ALGUNOS INTENTOS DE CUANTIZACION DEL CAMPO GRAVITACIONAL* +

Frederick J. Belinfante.
Departamento de Física de la Universidad de Purdue, Lafayette, Indiana. E. U. A.

El descubrimiento de muchos nuevos tipos de partículas extrañas en años recientes, ha llamado la atención al hecho de que no comprendemos en realidad el porqué de la existencia de esas partículas y de las propiedades que en ellas observamos. Porqué es un protón 1836 veces más pesado que un electrón? Porqué no existen mesones μ neutros de masa 200?. Porqué es $\hbar c/e^2$ igual a 137?.- Una teoría fundamental de materia debería explicar todas estas cosas.

Heisenberg[1] piensa que tal teoría fundamental describirá todas las partículas y todas sus interacciones por el comportamiento de un solo campo. Una teoría de campo de ese tipo sería necesariamente *no lineal*; de otro modo, no prodría representar las interacciones. Describiéndolo todo debe describir también la ***gravedad***. Para acostumbrarnos a estos dos aspectos de la teoría fundamental de la materia, hacemos bien si nos preparamos para el futuro estudiando ahora la teoría no-lineal de la gravitación, que ya poseemos.

* Patrocinado por National Science Foundation.

+ Trabajo invitado que se presentó en la Asamblea Conjunta de la Sociedad Mexicana de Física y de la American Physical Society, en México, Agosto 31, 1955.

Que es lo que mantiene juntas a las partículas elementales? Pais[2] sugirío alguna ocasión un "pegamento"hecho de "partículas F" hipotéticas. Algunos otros[3-5] han sugerido que es quizas la curvatura del espacio-tiempo que, bajo interacción con el campo de la materia, no puede desenredarse. Esto hace interesante el considerar la gravedad en el dominio cuántico. El problema fundamental se complica por el hecho de que los métodos de perturbación problablemente no podrán ser utilizados.

Una solución completa y rigurosa del problema de la interacción de todos los campos cuánticos conocidos, inclusive el de la gravedad, es inalcanzable por el momento. Todo lo que los científicos pueden hacer es analizar algunos puntos en la frontera de la región de conocimientos presentes. Tal análisis indica metas definidas insuficientes en si mismas, pero, de cualquier modo, tenemos esperanza de que los pequeños resultados que *podemos* obtener nos ayudarán al menos, hacia el ideal que tenemos en mente. El problema que se me ha pedido discuta con ustedes hoy, es entonces, qué tanto hemos analizado y quizas, que aspectos prodríamos analizar en el futuro inmediato.

Por ahorrar tiempo seré esquemático. Los intentos de cuantizar los campos gravitacionales quisiera dividirlos en tres grupos, como sigue:

1) Teorías lineales de gravitación en el espacio plano que buscan ser completas en si mismas.
2) Teorías generalmente en espacios planos, que intentan ser aproximaciones a la teoría de Einstein.
3) La teoría no lineal, pero covariante en el sentido generalizado de Einstein.

Nuestra meta fundamental puede bien ser esta tercera teoría, pero es tambien la más dificil de todas ellas. Para un principio sencillo, uno prefiere la teoría del tipo (1). Este es el problema que nos ha ocupado en Purdue hasta el año pasado. Algo de esto se ha publicado en un reporte sobre la tesis doctoral de Swihart[6].

Esta teoría de gravitación obviamente no puede ser covariante en general, de modo que postulamos la covariancia en el sentido de Lorentz solamente. Principiaremos por postular el Lagrangiano más general covariante en el sentido de Lorentz para el tensor de potencial gravitacional, que es compatible con una teoría lineal y con los demás requisitos usuales de teorías de campo simple. Por la razón la masa pesante de la materia ha de ser igual a la masa inercial, el campo gravitatorio debe tener interacción con el tensor de densidad de energía de otros campos; posiblemente también con su traza calculada en ausencia del campo gravitacional. Esto nos da dos constantes de interacción para la teoría; y el Lagrangiano del campo gravitacional libre contiene cuatro coeficientes desconocidos. Estas seis constantes, o mejor dicho, sus cinco razones, son mas tarde ajustadas para que concuerden con los datos experimentales.

Nuestra teoría es por lo tanto, una generalización de la teoría de Moshinsky[7] de 1950, cuyo Lagrangiano tenía valores específicos para nuestras constantes.

Para el campo gravitacional creado por distribución dada de materia, el Lagrangiano de Moshinsky nos llevó a las ecuaciones de Birkhoff[8]. Para explicar la fuerza por medio de la cual el campo gravitacional reacciona sobre la materia, el Lagrangiano de Moshinsky nos conduce hacia un resultado diferente del postulado por Birkhoff. El postulado de Birkhoff, de hecho, probablemente viola el principio de acción y reacción. La interacción del campo gravitacional con la materia introducido por Moshinsky nos llevaría hacia un avance del perihelio de los planetas, qué sería seis veces demasiado pequeño.

Usamos los principios siguientes para determinar los valores de las cinco razones de las seis constantes en nuestro Lagrangiano. Requisitos obvios son:

1) En primera aproximación, la teoría debe predecir las órbitas para los planetas de Kepler.
2) En segunda aproximación, los perihelios de tales órbitas deben avanzar en la forma observada[9].
3) La deflexión de los rayos de luz que pasan a cierta distancia del sol; debe tomar el valor experimental,[10-11], el cual es igual o mayor que el valor teórico de Einstein.

4 y 5) Solamente por comodidad hemos postulado arbitrariamente que el tensor gravitacional para un potencial estático en un punto P, cerca de un sol estacionario en O, será independiente de la dirección de OP. Esto simplifica considerablemente la teoría y nos permite poner una de nuestras constantes igual a cero, si, al mismo tiempo, introducimos una quin

ta condición poniendo otra de las constantes igual a cero. Y en esta forma, en el Lagrangiano del campo gravitacional libre sólo nos quedan los términos en los cuales los dos operadores gradientes se contraen entre sí.

No podemos elegir con libertad el valor que ha de predecir nuestra teoría para el desplazamiento hacia el rojo debido al campo gravitacional. Nuestro valor teórico para este desplazamiento hacia el rojo está determinado de manera univoca por la condición (1), de obtener aproximadamente las órbitas de Kepler para los planetas. Encontramos así para los desplazamientos hacia el rojo el mismo valor que Einstein predijo en su teoría. Si la crítica experimental de este valor por Freundlich fuese correcta,[11-12], destruiría tanto la teoría de Einstein, como nuestra teoría lineal.

De este modo obtenemos un Lagrangiano diferente de una mera aproximación lineal a la teoría de Einstein, y también diferente del Lagrangiano de Moshinsky. El Lagrangiano de Moshinsky debería llevar a sólo la mitad de la deflexión de los rayos de la luz observados. La razón por la cual obtiene la deflexión observada, y la razón porque hubiese encontrado de su interacción con la materia con spin, un movimiento del perihelio solamente tres veces mas pequeño en lugar de seis, si lo hubiese calculado, es porque usó la suposición de Birkhoff de una presión dentro del sol considerado como flúido perfecto, probablemente algunos millones de veces demasiado grande[7-8]. El tipo de análisis que Moshinsky utilizó para la interacción entre el campo gravitacional y otros campos, es esencialmente el que hemos seguido.

Una vez que el Lagrangiano ha sido determinado, uno puede cuantizar. Encontramos un momentum canónicamente conjugado para cada componente del potencial gravitacional. Como mencionaré mas adelante, esto no se puede hacer para una teoría covariante general [13-14], y por lo tanto, parece que nuestra teoría lineal no puede ser una aproximación a la teoría de Einstein cualesquiera que puedan ser sus otros méritos.

Hemos terminado todo el programa de cuantización de nuestra teoría. Hemos encontrado una demostración de la existencia de una representación de interacción, y de ese modo hemos comprobado la covariancia de Lorentz de las relaciones de conmutación. Esta comprobación resultó ser muy complicada, y nos ocupó durante muchos meses.

Una de las muchas fuentes de complicación, se encontró en el hecho de que en las representaciones de Heisenberg uno no puede usar simplemente la función de onda ψ de Dirac como una amplitud de probabilidad para cuantizarse del modo usual. Primero ha de introducirse una nueva función de onda. El trabajo de DeWitt[15] hos ha demostrado que una dificultad parecida surge en la teoría de covariancia general para la interacción entre el campo spinorial del electrón y el campo gravitacional de Einstein.

Cuando expresamos la energía del campo gravitacional libre en términos de operadores de números de ocupación, se hizo patente que para evitar gravitones de energía negativa, ha de usarse la métrica indefinida de Gupta[16-18], y después imponer una condición auxiliar sobre el vector de estado. Desgraciadamente esta condición auxiliar no se conserva rigurosamente. Esto se debe al hecho de que la fuente del campo gravitacional en una teoría lineal no puede conservarse, porque por un lado, destruiríamos la linearidad de la teoría, si *incluyésemos* entre las fuentes de gravedad la energía gravitacional en si; mientras que por otro lado, una piedra que cae transformando energía gravitacional en energía de materia, nos muestra que *sin* esta inclusión de energía gravitacional, la energía de materia sola no se conserva.

Lo mejor que pudimos hacer en nuestra teoría lineal, fué postular que la condición auxiliar se satisfizo cuando Dios creó al Universo. Desde entonces, su validez puede haber ido decreciendo lentamente. Esto resulta ser equivalente a postular que, desde la creación del Universo, la materia puede haber estado radiando campos gravitacionales retardados[19]. Por lo tanto, uno pudiera preguntarse cuanta energía ha sido perdida por materia acelerada tal como una estrella doble en rotación en, digamos 10^9 ó 10^{10} años de existencia del Universo. Afortunadamente encontré que esta cantidad es tan pequeña que no hay razón para preocuparse. Mas importante es el hecho que la materia, en ausencia de campos gravitacionales incidentes externos, emite siempre un poco mas de energía gravitacional negativa. Por lo tanto, no hay peligro tampoco de una explosión del Universo en la cual la materia se descontrolara bajo la emisión de gravitones de energía negativa.

De este modo nuestra teoría se salva, pero convengo en que no es una solución elegante. Por lo tanto, consideremos ahora teorías del tipo 2); aquellas que son aproximaciones de la teoría rigurosa de Einstein.

Los primeros intentos simplemente tomaron la primera aproximación lineal en un desarrollo de la teoría de Einstein, en potencias de la diferencia entre la métrica real $g_{\mu\nu}$, y su aproximación $\gamma_{\mu\nu}$ del espacio plano invariante ante las transformaciones de Lorentz. Esto conduce a un adelanto del perihelio de la órbita de los planetas, que no es suficiente. Por lo tanto, uno no está satisfecho a menos que sepa como tratar la segunda aproximación.

Papapetrou,[20] en 1948, realizó algunos progresos. Usó un truco matemático propuesto originalmente y mas tarde mal usado por Rosen. Este truco consiste primero en elegir algún sistema de referencia preferido, y luego introducir en ese sistema de referencia la métrica $\gamma_{\mu\nu}$ del espacio plano de Lorentz, junto con la métrica efectiva $g_{\mu\nu}$. Bajo transformaciones ***generales***, $\gamma_{\mu\nu}$ se transforma como un tensor y pierde su forma simple, excepto en la multiplicidad de sistemas de referencia de Lorentz, que incluye al sistema de referencia original. Si se usara una multiplicidad de Lorentz diferente como punto de partida, esto significaría una transformación de norma de $\gamma_{\mu\nu}$[5].

Enseguida, usando esta métrica γ , Papapetrou definió un nuevo tensor de densidad energía-momentum de materia y gravitación juntas, que tenía las dos interesantes propiedades siguientes: Primera, se conservaba rigurosamente debído a las ecuaciones del campo gravitacional de Einstein, y segunda, era un tensor simétrico.

Esencialmente este tensor de densidad de energía no era otra cosa que la suma del anticuado tensor simétrico de materia, y el tensor ***no*** simétrico de energía de la gravitación mas lo que prodríamos llamar el "tensor de densidad de ***energía-spin***" . Se obtiene así un tensor mixto si el primer índice que distingue energía de momentum se baja con ayuda de la $g_{\mu\nu}$ como índice covariante, y conservando el índice que se refiere a densidad o flujo en una posición contravariante. Entonces, si en el resultado el primer índice covariante es subido nuevamente, pero esta vez por la métrica γ , se obtiene el tensor simétrico mencionado poco antes.

Papapetrou reescribió entonces las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein, usando la densidad tensorial contravariante (gotica $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$) en lugar de la

$g_{\mu\nu}$ covariante ordinaria. Encontró que estas ecuaciones tomaban la forma de una ecuación diferencial de segundo orden muy parecida a la de potenciales en la teoría covariante de Lorentz-Maxwell. Su nuevo tensor simétrico de energía figuró en ellas como fuente del campo. En el caso Maxwell, el operador diferencial se simplifica hacia el dalambertiano, si uno impone las condiciones de Lorentz sobre los potenciales. En forma semejante, el operador diferencial en la ecuación de Papapetrou se simplifica en dirección de el dalambertiano si uno impone las condiciones de coordenadas de DeDonder

$$\partial g^{\mu\nu}/\partial x^{\nu} = 0$$

Estos hechos sirvieron como bases al trabajo de Gupta sobre gravitación[17,22]. Empieza por sugerir que la ecuación de Papapetrou puede usarse para resolver el campo gravitacional en aproximaciones sucesivas, usando las aproximaciones inferiores del campo de la gravitación en los tensores de energía de Papapetrou, para calcular la aproximación superior que sigue como solución retardada de la ecuación de campo simplificada. Desgraciadamente tal procedimiento falla porque las aproximaciones intermedias al tensor de fuerzas de Papapetrou no satisfacen, de ese modo, una ley de conservación y por lo tanto, no tienen significado alguno como fuentes para un campo gravitacional.

En cuanto a la cuantización del campo de Gupta, permítaseme advertir que Gupta no probó jamás la covariancia de Lorentz de sus relaciones de conmutación. Esta covariancia de Lorentz no es completamente obvia ya que Gupta, después de desarrollar su Lagrangiano, destruyó su covariancia general usando la condición auxiliar para simplificarla de manera muy parecida a la simplificación del Lagrangiano introducido por Fermi en la teoría de Maxwell. Existe también una arbitrariedad en el grado en que esta simplificación puede usarse para los términos de orden superior.

Finalmente, la demostración de Gupta de la conservación de la condición auxiliar de DeDonder es incorrecta, ya que pasa por alto el hecho de que el cambio del Lagrangiano conduce asi mismo a un cambio en el tensor simétrico de energía de Papapetrou. Se podría dar una prueba mas complicada de la conservación de la condición de DeDonder, pero con la interpretación de mecánica-cuántica de Gupta a la condición auxiliar, esa prueba falla también. Una solución a esta dificultad es primero, reemplazar todas las derivadas ordinarias en el término agregado al Lagrangiano por Rosen, por las derivadas γ -covariantes[21] y en seguida cuantizar el campo $\gamma_{\mu\nu}$ y el campo $g^{\mu\nu}$. Pero el resultado es una teoría generalmente covariante más complicada aún que la de Einstein.

Por lo tanto, procedamos mas bien a resolver el problema real. La cuantización de la teoría de Einstein. El trabajo realizado por Dirac[23], por Schild, Pirani y Skinner[24], por los DeWitt[15,25], pero antes que nada por Bergmann y su escuela[14,26-34], es de gran interés aún cuando no ha podido hasta ahora dar a la teoría una forma practicable. Lo que estos investigadores han mostrado es que en principio, es ***posible*** establecer un conjunto auto-consistente y covariante de ***relaciones de conmutación*** para la teoría de la gravitación de covariancia general.

Este resultado es obtenido principalmente, por un estudio cuidadoso de la teoría *no*-cuantizada. La dificultad fundamental con que topa la ***cuantización*** fué descubierta primero por Rosenfeld[13] en un trabajo casi olvidado de 1930, y redescubierto mas tarde por Bergmann[14] en 1949. Esta difilcultad consiste en el hecho de que en cualquiera teoría invariante bajo un grupo de transformaciones caracterizadas por ***funciones*** $\xi(xyzt)$ - arbitrarias, y no solo por constantes $\underset{\sim}{\gamma}$ - , deben existir necesariamente identidades que se mantienen entre las ***variables canónicas*** de tal teoría. En electrodinámica todos conocemos esa relación: debido a la invariancia de norma, el momentum P_4 conjugado canónicamente al potencial eléctrico Φ desaparece. Igualmente debido a la covariancia general de la teoría de gravitación de Einstein, se mantienen las cuatro llamadas "restricciones de coordenadas" entre las variables $g_{\mu\nu}$ de campo y sus momentums conjugados. Estas restricciones llamadas también "ecuaciones Φ"[23], pueden darse explícitamente[15,24]. La razon por la cual no aparecieron en mi trabajo con Swihart[6], o en el de Gupta[17-22], es que nosotros nunca consideramos una covariancia general, y que Gupta destrúyó la suya.

Dirac[23] ha mostrado que las llamadas restricciones "primarias" deben apa recer agregadas al Hamiltoniano con coeficientes arbitrarios. Las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento expresan entonces estos coeficientes arbitrarios en términos de derivadas respecto al tiempo de las variables de campo, llamadas "velocidades". Un aspecto importante de la teoría de Dirac es que, desde un principio distingue las llamadas ecuaciones "fuertes" que permanecerán válidas después de la cuantización de las ecuaciones "débiles", que se convierten en condiciones auxiliares. La interpretación en la mecánica cuántica de las últimas, y la regla de Dirac de que el producto de dos ecuaciones débiles será fuerte, son puntos que necesitan cierto cuidado, y han sido explicados por Bergmann[31,34] sobre la base de ideas usadas anteriormente por mí en electrodinámica cuántica[35-38], y las cuales esencialmente significan usar solo un subespacio del espacio convencional de Hilbert.

Es típico en el trabajo de Dirac el considerar todas las ecuaciones de campo como ecuaciones ***débiles***, y también las ecuaciones que definen momentums canónicos en términos de las velocidades son ***débiles***.

Dirac indica que además de la restricción primaria o ecuaciones ϕ uno debe en $t=o$, también imponer un número finito[28] de restricciones secundarias o "ecuaciones - X" entre las variables canónicas, para conservar las restricciones para ocasiones subsiguientes. Un ejemplo de ecuaciones -X es div $\underset{\sim}{E} = 4\pi\rho$ en la teoría de Maxwell; dependen estas generalmente de ***interacciones***, cosa que no sucede con las ecuaciones ϕ. Para la gravitación, estas restricciones -X son expresiones muy complicadas[24].

Las restricciones primarias y secundarias juntas se pueden dividir nuevamente en restricciones de "primera y segunda clases". Las de primera clase son aquellas que tienen paréntesis Poisson iguales a 0 con cualquier otra restricción, mientras que las de segunda clase tienen algunos paréntesis de Poisson que no son nulos con otras restricciones de segunda clase. Ejemplos de restricciones de segunda clase son aquellas que dicen que las funciones de onda ψ de electrón de Dirac, son el conjugado canónico de ψ^*, mientras que ψ^* es el conjugado canónico de ψ[15]; o también las relaciones que en la teoría del meson vectorial[23] dicen que algunas de las variables de campo son las llamadas "variables derivadas". Mi trabajo de 1940 dice que tales variables derivadas no deben cuantizarse independientemente, pero deben tratarse como funciones de las variables ***de las cuales*** son derivadas. Dirac[23] llega a este mismo resultado de una manera mas elaborada. Para este propósito introduce una modificación de los clásicos paréntesis de Poisson, que algunos han llamado "paréntesis de Dirac[15,34]". Por favor no confundir estos paréntesis de Dirac[15,34], con los bra y ket de Dirac[38] usados en teoría de transformaciones de mecánica para indicar vectores de estado e indicar los elementos de matriz.

La ventaja de los paréntesis modificados de Poisson introducidos por Dirac es que, si ***ellos*** son cambiados en conmutadores de la mecánica cuántica, en lugar de los paréntesis convencionales de Poisson, nos llevarían ***automáticamente*** hacia la cuantización adecuada de las variables derivadas. Las restricciones de segunda clase pueden entonces considerarse como ecuaciones ***fuertes.*** El trabajo de Bergmann y Goldberg[34] ha justificado ulteriormente esta interpretación. Redefinieron el paréntesis de Dirac con independencia ***formal*** de la subdivisión de las restricciones en restricciones de primera y segunda clase, pero bajo la condición de que como en operadores de Hilbert en la teoría cuántica, uno no considera toda variable de campo, sino solo aquellas combinaciones de entre ellas que generan un mapeo del sub-espacio físico del espacio de Hilbert en si mismo. Por "sub-espacio físico" quiero indicar aquella parte del espacio de Hilbert donde todas las restricciones se satisfacen.

Esto excluye de las variables de Hilbert no solo todas las restricciones, sino también lo que podríamos llamar sus conjugados canónicos. Permítanme dar un ejemplo. En electrodinámica, P_4 es una variable de restricción primaria, y $(\mathrm{div}\,\underset{\sim}{E}-4\pi\rho)$ es una restricción secundaria. De la cuantización regular excluímos por lo tanto, no solo P_4 y $\mathrm{div}\,\underset{\sim}{E}$, sino también sus conjugadas Φ y $\mathrm{div}\,\underset{\sim}{A}$, y así solo las ondas ***tranversas*** en $\underset{\sim}{A}$ y en $\underset{\sim}{E}$ son cuantizadas en la forma usual. Esto equivale exactamente a la llamada electrodinámica cuántica "independiente de la norma" propuesta en mi trabajo con Lomont hace algunos años[36].

Bergmann sugirió un análisis parecido para la cuantización del campo gravitacional[31,34]. Como existen 10 pares de variables canónicas, para cuatro restricciones ϕ, y cuatro restricciones $-X$, esto deja solo dos pares de variables canónicas para ser cuantizadas.

Se puede predecir fácilmente la consecuencia de esto para una aproximación lineal de la teoría en el espacio plano. Si en el desarrollo de Fourier de los campos usamos la descomposición de Kramer para las ondas transversas en ondas circularmente polarizadas[39], en la dirección de las manecillas del reloj o a la inversa para cada uno de los dos índices de la parte espacialoide del campo $\mathfrak{g}^{kl}$, entonces solamente deberán cuantizarse[17] componentes izquierda-izquierda y derecha-derecha. Todos los demás componentes de $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ deberían considerarse funciones del campo de la materia, o eliminarse completamente por un cambio de variables como Φ y div $\mathbf{A}$ en electrodinámica cuántica independiente de la norma.

Voy a concluir hablando brevemente sobre el estado presente y posibilidades futuras de la teoría cuántica de la gravitación. La dificultad reside en que las restricciones son tan complicadas, que nadie ha podido aún proponer nuevas variables que transformen las restricciones en variables canónicas, que podrían ser entonces igualadas a cero siempre que ocurran. En los trabajos sobre la teoría rigurosa de Einstein, nadie parece hacer mas que escribir algunas relaciones de conmutación y nada práctico se ha hecho con estas últimas. El único método conocido de introducir operadores de número de ocupación, y de ahí obtener una representación para operadores de creación y aniquilación, parece ser hasta ahora el usado por Gupta[17,22] que separa del Hamiltoniano total su parte mas grande que es el bilineal en el campo. Puede ser necesario seguir tal método de aproximación, para obtener resultados inmediatos en la formulación de una teoría de perturbación para el campo cuantizado gravitacional. Este método de aproximación debería aplicarse también a la discusión de las restricciones, y para definir en aproximaciones sucesivas las variables para un tratamiento de la teoría independiente de la norma[36,34]. Durante el trabajo uno debe estar conciente constantemente de los resultados obtenidos ya en la teoría rigurosa, que a cada etapa debe ser aproximada por el método del desarrollo.

Para cualquier aplicación poco interesante, el método de desarrollo será suficiente. Una pregunta crítica será si su análoga clásica podrá llevar el avance del perihelio planetario y la deflexión correcta de los rayos de luz. La aplicación mas interesante de la teoría de la gravitación a la teoría de las partículas elementales, necesitará sin embargo un tratamiento mas riguroso.

(Vease las referencias y el apéndice en la versión inglesa del artículo).