# DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR UNA GOTA DE LIQUIDO

Marcos Moshinsky

Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica

*RESUMEN*

*The present paper deals with the scattering of sound waves in a gas, by liquid drops or soap bubbles. The main interest of this analysis lays in the insight it gives on the problem of scattering of nucleons by collective motions according to the model of Aage Bohr. We first discuss the equations and boundary conditions that characterize the scattering, both for the case of a liquid drop and for the case of a soap bubble. For a liquid drop, the function relating the sound wave potential and its normal derivative, at the surface of the drop, has just one resonance for each spherical harmonic, and its behavior as a function of frequency and $l$ is discussed.*

*The case of the soap bubble would be a more realistic approach to nuclear case, as we would have the natural frequencies of vibration of the air inside the soap bubble and of the soap bubble itself. The effect of the soap bubble on the position of the resonances and their widths, (defined in a way similar to the nuclear* *scattering problem) is discussed in detail. The extension of the viewpoints develop ed here to the nuclear case mentioned above, will be given in a following publication.*

## I. INTRODUCCION

El presente trabajo versará sobre la dispersión de las ondas sonoras por una gota de líquido, y también sobre el problema similar de dispersión por una pompa de jabón. El interés de estos problemas radica principalmente en las ideas que sugieren para el análisis de la dispersión de nucleones por los movimientos colectivos de los núcleos[1]. En un artículo posterior desarrollaremos estas ideas en lo que a su aplicación a la Física Nuclear se refiere, ya que en el presente trabajo nos referiremos solo a los aspectos del problema indicados en este párrafo.

En el caso de la dispersión de ondas sonoras por una gota de líquido, tenemos el problema de dos medios en contacto, el líquido en forma de una esfera de radio "*a*" con centro en el origen, y el gas que lo rodea. En la superficie de frontera entre los dos medios tenemos la acción de la tensión superficial de la gota.

Supondremos que la presión y densidad del gas, en ausencia de disturbios externos, son $P_{eo}$ y $\rho_{eo}$ respectivamente, donde el índice e es para indicar que se trata del medio exterior a la gota. Si tenemos una onda sonora en el gas, cuya propagación se efectúa en forma adiabática, se tiene que la ecuación de estado del gas ligando las nuevas presiones y densidades es[2]:

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.} \qquad \gamma \text{ relación de calores específicos .} \tag{1}$$

Si $|p_e + p_{eo}| << p_{eo}$ , $|\rho_e - \rho_{eo}| << \rho_{eo}$ y el flujo es laminar, se tiene que la vibracion puede caracterizarse por cierta función potencial $\phi_e$ que satisface la ecuación de onda).

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial t^2} - c_e^2 \; \nabla^2 \phi_e = 0 \quad , \qquad c_e^2 = (\gamma p_{eo}/\rho_{eo}) \quad , \tag{2a,b}$$

en donde la velocidad de movimiento de las partículas del gas y la presión en cada punto están dados respectivamente por:

$$\bar{v}_e = -\nabla \phi_e \ , \qquad p_e - p_{eo} = \rho_{eo} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \tag{3a,b}$$

En el interior de la gota también podemos introducir una función potencial $\phi_i$, que en el caso de movimiento laminar de un fluído incompresible, satisface[3]:

$$\nabla^2 \phi_i = 0 \ ; \quad \bar{v}_i = -\nabla \phi_i \ , \quad p_i - p_{io} = \rho_{io} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \tag{4a,b,c}$$

Por la acción de la onda sonora[3] la superficie de frontera se deforma, y en lugar de ser una esfera $r \doteq a$, su ecuación estará dada por:

$$r - \zeta(\theta, \varphi) = a \tag{5}$$

en donde $\zeta(\theta, \varphi)$ es una cierta función $\theta$, $\varphi$ que caracteriza a la deformación, y tal que $|\zeta(\theta,\varphi)| << a$ para que se pueda utilizar la aproximación de vibraciones pequeñas.

Como $r = a + \zeta$, se tiene que la velocidad normal a la superficie está dada por $(\partial r/\partial t) = (\partial \zeta/\partial t)$ y por la relación entre velocidad y potencial, se tiene que dentro de la aproximación lineal:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r}\right)_a = -\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial r}\right)_a \tag{6}$$

La ecuación (6) nos establece una de las condiciones a la frontera entre los dos medios.

La segunda condición a la frontera que necesitamos para completar el problema, proviene del hecho que la presión en el exterior más la fuerza normal por unidad de área de la tensión superficial, deben equilibrar en cada instante la presión interior. Si $\tau$ es el coeficiente de tensión superficial, la ecuación descrita en el párrafo anterior toma la forma:

$$[\tau(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})+p_e-p_i]_{\text{superficie de frontera}}=0 \qquad , \tag{7}$$

donde $R_1$ y $R_2$ son los radios principales de curvatura en cada punto.

De un análisis bien conocido de geometría diferencial[4], se tiene que la suma de los recíprocos de los radios principales de curvatura está dada por la divergencia del vector unitario normal a la superficie, y como la ecuación de la superficie está dada por (5), se tiene que:

$$\tau(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})=\tau\left\{\nabla\cdot\left[\frac{\nabla(r-\zeta)}{|\nabla(r-\zeta)|}\right]\right\}_{r=a} \tag{8}$$

Pero: $$|\nabla(r-\zeta)|=\sqrt{1-\nabla r\cdot\nabla\zeta+(\nabla\zeta)^2}=\sqrt{1+(\nabla\zeta)^2} \tag{9}$$

ya que $\nabla r$ es un vector unitario en la dirección radial, y $\nabla\zeta$ es tangencial a la esfera. Se tiene entonces que, hasta primer orden en $\zeta$:

$$\tau(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})=\tau[\nabla^2(r-\zeta)]_{r\cdot\zeta=a}=\tau[\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}L^2\zeta]_{r\cdot\zeta=a} \tag{10}$$

Finalmente, considerando términos hasta primer orden en $\zeta$, se tiene:

$$\tau(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})=\tau[\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}(L^2-2)\zeta] \qquad , \tag{11}$$

donde $L^2$ es el operador de momento angular orbital:

$$L^2=\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\text{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{12}$$

Introduciendo (3b), (4c) y (11) en (7), tenemos igualando separadamente las constantes y las partes dependientes del tiempo, que:

$$p_{eo}+\frac{2\tau}{a}=p_{io} \tag{13}$$

$$\rho_{eo}\left(\frac{\partial\phi_e}{\partial t}\right)_{r=a} + \frac{T}{a^2}(L^2-2)\,\zeta = \rho_{io}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)_{r=a} \tag{14}$$

La ecuación (13) nos da la relación que debe existir para la posibilidad de equilibrio entre la gota de líquido y el gas, y la (14) nos da la condición a la frontera que nos hacía falta. El problema de dispersión de una onda sonora por una gota de líquido está entonces definido por la ecuación (2a) y (4a), y las condiciones a la frontera (6) y (14).

En el caso de la pompa de jabón, tenemos que el medio interior es un gas, de manera que $\phi_i$ satisface la ecuación de onda. La condición a la frontera (6) sigue en pie, y la (14) se modifica solo por el hecho de que hay que incluir en la condición de equilibrio la fuerza inercial por unidad de área de la pompa, que es $-\sigma(\partial^2\zeta/\partial t^2)$, donde $\sigma$ es la densidad por unidad de área de la pompa de jabón. De aquí se tiene que en este caso, las ecuaciones y condiciones a la frontera son:

$$\frac{\partial^2\phi_e}{\partial t^2} - c_e^2\,\nabla^2\phi_e = 0 \;, \qquad c_e = (\gamma p_{eo}/\rho_{eo}) \;, \quad r > a \tag{15a}$$

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial t^2} - c_i^2\,\nabla^2\phi_i = 0 \;, \qquad c_i = (\gamma p_{io}/\rho_{io}) \;, \quad r < a \tag{15b}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right)_a = -\left(\frac{\partial\phi_e}{\partial r}\right)_a \;, \tag{15c}$$

$$\rho_{eo}\left(\frac{\partial\phi_e}{\partial t}\right)_{r=a} + \frac{T}{a^2}(L^2-2)\,\zeta + \sigma\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \rho_{io}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)_{r=a} \;. \tag{15d}$$

Hemos planteado el problema para la dispersión de ondas sonoras por gotas de líquido y por pompas de jabón, y en las siguientes secciones procederemos a resolverlos indicando, particularmente, aquellos aspectos del problema que son de especial interés en relación con los efectos colectivos en las reacciones nucleares.

## II.- DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR UNA GOTA DE LIQUIDO.

Consideremos una onda sonora de frecuencia $\omega$ y número de onda $k = (\omega/c_e)$ en el medio exterior a la gota de líquido, y que incide sobre la gota. La función potencial no perturbada estaría dada por $\exp(ikz)$, y para el efecto de la perturbación conviene analizar separadamente los diferentes harmónicos esféricos escribiendo:

$$\phi_{el} = \frac{1}{2} \left[ h_l^-(kr) + S_l(k)\, h_l^+(kr) \right] Y_{lo}(\theta)\, e^{-i\omega t} \tag{16}$$

En el interior tenemos que $\nabla^2 \phi_i = 0$ de acuerdo con (4a), y para una frecuencia $\omega$ y un harmónico esférico $l$, $\phi_i$ tiene la forma:

$$\phi_{il} = A\, r^l\, Y_{lo}(\theta)\, e^{-i\omega t} \tag{17}$$

De la condición a la frontera (6), vemos que:

$$-i\omega \zeta_l = -\left(\frac{\partial \phi_{el}}{\partial r}\right)_a = -\left(\frac{\partial \phi_{il}}{\partial r}\right)_a \tag{18}$$

y aprovechando el hecho de que $(\partial \phi_{il}/\partial r)_a = (l/a)(\phi_{il})_a$, se obtiene finalmente de (18) y (14) que:

$$(\phi_{el})_{r=a} = R_l(\omega^2)(\partial \phi_{el}/\partial r)_{r=a} \tag{19}$$

donde:

$$R_l(\omega^2) = -\frac{1}{\rho_{eo}\omega^2} \left[ \frac{T}{a^2}(l-1)(l+2) - \rho_{io} \frac{a}{l} \omega^2 \right] \tag{20}$$

De esta función $R_l(\omega^2)$ podemos, por el procedimiento ordinario, obtener $S_l(k)$ con $k = (\omega/c_e)$.

Es interesante investigar las características de la dispersión como función de la frecuencia a partir de la fórmula (20). Para muy bajas frecuencias $\omega \to 0$ y vemos de (19) y (20) que la función $\phi_{el}$ se caracterizaría por el hecho de que $(\partial \phi_{el}/\partial r)_a \to 0$, lo que significa que la velocidad normal del desplazamiento en la frontera tiende a 0, y la gota de liquido se comporta como una esfera rígida no dejando penetrar el desplazamiento, ya que:

$$\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r}\right)_{r=a} = A l \, a^{l-1} \, Y_{l o} \, (\theta) e^{-i\omega t} \tag{21}$$

y por lo tanto $A \to 0$ si $(\partial \phi_{el}/\partial r)_a \to 0$. *A medida que aumenta la frecuencia*, la probabilidad de penetración del desplazamiento aumenta y alcanza su máximo a la frecuencia de resonancia:

$$\omega_l^2 = \tau \frac{l(l-1)(l+2)}{\rho_{io} \, a^3} \tag{22}$$

donde $(\phi_{el})_{r=a} = 0$, o sea que a la frecuencia de resonancia la presión es 0 sobre la superficie y el desplazamiento de la superficie es máximo. Cuando la frecuencia $\omega \to \infty$, se tiene que $R_l \to (a\rho_{io}/l \, \rho_{eo})$, y en ese caso la condición *a la frontera es independiente de la frecuencia para* $\omega >> \omega_e$, pero si depende de $l$.

Para $l=0$, , $R_o(\omega^2) = \infty$ lo que significa que $(\partial \phi_{eo}/\partial r)_a = 0$ y la onda no puede penetrar en el interior a ninguna frecuencia, cosa que es de esperarse por el hecho de que el fluído es incomprensible, y por lo tanto no puede ser afectado por una onda de simetría esférica. Para $l=1$, $R_1 = (\rho_{io} \, a/\rho_{eo})$ para todas las frecuencias, lo que es debido a que la dispersión está asociada con los movimientos de la gota como un todo, y no con las vibraciones de la gota.

Debido a que el comportamiento de la gota como un cuerpo rígido ocurre para $(\partial \phi_{el}/\partial r)_a = 0$ y no para el caso $(\phi_{el})_a = 0$, como sucede en la mecánica cuántica, resulta mas conveniente definir la admitancia de la vibración al interior de la gota como el recíproco de $R_l$, en cuyo caso:

$$-R_l^{-1}(\omega^2) = \frac{(l\rho_{eo}/a\rho_{io})\,\omega_l^2}{\omega_l^2 - \omega^2} - \frac{l\,\rho_{eo}}{a\,\rho_{io}} \tag{23}$$

tiene la forma de una función de Wigner[5] para una sola resonancia.

En el problema de la gota de liquido tenemos solo las resonancias correspondientes a las vibraciones naturales de la gota, y este modelo sería de aplicación restringida en el caso nuclear por no contener mas que una resonancia para cada momento angular $l$. Es por ello que en la sección siguiente analizamos la dispersión de ondas sonoras por pompas de jabón, en donde veremos que hay dos tipos de resonancia, las asociadas con las vibraciones naturales del aire en el interior de la pompa, y las asociadas con las vibraciones de la membrana que constituye la pompa.

## III. DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR POMPAS DE JABON.

El problema que tenemos ahora está caracterizado por las ecuaciones y condiciones a la frontera (15). Para una frecuencia $\omega$ y un momento angular $l$, tenemos que:

$$\phi_{el} = \tfrac{1}{2}\left[\,h_l^-(kr) + S_l(k)\,h_l^+(kr)\right]\,Y_{l0}(\theta)\,e^{-i\omega t}\quad , \qquad k = \frac{\omega}{c_e}\ , \tag{24}$$

$$\phi_{il} = A\,j_l\!\left(\frac{\omega}{c_i}\,r\right)Y_{l0}(\theta)\,e^{-i\omega t}\quad . \ * \tag{25}$$

De (15c) tenemos que $-i\omega\zeta_l = -(\partial\phi_{el}/\partial r)_a$ y podemos poner las condiciones a la frontera en la forma:

$$\left(\frac{\partial\phi_{il}}{\partial r}\right)_a = \left(\frac{\partial\phi_{el}}{\partial r}\right)_a \quad , \tag{26a}$$

$$\rho_{eo}\,(\phi_{el})_a + \left[\frac{\tau}{a^2}\,\frac{(l-1)(l+2)}{\omega^2} - \sigma\right]\left(\frac{\partial\phi_{el}}{\partial r}\right)_a = \rho_{io}\,(\phi_{il})_a \quad . \tag{26b}$$

* El simbolo $j_l$ es la función de Bessel esférica $j_l$.

Definamos ahora $R_{il}(\omega^2)$, $R_{sl}(\omega^2)$ como:

$$R_{il}(\omega^2) = \frac{(\phi_{il})_a}{\left(\frac{\partial \phi_{il}}{\partial r}\right)_a} \quad , \qquad R_{sl}(\omega^2) = \omega^{-2}\left[\,\sigma\omega^2 - \tau a^{-2}(l-1)(l+2)\right] \quad . \tag{27a,b}$$

De (26) vemos entonces que:

$$(\phi_{el})_a = R_l(\omega^2)\left(\frac{\partial \phi_{el}}{\partial r}\right)_a \, , \tag{28a}$$

donde:

$$R_l(\omega^2) = \frac{\rho_{io}}{\rho_{eo}} R_{il}(\omega^2) + \frac{1}{\rho_{eo}} R_{sl}(\omega^2) \quad . \tag{28b}$$

La función $R_l(\omega^2)$, que relaciona al potencial exterior $\phi_{el}$ con su - derivada sobre la superficie, puede descomponerse como la suma de dos partes: Por un lado la $R_{il}(\omega^2)$ dada por:

$$R_{il}(\omega^2) = \frac{i_l\left(\frac{\omega}{c_i}\right)a)}{\left[\frac{d}{dr}\, i_l\left(\frac{\omega}{c_i}\right)r\right]_a} \quad , \tag{29}$$

que representa la contribución a las vibraciones, del gas en el interior oe la pompa, y por otro lado $R_{sl}(\omega^2)$ dado por (27b), que representa las vibraciones - de la pompa misma, cuyas frecuencias naturales de vibración estarían dadas por :

$$\omega_l^2 = \frac{\tau}{\sigma a^2}\,(l-1)(l+2) \quad . \tag{30}$$

Si $\tau$ y $\sigma$ fueran 0, la contribución de la pompa desaparecería y tendríamos el problema de dos gases en contacto a traves de una esfera , en cuyo caso $R_l(\omega^2) = (\rho_{io}/\rho_{eo})R_{il}(\omega^2)$, y en particular, si las densidades son iguales

$R_l \approx R_{il}$ , lo que equivaldría a la ausencia de dispersión. Si la densidad del gas interior es mucho menor que las del gas exterior $(\rho_{io}/\rho_{eo}) \simeq 0$ y en ese caso $R_l(\omega^2) \simeq R_{sl}(\omega^2)$ , o sea que la dispersión es provocada principalmente por el efecto de la membrana superficial.

A muy bajas frecuencias, esto es cuando:

$$\frac{\omega a}{c_i} << l \qquad , \qquad \omega << \omega_l \tag{31}$$

el problema se reduce al caso de la gota de liquido, ya que :

$$j_l(\omega a/c_i) \sim (\omega a/c_i)^l \quad \text{y por lo tanto:}$$

$$R_{il} \simeq \frac{a}{l} \quad , \quad R_{sl} \simeq -\frac{T}{a^2}(l-1)(l+2) \tag{32}$$

A muy altas frecuencias $(\omega a/c_i) >> l$ , $\omega >> \omega_l$ (donde $\omega_l$ dado por (30), y se tiene que:

$$R_l(\omega^2) \simeq \frac{a\rho_{io}}{\rho_{eo}} \; \frac{\cot\left(\frac{\omega a}{c_i} - \frac{l+1}{2}\right)\pi}{(\omega a/c_i)} + \frac{\sigma}{\rho_{eo}} \; . \tag{33}$$

Para analizar las resonancias que se presentan en el problema de dispersión de ondas sonoras por pompas de jabón, recordamos que de (24), la función potencial[8] a grandes distancias de la pompa es:

$$\phi_e \simeq e^{i(kz-\omega t)} - \left\{ \sum_l \frac{\sqrt{\pi(2l+1)}}{ik} \left[1-S_l(k)\right] \; Y_{lo}(\theta) \right\} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \quad , \tag{34}$$

donde de (28a) y (24) se tiene .

$$S_l(k) = -\frac{h_l^-(ka) - k\,R_l(k^2)\,h^{-\prime}(ka)}{h_l^+(ka) - k\,R_l(k^2)\,h_l^{+\prime}(ka)} \tag{35}$$

En (35), $h_l^{\pm}(ka)$ son las funciones esféricas de Hankel y $h_l^{\pm\prime}(ka)$ sus derivadas respecto al argumento.

En caso de que el gas dentro de la pompa se comportara como una esfera rígida, se tendria que la amplitud de dispersión sería $-[h_l^+(ka)/h_l^{+\prime}ka]$. Es conveniente expresar $1-S_l(k)$ en forma que se vea explícitamente la contribución de la esfera rígida, y la contribución del efecto de resonancia, para lo cual restamos y sumamos la expresión indicada en la frase anterior a $1-S_l(k)$, y obtenemos:

$$1-S_l(k) = e^{i2\eta_l}\left[(e^{-i2\eta_l}-1) + \frac{2is_l}{R_l(k^2)-(\delta_l+is_l)}\right], \qquad (36)$$

donde[8]:

$$e^{i2\eta_l} = \frac{h_l^{-\prime}(ka)}{h_l^{+\prime}(ka)}, \quad \delta_l + is_l = \left[\frac{h_l^+(ka)}{k\,h_l^{+\prime}(ka)}\right] \quad . \qquad (37)$$

En el supuesto de que la densidad del gas en el interior de la pompa es mucho mayor que en el exterior, y que las presiones son comparables, se tiene $c_i << c_l$, y por lo tanto el número de onda interior $\frac{\omega}{c_i}$ es bastante mayor que $k$, lo que nos permite suponer que $R_l(k^2)$, varía mucho más rápidamente con $k$ que $\delta_l$ y $s_l$. De aquí, por los argumentos bien conocidos[8], podemos concluir que las resonancias corresponden a los valores de $k$ tales que $R_l(k^2)=0$, ya que estos darán el valor máximo al segundo término dentro del paréntesis cuadrado de (36) que corresponde a la amplitud de resonancia. De (28b) tenemos que $R_l(\omega^2)=0$ nos da:

$$\rho_{io} R_{il}(\omega^2) = -R_{sl}(\omega^2) \quad . \qquad (38)$$

Las curvas $-R_{sl}(\omega^2)$, $\rho_{io}R_{il}((\omega^2)$ están trazadas como función de $\omega$ en la figura # 1, y los puntos de corte corresponden a lo que podríamos interpretar como resonancias en este problema.

A altas frecuencias las resonancias estarían dadas por la ecuación:

$$\cot\left(\frac{\omega a}{c_i} - \frac{l+1}{2}\right)\pi = -\frac{\sigma}{a\rho_{io}}\left(\frac{\omega a}{c_i}\right). \qquad (39)$$

En el problema de la pompa de jabón vemos entonces que las frecuencias de resonancias no corresponderían a las de vibraciones libres de una esfera de gas caracterizada

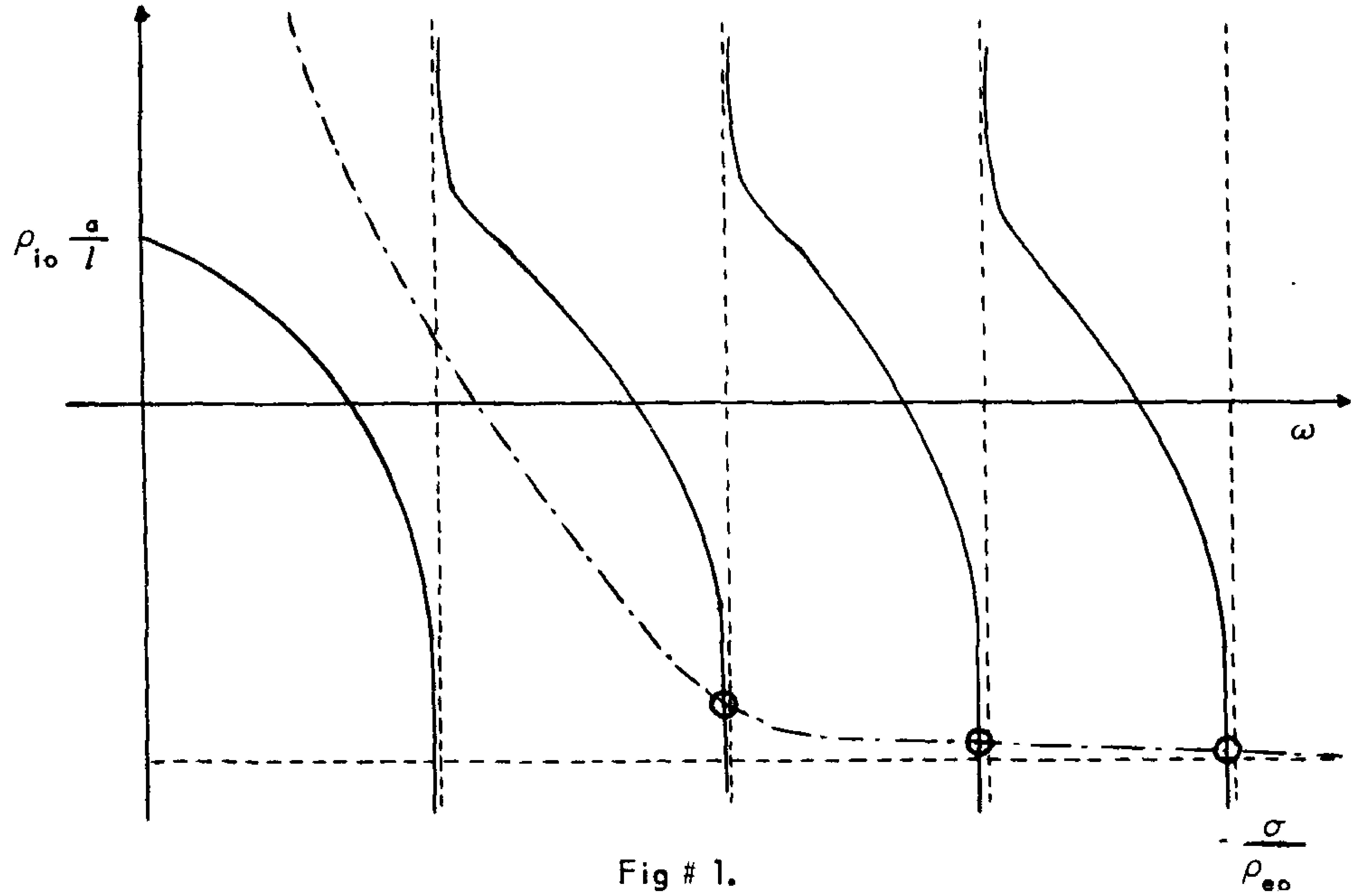


Fig # 1.

por $i_l\left(\frac{\omega a}{c_i}\right) = 0$, o lo que es lo mismo por $R_{il}(\omega^2) = 0$, sino que estarían despla zadas con respecto a estas frecuencias naturales por la acción de las vibraciones de la pompa, tal como se ilustra en la Fig. # 1.

En la vecindad de las resonancias se puede desarrollar

$$R_l(\omega^2) = \left[\frac{dR_l}{d\omega^2}\right]_{\omega_r^2} (\omega^2 - \omega_r^2) \quad , \quad R_l(\omega_r^2) = 0 \ , \qquad (40)$$

y viendo la expresión (36) se sugiere definir una anchura reducida para la resonancia dada por :

$$\gamma = a\left(\frac{dR_l}{d\omega^2}\right)^{-1}_{\omega_r^2} = \left[\frac{\rho_{io}}{\rho_{eo}}\, a^{-1}\, \frac{dR_{il}}{a\omega^2} + \frac{\tau\,(l-1)(l+2)}{\rho_{eo}a^3\omega^4}\right]^{-1}_{\omega_r^2} \qquad (41)$$

De (29) se tiene que:

$$a^{-1} R_{il} = i_l\left(\frac{\omega a}{c_i}\right)\left[\frac{\omega a}{c_i}\, i_l'\left(\frac{\omega a}{c_i}\right)\right]^{-1} \qquad (42)$$

y por las características de las funciones de Bessel, esta es una función meromorfa de $\omega^2$. Utilizando la ecuación que satisface $j_l(z)$ se demuestra fácilmente que

$$a^{-1}\ \frac{dR_{il}}{d\omega^2} = \frac{1}{2\omega^2}\left[1+\frac{R_{il}}{a}+\left\{\left(\frac{\omega a}{c_i}\right)^2 - l(l+1)\right\}\left(\frac{R_{il}}{a}\right)^2\right]. \tag{43}$$

En ausencia de los efectos de superficie $R_l = \left(\frac{\rho_{io}}{\rho_{eo}}\right) R_{il}$, y por lo tanto las resonancias estarían dadas por $R_{il}\ (\omega_r^2) = 0$, lo que implicaría que las anchuras reducidas serían $\gamma = 2\,\omega_r^2\ \frac{\rho_{eo}}{\rho_{io}}$. Si la interacción superficial se hace sentir, $\omega_r$ estará dada por la ecuación (38) y de (41) y (27b) se tiene que:

$$\gamma = \frac{2\,\omega_r^2\ (\rho_{eo}/\rho_o)}{\left[1+\frac{2\sigma}{a\rho_{io}} - \frac{3R_{sl}}{a\rho_{io}} + \left\{\left(\frac{\omega a}{c_i}\right)^2 - l(l+1)\right\}\left(\frac{R_{sl}}{a\rho_{io}}\right)^2\right]_{\omega^2 = \omega_r^2}} \tag{44}$$

La expresión en el numerador es la anchura reducida en ausencia de acoplamiento sobre la superficie. El denominador nos da entonces la modulación que impone el acoplamiento de la superficie sobre la anchura reducida.

Es de interes ver el efecto de esta modulación cuando la frecuencia de resonancia $\omega_r \simeq \omega_l$ y $\omega_r >> \omega_l$, donde $\omega_l$ es la frecuencia natural de vibración de la pompa dada por (30). Como de (27b) y (30) $R_{sl}\ (\omega^2)$ está dado por:

$$R_{sl}\ (\omega^2) = \sigma\left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega^2}\right) \quad , \tag{45}$$

tenemos que si $\omega_r \simeq \omega_l$, $R_{sl} \simeq 0$ y la anchura reducida toma la forma :

$$\gamma \simeq 2\ \omega_r^2\ \frac{\rho_{eo}}{\rho_o}\left(1+\frac{2\sigma}{a\rho_{io}}\right)^{-1} . \tag{46}$$

Si $\omega_r >> \omega_l$, $R_{sl} \simeq \sigma$ y la anchura reducida toma la forma:

$$\gamma \simeq 2\frac{\rho_{eo}}{\rho_{io}}\left(\frac{c_i}{a}\right)^2\left(\frac{\rho_{io}\, a}{\sigma}\right)^2 \quad , \tag{47}$$

que es independiente de $\omega_r$ .

Vemos entonces que aún a frecuencias muy lejanas de la frecuencia natural de la pompa, el efecto de la presencia de esta se hace sentir sobre las anchuras reducidas de las resonancias, ya que, en lugar de que estas anchuras aumenten linealmente con $\omega_r^2$ , permanecen constantes. Tambien vemos de (33) que la posición de las resonancias se ve modificada por el efecto de superficie y de hecho, si $\omega_r \to \infty$ , la presencia de la pompa hace que las $\omega_r$ estén defasadas por $\frac{\pi}{2}$ con respecto a las resonancias en ausencia de la pompa.

Estos efectos sobre las resonancias y sus anchuras que tiene la interacción superficial , son de un alto interés en la aplicación de las ideas desarrolladas en este trabajo a los fenómenos colectivos en los nucleos.

## REFERENCIAS


1. Aage Bohr. Dan.Mat.Fys. Medd. **26**, No. 14, (1952).
2. Philip M. Morse. Vibration and Sound. (Mc Graw Hill 1948) Second Edition Cap. VI.
3. H. Lamb, Hydrodynamics (Dover Publications 1945) P. 473-475 .
4. C.E. Weatherburn. *Differential Geometry* (Cambridge University Press 1931) P. 69.
5. E.P. Wigner. Ann. of Math. **53**, 36, (1951) .
6. J.M. Blatt y V.F. Weisskopf. *Theoretical Nuclear Physics*. (John Wiley and Sons, 1952) P. 320.