (-1)^p \; y_p \; ; \; p = 0, 1, 2, \ldots, m \qquad 2,(II-2.2)$$

2.21. El determinante del sistema es el bien conocido determinante de Van der Monde. Este determinante no es cero cuando los elementos μ_0, μ_1, μ_2, ... , μ_m son diferentes entre sí. Este es nuestro caso puesto que:

$$\mu_k = (1+k)\,\delta$$

Luego, siempre tiene solución el sistema inhomogéneo 2,(II-2.2). Esto establece la existencia de solución de los problemas de síntesis considerados en este artículo.

2.22. Conviene introducir ciertas funciones simétricas que simplifican la solución del sistema 2,(II-2.2).

Asociadas a la incógnita α_i se introducirán el conjunto de $m+1$ funciones simétricas que se construyen como sigue:

$$S_m^{(i)} = 1$$

$$S_{m-1}^{(i)} = -(\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{i-1} + \mu_{i+1} + \ldots + \mu_m)$$

$$S_{m-2}^{(i)} = (-1)^2 (\mu_0\mu_1 + \mu_0\mu_2 + \ldots + \mu_0\mu_{i-1} + \mu_0\mu_{i+1} + \ldots + \mu_0\mu_m + \ldots + \mu_{m-1}\mu_m)$$

$$S^{(i)}_{m-3} = (-1)^3 (\mu_0 \mu_1 \mu_2 + \mu_0\mu_1\mu_3 + \dots + \mu_0\mu_1\mu_{i-1} + \mu_0\mu_1\mu_{i+1} + \dots + \mu_{m-2}\mu_{m-1}\mu_m)$$

$$S^{(i)}_0 = (-1)^m \mu_0\mu_1\mu_2 \dots \mu_{i-1}\mu_{i+1} \dots \mu_m$$

Nótese que el coeficiente μ_i no entra en la formación de las funciones simétricas asociadas a la incógnita α_i. Estas funciones simétricas tienen la misma estructura que rige a la expresión de los coeficientes de una ecuación de grado m cuyas m raices son:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m$$

De hecho el polinomio.

$$G_{(i)}\,\mu = \mu^m + S^{(i)}_{m-1}\,\mu^{m-1} + S^{(i)}_{m-2}\,\mu^{m-2} + \dots + S^{(i)}_1\,\mu + S^{(i)}_0 \qquad 1,(\text{II-2.22})$$

admite como raices los valores μ_k ; $k = 0, 1, \dots i-1, i+1, m$

Pero μ_i no es una raíz, es decir:

$$G_{(i)}(\mu_i) \neq 0$$

La solución del sistema de ecuaciones queda dada por la fórmula: (Referencias [1] , [3])

$$\alpha_i = \frac{y_0 S^{(i)}_0 - y_1 S^{(i)}_1 + y_2 S^{(i)}_2 - \dots (-1)^m\, y_m S^{(i)}_m}{(\mu_i - \mu_0)(\mu_i - \mu_1)\dots(\mu_i - \mu_{i-1})(\mu_i - \mu_{i+1})\dots(\mu_i - \mu_m)} =$$

$$= \frac{\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p\, y_p\, S^{(i)}_p}{\prod_{p=0}^{p=m}{}' (\mu_i - \mu_p)} \; ; \; i = 0, 1, \dots, m; \qquad 2,(\text{II-2.22})$$

El acento en el producto $\prod_{p=0}^{p=m}{}'$ indica que el producto $\mu_i - \mu_i$ está omitido.

2.3. ***Aplicación al caso de la transmisión pura.*** La condición de transmisión pura está dada por la condición;

$$\gamma^{*}(t) = \varphi(t)$$

lo que implica, en virtud de la expresión 3,(II-2.11):

$$y_o = 1; \; y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$$

Luego, las medidas $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ de una distribución de ventanas correspondientes a una transmisión pura, están dados por la fórmula:

$$\alpha_i = \frac{S_o^{(i)}}{\prod\limits_{p=1}^{p=m} (\mu_i - \mu_p)} =$$

$$= \frac{(-1)^m \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_m}{\prod\limits_{p=0}^{p=m}{}' (\mu_i - \mu_p)} \qquad 1,(\text{II}-2.3)$$

Un estudio detallado de los arreglos de ventanas asociadas a estas medidas $\alpha_o, \dots, \alpha_m$ se tratará en el capítulo posterior correspondiente a la transmisión pura.

2.4. ***Aplicación al caso de transmisión retrasada.***

Esta transmisión está dada por la condición:

$$\gamma(t) = \varphi(t - T_o) \; ; \; 0 < T_o = \text{const} < \infty. \qquad 1,(\text{II}-2.4)$$

donde T_o es el tiempo de retraso.

Usando la suposición de que $\varphi(t)$ es regionalmente cuando menos de la clase C_m se tiene:

$$\gamma(t) = \varphi(t) - \frac{T_o}{1!} \varphi'(t) + \frac{T_o^2}{2!} \varphi''(t) - \dots + (-1)^m \frac{\Gamma_o^m}{m!} \varphi''(t) + \theta_{m+1}(t)$$

Tenemos aquí la función símil:

$$\gamma^{*}(t) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{T_o^k}{k!} \varphi^{(k)}(t) \qquad 2,(\text{II}-2.41)$$

Comparando esta expresión con la 3,(II-2.11) se obtienen de inmediato los valores de $y_0, y_1, \dots, y_m$. Su expresión es:

$$y_p = (-1)^p T_o^p \qquad 3,(II\text{-}2.4)$$

Substituyendo esta expresión en fórmula 2,(II-2.22) se obtienen las medidas de las ventanas asociadas a la distribución correspondiente a transmisión atrasada:

$$a_i = \frac{T_o^m + T_o^{m-1} S_{m-1}^{(i)} + T_o^{m-2} S_{m-2}^{(i)} + \dots + T_o S_1^{(i)} + S_o^{(i)}}{(\mu_i - \mu_o)(\mu_i - \mu_1)\dots(\mu_i - \mu_{i-1})(\mu_i - \mu_{i+1})\cdots(\mu_i - \mu_m)} =$$

$$= \frac{G(T_o)}{\prod_{p=0}^{m\,\prime} (\mu_i - \mu_p)} = \frac{\prod_{p=o}^{m\,\prime} (T_o - \mu_p)}{\prod_{p=0}^{m\,\prime} (\mu_i - \mu_p)} \; : \qquad 4,(II\text{-}2.4)$$

Un estudio detallado del arreglo de ventanas asociadas a estas medidas $a_o, \dots, a_m$ se tratará en el capítulo posterior correspondiente a la transmisión atrasada.

2.5 ***Aplicación a la transmisión adelantada. Predicción lineal.***

Esta transmisión está caracterizada por la condición:

$$\gamma(t) = \varphi(t + T_o) \; ; \; 0 < T_o = \text{const} < \infty ; \qquad 1,(II\text{-}2.5)$$

mediante una expresión de Taylor se obtiene:

$$\gamma^*(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{T_o^k}{k!} \varphi^{(k)}(t) \quad : \qquad 2,(II\text{-}2.5)$$

de aquí se llega a:

$$y_p = T_o^p \qquad 3,(II\text{-}2.5)$$

Las medidas de las ventanas resultan ahora:

$$a_i = \frac{G(-T_o)}{\prod_{p=0}^{m\,\prime} (\mu_i - \mu_p)} = (-1)^m \frac{\prod_{p=0}^{m} (T_o + \mu_p)}{\prod_{p=0}^{m\,\prime} (\mu_i - \mu_p)} \qquad 4,(II\text{-}2.5)$$

Conviene aquí aclarar que la expresión 1,(II-2.5) es válida solamente para $t > t_1$, t_1 = vida del kernel, puesto que las relaciones 2,(II-2.1) son válidas para $t > t_1$. Lo que ocurre para valores de $0 \leqslant t < t_1$ se discutirá en el capítulo siguiente.

Un estudio detallado del problema de predicción lineal, y la forma de la función de sistema $S_c(t)$ asociada con esta predicción, se encuentra en un capítulo posterior de este artículo.

2.6. ***Un problema lateral. Circuitos cuya respuesta es la j-ésima derivada de la función de excitación.***

Las ecuaciones 2,(II-2.11) y 2,(II-2.22) permiten determinar inmediatamente las medidas de la distribución de ventanas asociadas a la función de sistema $S_c(t)$, cuya respuesta es una determinada derivada, digamos la j-ésima ; $0 < j \leqslant m$, de la función de excitación.

En la expresión 3,(II-2.11) hagamos:

$$y_p = \begin{cases} = 0 & p = 0, 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m \\ = p! & p = k \end{cases} \qquad 1,(II\text{-}2.6)$$

se tendrá:

$$\gamma^*(t) = \varphi^{(p)}(t)$$

Las medidas de las ventanas serán ahora:

$$\alpha_i = \frac{(-1)^k\, y_k\, S_k^{(j)}}{\prod\limits_{p=0}^{m}{}' (\mu_i - \mu_p)} \qquad 2,(II\text{-}2.6)$$

Un estudio detallado de la distribución correspondiente a esta medida se dará en un capítulo posterior.

2.7. ***Evaluación del error cometido usando la función símil $\gamma^*(t)$.***

El error cometido al reemplazar la función exacta de la respuesta $\gamma(t)$

por una función símil $\gamma^*(t)$, está dado evidentemente por la expresión:

$$\xi_{(m)} = \gamma(t) - \gamma^*(t) \qquad 1,(II-2.7)$$

De acuerdo con un conocido teorema del residuo en la serie de Taylor se puede escribir:

$$\theta_{m+1}(t) = \frac{\tau^{m+1}}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(t+\eta\tau) \qquad 2,(II-2.7)$$

en la que $0 < \eta < 1$.

De consiguiente, la expresión del error está dado por:

$$\xi_{(m)} = \frac{1}{(m+1)!}\int_0^t \varphi^{(m+1)}(t+\eta\tau)\,\tau^{m+1}\,d\alpha(\tau) \qquad 3,(II-2.7)$$

El valor absoluto es:

$$\left|\xi_{(m)}\right| \leqslant \frac{1}{(m+1)!}\int_0^t \left|\varphi^{(m+1)}(t+\kappa\tau)\right| \tau^{m+1} \left| d\alpha(\tau)\right. \qquad 4,(II-2.7)$$

La evaluación de estas integrales dependen de manera muy especial, del comportamiento de la derivada $m+1$ de la función de excitación.

La función $\varphi(t)$ se ha puesto como regionalmente de la clase C_m. La función $\varphi^{(m+1)}$ puede no estar definida sobre un conjunto denumerable de puntos aislados en el intervalo $0 \leqslant t < \infty$, ó solo en un conjunto numerable de subintervalos de medida no cero, o sobre todo el intervalo $0 \leqslant t < \infty$. Las funciones de excitación que representan situaciones físicas, no presentan el comportamiento peculiar antes mencionadó.

En un problema práctico, lo que importa son dos cosas:

1o. Las posibles discontinuidades simples con salto finito que presenta la $(m+1)$ derivada de $\varphi(t)$ sobre un cònjunto de puntos de medidas cero.

2o. La rapidez de variación de la derivada, con respecto a la duración δ de una ventana de la función $S_c(t)$.

En la estimación del error se introduce el módulo de oscilación de la m derivada en un intervalo de muestra δ. Los dos casos de importancia práctica mencionados quedan involucrados usando ese módulo de oscilación.

Una expresión simple del error cometido se puede evaluar fácilmente cuando la variación de $\varphi^{(m+1)}(t)$ es pequeña en un intervalo correspondiente a la vida del kernel $t_1 = (m+1)\,\delta$. Entonces $\varphi^{(m+1)}(t-\kappa\tau)$ puede considerarse como una constante. Sea $\varphi^{(m+1)}_{max}(t)$. El valor máximo que toma la $(m+1)$ derivado en la vecindad $\eta\,(m+1)\,\delta < (m+1)\,\delta$ del punto t. Entonces, la expresión 3,(II-2.7) se puede aproximar como:

$$\xi_{(m)} \approx \frac{\varphi^{(m+1)}_{máx}(t)}{(m+1)!} \sum_{p=0}^{m} \int_{p}^{p+1} (p+1)^{m+1}\, \delta^{m+1}\, d\alpha(t) \approx$$

$$\approx \frac{\varphi^{(m+1)}_{máx}(t)}{(m+1)!}\, \delta^{m+1} \sum_{p=0}^{m} (p+1)^{m+1}\, \alpha_p$$

Sea ahora $\Omega^{(m)}(\delta)$ el módulo de oscilación de la m derivada en el intervalo δ. Recordando que:

$$\Omega^{(m)}(\delta) \geqslant \delta f^{m+1}(\delta)$$

y puesto que $f^{m+1}(\delta)$ varía poco en el intervalo $t-t_1$ a $t+t_1$, se puede escribir:

$$\xi_{(m)} \approx \frac{\Omega^{(m)}(\delta)}{(m+1)!} = \delta^{m} \sum_{p=0}^{m} (p+1)^{m+1}\, \alpha_p \qquad 5,(II\text{-}2.7)$$

Cuando la derivada $\varphi^{(m+1)}_{máx}(t)$ oscila rápidamente en la vida del kernel la fórmula 5,(II-2.7) no puede ser usada. La evaluación de la integral 3,(II-2.7) se hará después, cuando se estudie la solución del problema de transmisión por el método del momento en el intervalo finito.

La fórmula 5,(II-2,7) puede, sin embargo, tener una generalidad mayor de la que uno concibe a primera vista. La razón es simple: Nada se ha dicho sobre el valor t_1 de la vida del kernel. Es claro que si se toma t_1 más y más pequeño, se llegará a un valor de t_1 suficientemente chico para que en ese intervalo la oscilación de $\varphi^{(m)}(t)$ sea tan pequeña como se quiera, cuando t se encuentra dentro de una de las regiones de continuidad de $\varphi^{(m)}(t)$. Esto es una consecuencia de la hipótesis de continuidad regional de $\varphi^{(m)}(t)$.

2.71. Dos conclusiones importantes se desprenden de la expresión.

1o. Para una distribución de ventanas de vida suficientemente pequeña el error regional cometido en el proceso de síntesis descrito es proporcional a la oscilación de la m-ésima derivada de la excitación.

2o. En las regiones de continuidad de $\varphi^{(m)}(t)$ el error cometido disminuye al disminuir la vida de la distribución de ventanas.

2.8. ***Conexión entre el conjunto de tolerancias*** $[\epsilon_i]$ ***y el error*** $\xi_{(m)}$.

Se tienen ya los primeros elementos que permiten establecer relaciones entre los elementos del conjunto de tolerancias $[\epsilon_i]$ y el error $\xi_{(m)}$.

Consideremos el intervalo $0 < t < \infty$. Omiteremos los conjuntos de medida cero siguientes:

a. El conjunto numerable de puntos aislados donde la función $\varphi(t)$ presenta, aquí considerada en su forma general, un comportamiento impulsivo.

b. El conjunto similar de puntos donde la función $\varphi(t)$ presenta discontinuidades simples.

c. El conjunto de puntos, aquí supuestos aislados y numerables, donde la función $\varphi(t)$ y donde la derivada $\varphi^{(p)}(t)$, $p = 1, \dots, m$ presentan una discontinuidad.

La función $\varphi(t)$ es de clase C_m en el conjunto numerable de subintervalos abiertos que forman el complemento de los conjuntos indicados en a, b y c. Por construcción, sabemos que al k-ésimo intervalo corresponde una tolerancia ϵ_K. Designemos por $\Omega_k^{(m)}(\delta)$ el módulo de oscilación de la función $\varphi^{(m)}(t)$ el k-ésimo subintervalo.

Entonces a este subintervalo asociemos el error dado por la expresión:

$$\xi_{(m),k} = \frac{\Omega_k^{(m)}(\delta)}{(m+1)!}\,\delta^m \sum_{p=0}^{p=m} (p+1)^{m+1}\, \alpha_p \qquad 1,(II-2.8)$$

Si ahora se toma una distribución de ventanas de vida suficientemente pequeña , entonces se debe tener:

$$\epsilon_k \geq | \xi_{(m),k} | \qquad 2,(II-2.8)$$

Las relaciones 2,(II-2.8) son importantes en los procesos de la síntesis de los sistemas lineales en estudio, pues establecen relaciones simples entre la separación de los impulsos que forman la distribución, el número de impulsos $m+1$ y la oscilación de la derivada m de la función de excitación.

En los capítulos que tratan en particular del problema de la transmisión pura, retrasada y adelantada se calcularán las expresiones del error asociado con cada uno de esos problemas.