

ESTUDIO DE LAS REACCIONES ${}_6\text{C}^{12}(d,p){}_6\text{C}^{13}$ y ${}_8\text{O}^{16}(d,p){}_8\text{O}^{17}$.

Fernando Alba A., T. A. Brody, Alonso Fernández, Marcos Mazari, Vinicio Serment
Manuel Vásquez B.

RESUMEN

Angular distributions of (d,p) reactions on oxygen and carbon at energies between 1 and 2 MeV are obtained and in some cases are found to differ widely from Butler's theory at resonance energies.

EQUIPO EMPLEADO

Este trabajo se realizó empleando el generador electrostático de Van de Graaff del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Este aparato acelera protones o deuterones a energías hasta de 2 MeV. Se utilizó el gas deuterio en el aparato, para producir el haz de deuterones. Se compró agua pesada en Noruega y por medio de la electrólisis se obtuvo el deuterio. Por el tubo acelerador bajan deuterones (masa 2), moléculas ordinarias de deuterio ionizado (masa 4) y moléculas ionizadas más complejas (masa 6) como por ejemplo, 3 deuterones ligados por 2 electrones. Todas estas partículas de diferentes masas salen del tubo acelerador con la misma energía. El campo magnético sirve para separarlas y además para medir con gran precisión la energía de deuterones que van a emplearse como proyectiles.

Para encontrar la energía de un proyectil, se mide el campo magnético empleado H , con ayuda del flúxmetro de resonancia magnética nuclear, se encuentra

el producto $H\rho$ ($\rho = 40.58$ cm.) y de ahí la energía.

Los deuterones que salen del campo magnético deflector van a dar en el blanco, como se muestra en las Fig. 1 y 2. El blanco fué en unos casos de form-

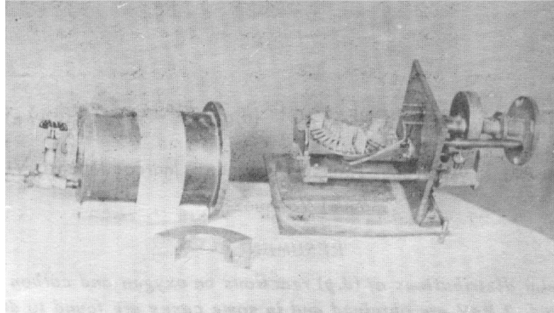


Fig. 1 Cámara de blancos. Algunas placas están colocadas en el sector porta-placas. Delante, la cubierta de latón que protege las placas contra luz y partículas dispersadas.

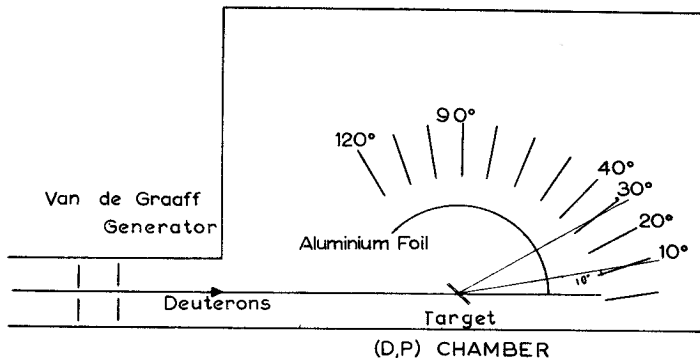


Fig. 2 Esquema de la disposición de las placas en la cámara de blancos.

var y en otros de polietileno; el primero es un compuesto de oxígeno, carbono e hidrógeno y se utilizó para estudiar los niveles y distribución angular de los protones que se producen en las reacciones ${}_8\text{C}^{12}(\text{d,p}){}_8\text{C}^{13}$ y ${}_8\text{O}^{16}(\text{d,p}){}_8\text{O}^{17}$. El blanco de polietileno contiene únicamente carbono e hidrógeno y se utilizó para estudiar la reacción ${}_6\text{C}^{12}(\text{d,p}){}_6\text{C}^{13}$. Como todos los protones provienen de esta reacción, su estudio es más sencillo en este caso.

Los protones producidos en el blanco fueron registrados por emulsiones fotográficas nucleares colocadas de manera que los protones lleguen a ellas bajo un ángulo de incidencia de 80° .

Se colocaron los filtros de aluminio para evitar que los deuterones dispersados o los protones de baja energía llegaran a las placas. A 10° se colocó un filtro de 0.0196 gr-cm^2 , a 20° se colocó otro de 0.0112 gr/cm^2 y de 30° a 120° se utilizó uno de 0.0094 gr/cm^2 .

Con ayuda de las tablas de Bethe (Bethe y Ashkin 1953) se encontró una gráfica, Fig. 3, que nos da la energía de salida del protón, si se conoce la energía con que ésta llega a cada uno de los filtros.

Los deuterones, después de atravesar el blanco fueron colectados en una placa conectada a un integrador de corriente; se encontró que una carga de $40 \mu\text{C}$ en el integrador era suficiente para producir exposición apropiada de las placas.

PREPARACION DE LOS BLANCOS.

a) **El blanco de polietileno** $(\text{C}_2\text{H}_4)_n$. Se disuelve el polietileno en tolueno o xileno, a una temperatura poco menor que la de ebullición del solvente. Esta solución se coloca en un vidrio por medio de un gotero de manera que la capa sea muy delgada. Cuando el solvente se ha evaporado, queda una película muy delgada de polietileno. Al colocar el vidrio en agua la película se despega y flota, después de lo cual se coloca en el marco deseado.

Se le coloca en una campana al vacío y se le deposita una capa de oro muy delgada por el método de evaporación. En esta forma el blanco resiste al haz de deuterones, ya que se vuelve mucho mejor conductor térmico y eléctrico, de ma-

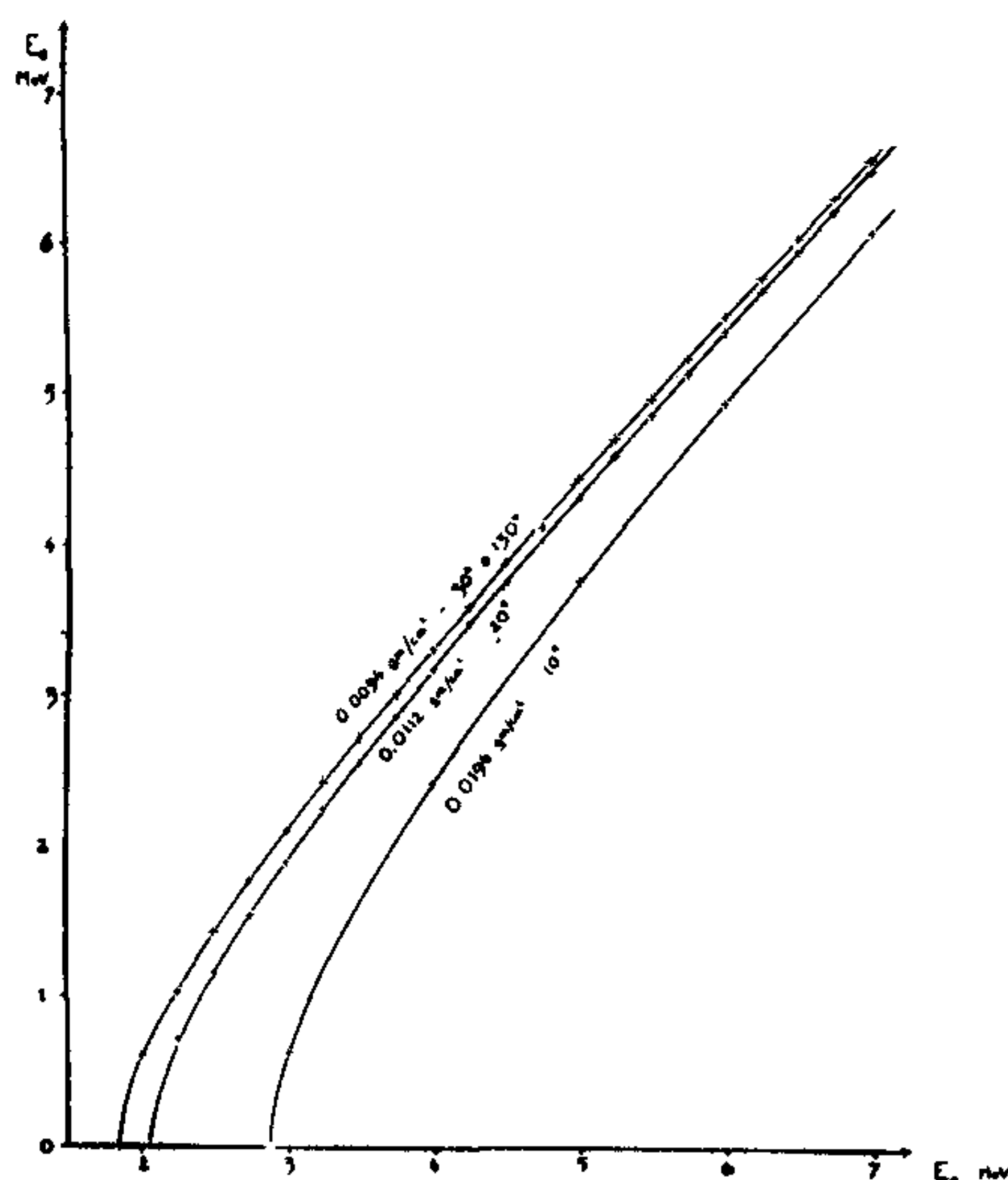


Fig. 3 Pérdida de energía de los protones en los filtros (Bethe y Ashkin 1953).
 E_0 , energía inicial, E_s , energía al salir de filtro.

nera que no se acumulan altas cargas electrostáticas debidas al haz.

b) *El blanco de formvar.* Se disuelve un gramo de formvar polivinilformal en 100 cm³ de dicloruro de etileno.

Al colocar una gota en agua se forma una película delgada que flota en ella. Se recoge con un marco de blancos en donde se deposita una capa doble.

El proceso puede repetirse varias veces de acuerdo con el espesor deseado. Se deposita una capa de oro sobre el mismo.

REVELADO DE LAS PLACAS.

El método de revelado de placas de 50 μ no presenta complicaciones.

1. Se coloca las placas durante 4 minutos en revelador Kodak a 29° C, diluido 1:1.
2. Se lavan durante seis minutos en agua corriente.
3. Se colocan en fijador Kodak F5 el doble del tiempo empleado en aclararse, a 20° C. Este paso requiere aproximadamente una hora.
4. Se lavan 30 minutos en agua corriente.

5. Se dejan secar.

Las placas empleadas fueron Kodak N. T. A. de 50μ , de tamaño 1"x3".

Se observaron, antes de usarse, con una lámpara de seguridad Kodak de la serie 0A, para comprobar que la emulsión se encontraba en buen estado. Se cortaron en dos pedazos de 1" x 1 1/2" para colocarlas en la cámara de blancos.

Después de haber sido expuestas, se pintaron sus bordes con mixtura de plátano, para evitar que se despegara la emulsión al ser revelada, ya que durante cierto tiempo fueron colocadas en vacío.

LECTURA DE LAS PLACAS.

Los protones entran a las placas formando un ángulo de 80° con la normal siendo paralelas las trayectorias. En este caso es muy fácil distinguir una trayectoria que no venga del blanco.

Las longitudes de las trayectorias fueron medidas con microscopios Zeiss "Standard" equipados con un ocular que contiene una escala de 0 a 100. Esta escala fué calibrada en micras contra una escala colocada en el objetivo y que tiene 100 divisiones /mm.

En este trabajo se utilizó un objetivo 100 x de inmersión y oculares 8 x. Se encontró que con esta amplificación la medida de la trayectorias es más sencilla y más precisa.

Los protones sólo tienen acceso a las placas a través de una ventana rectangular cuyo ancho es mayor que el de la placa y cuya altura es de 6 mm. (Fig. 1 y Fig. 2).

Se midió la franja que corresponde al eje horizontal de simetría de la ventana y las adyacentes de manera que el número de trayectorias registradas fuera aproximadamente de 1000 en cada placa.

Teniendo en cuenta que la longitud que medimos es la proyección de la trayectoria sobre su plano es necesario corregirlas para obtener el verdadero alcance.

$$l = \frac{l'}{\cos 10^\circ}$$

De la curva alcance-energía o de las tablas equivalentes a la misma, se puede saber la energía de los protones al llegar a la emulsión y con ayuda de la Fig. 3, se puede saber la energía de los protones al salir del blanco.

RESUMEN DE LA TEORIA DE BUTLER.

Para poder comparar las curvas de Butler con los resultados obtenidos, es necesario explicar brevemente (sin entrar en desarrollos matemáticos), en qué consiste la teoría de Butler, y cómo se calculan sus curvas.

Nos concretaremos únicamente al caso en el que el proyectil sea deuterón y las partículas capturadas un neutrón.

En el modelo del núcleo compuesto, el proyectil es capturado por el blanco, los nucleones del deuterón interaccionan con los del blanco y pierden totalmente su identidad. Este núcleo compuesto tiene una vida que es mucho mayor que el tiempo que hubiera empleado el deuterón en recorrer una distancia igual al diámetro del blanco. El núcleo compuesto decae en el llamado núcleo final, al emitir una partícula.

En el proceso del desmembramiento (stripping) del deuterón no se forma un núcleo compuesto. En este caso uno de los nucleones del deuterón es capturado por el blanco y el otro es rechazado sin haber formado parte del mismo en algún momento.

Cuando es capturado el protón, la partícula saliente es un neutrón.

El proceso que nos interesa en este trabajo es cuando el neutrón es capturado y la partícula saliente es un protón.

El desmembramiento del deuterón es generalmente más probable que la formación del núcleo compuesto, debido a la pequeña energía de amarre y el diámetro considerable del deuterón.

Cuando el proceso del desmembramiento es predominante en una reacción dada, se observa que la distribución angular de la partícula saliente tiene un máximo notable para un ángulo relativamente pequeño.

La posición del máximo depende únicamente de los spins y paridades de los estados inicial y final, y de la energía del deuterón. Los máximos bien defi-

nidos se deben a la conservación del momento angular y la paridad, que permiten al blanco aceptar un nucleón, con un momento angular que puede tener un número muy limitado de valores, para formar un nucleón final en un estado dado.

En sus desarrollos, Butler supone que la probabilidad de formación del núcleo compuesto es despreciable. Esta suposición se justifica en muchos casos con los resultados experimentales, y sobre todo a altas energías. En esta teoría se desprecia también el efecto coulombiano. Esto significa que la teoría vale únicamente cuando la energía del deuterón es suficientemente grande, de manera que el efecto coulombiano sea pequeño.

Se ha comprobado experimentalmente que en muchos casos la teoría da resultados cualitativos a energías del deuterón menores que 2 MeV.

Esta teoría puede utilizarse para determinar el momento angular con que es capturado el neutrón, comparando la distribución angular experimental a pequeños ángulos, con las curvas teóricas de Butler para diferentes momentos angulares del neutrón capturado.

Una vez conocido el momento angular con que es capturado el neutrón, se puede obtener una valiosa información sobre el spin y la paridad del estado final del núcleo si se conocen el spin y la paridad del estado base del blanco. La teoría requiere que la conservación de los momentos angulares esté dada por:

$$\bar{l}_n + \bar{s}_n + \bar{i} = \bar{j}$$

en forma vectorial, 0

$$\left| \bar{j} + \bar{i} + \bar{s}_n \right|_{\min.} \leq l_n \leq j + i + s_n$$

El significado de las literales es:

\bar{j} momento angular del núcleo final,

\bar{i} momento angular del núcleo blanco,

\bar{s}_n spin del neutrón capturado, y

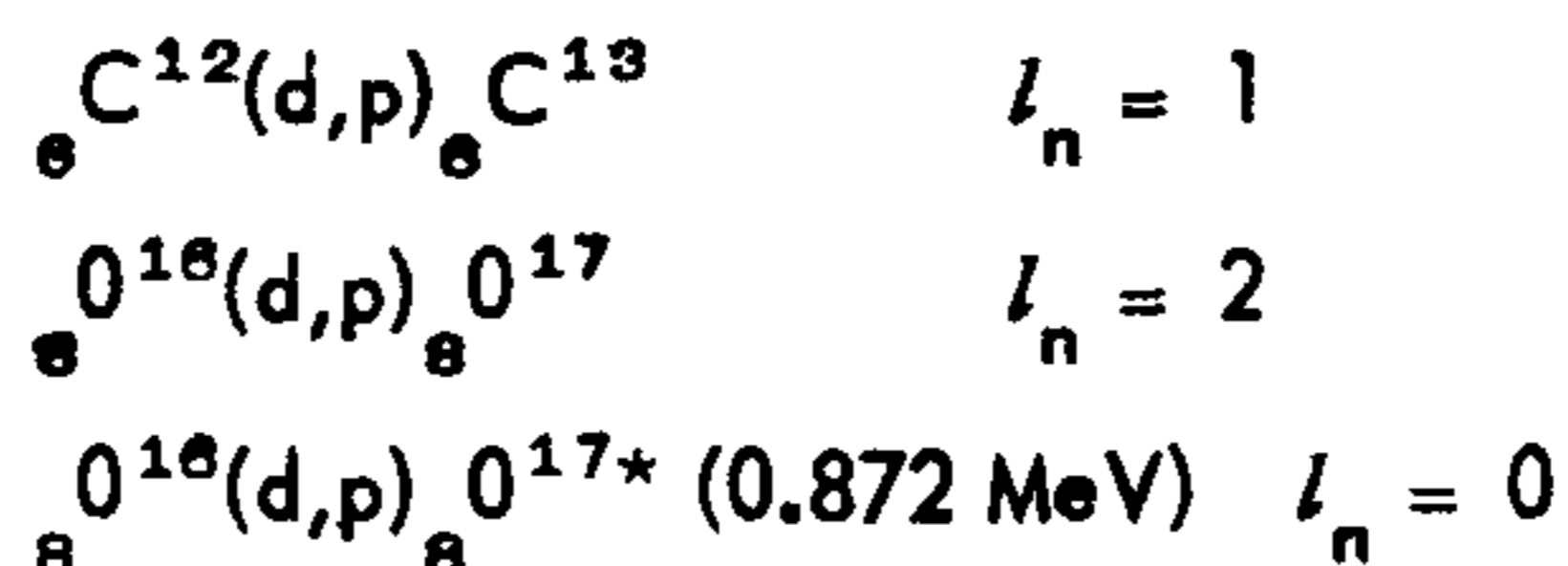
\bar{l}_n momento angular orbital del neutrón capturado.

Además las consideraciones de paridad requieren que l_n sea par cuando

el estado inicial y final tienen la misma paridad, y que sea impar cuando las paridades del estado inicial y final son diferentes.

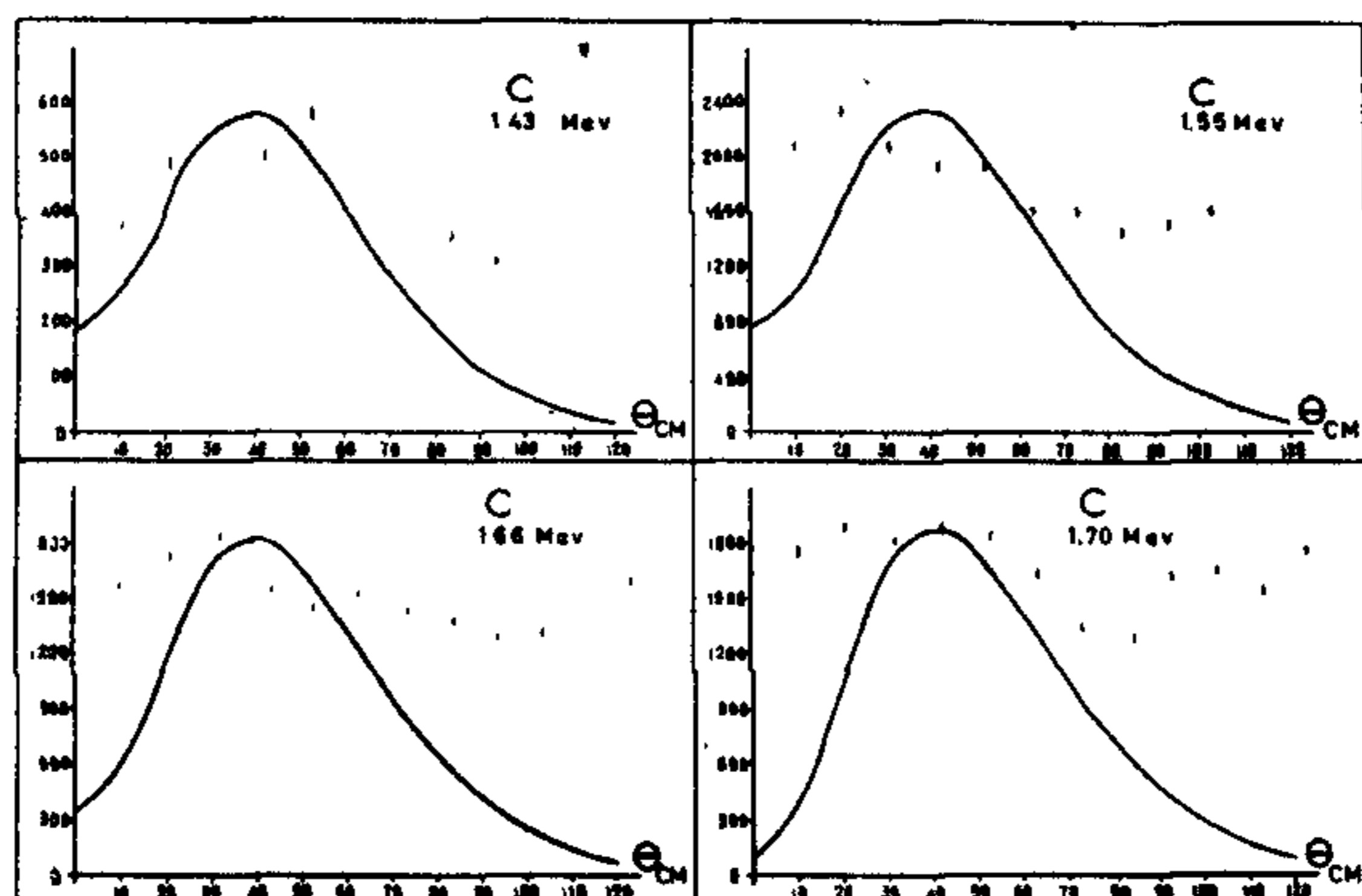
Conociendo l_n se pueden encontrar los posibles valores de J de acuerdo con el modelo vectorial: las desigualdades citadas arriba permiten solamente un valor de J en muchos casos y dos o tres posibilidades en otros casos.

Las tres reacciones estudiadas en el presente trabajo son las siguientes:



Los momentos angulares indicados aquí se han obtenidos de estudios de estas reacciones a altas energías y además son confirmados por los spins y paridades de los núcleos.

El presente trabajo fué empezado con el fin de determinar hasta qué energía del deuterón se puede aplicar la teoría de Butler y de que modo falla a energías inferiores:



Figs. 4-7 Distribuciones angulares de los protones de la reacción $\text{C}^{12}(d,p)\text{C}^{13}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de error son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).

LA REACCION $C^{12}(d,p)C^{13}$: RESULTADOS.

Blancos de polietileno fueron expuestos a energías de bombardeo (sistema de laboratorio) de 1.43, 1.55, 1.66, 1.70, 1.85, 1.90 y 1.95 MeV.

El número de trazas contadas en cada placa fué directamente convertido al sistema centro de masa, utilizando las tablas de Moskow (1948) y su extensión calculada por Nieto Casas y Serment (1954). Los resultados obtenidos con un total de 308,207 trazas contadas en estas siete series de placas se ven las figuras 4 a 10. Los errores son los estadísticos exclusivamente, sin tomar en cuenta errores sistemáticos como la variación del ángulo de salida de la reacción a través de la placa. Las curvas continuas representan los valores calculados por la teoría de Butler, sin correcciones, y normalizados al máximo de las secciones diferenciales experimentales. El momento angular del neutrón capturado se tomó igual a 1 en conformidad con los datos obtenidos de la reacción a energías de bombardeo más altas (Rotbat 1951).

Es evidente que la teoría sencilla de Butler falla para estas energías. Sólo para 1.43 MeV la curva experimental tiene cierto parecido con la teórica; y aún ahí las fórmulas mejoradas deducidas por Horowitz y Messiah (1953) darían una adaptación mejor, ya que indican picos bastante más achatados. Pero para los demás valores de la energía de bombardeo, ninguna de las dos teorías es capaz de interpretar adecuadamente estos datos.

La falla de la teoría de Butler se debe al desprecio de la interacción coulombiana y de la posibilidad de formación de un núcleo compuesto. Correcciones para tener en cuenta el efecto coulombiano han sido calculadas por Tobocman (1954, Tobocman y Kalos 1955), por Grant (1954, 1955) y por Yoccoz (1954). Los dos primeros autores obtienen un levantamiento de la curva de distribución angular a pequeños ángulos y un corrimiento de los picos hacia ángulos mayores; Yoccoz indica que las curvas deben achatarse. Tobocman y Grant toman en cuenta también otros efectos; Tobocman incluye la interacción del protón saliente con el núcleo final y la dispersión del haz de deuterones, mientras Grant trata además la formación de un núcleo compuesto por intercambio del protón, suponiendo un potencial

de oscilador armónico para el núcleo blanco a fin de tener una representación más apropiada que el potencial infinito de Horowitz y Messiah.

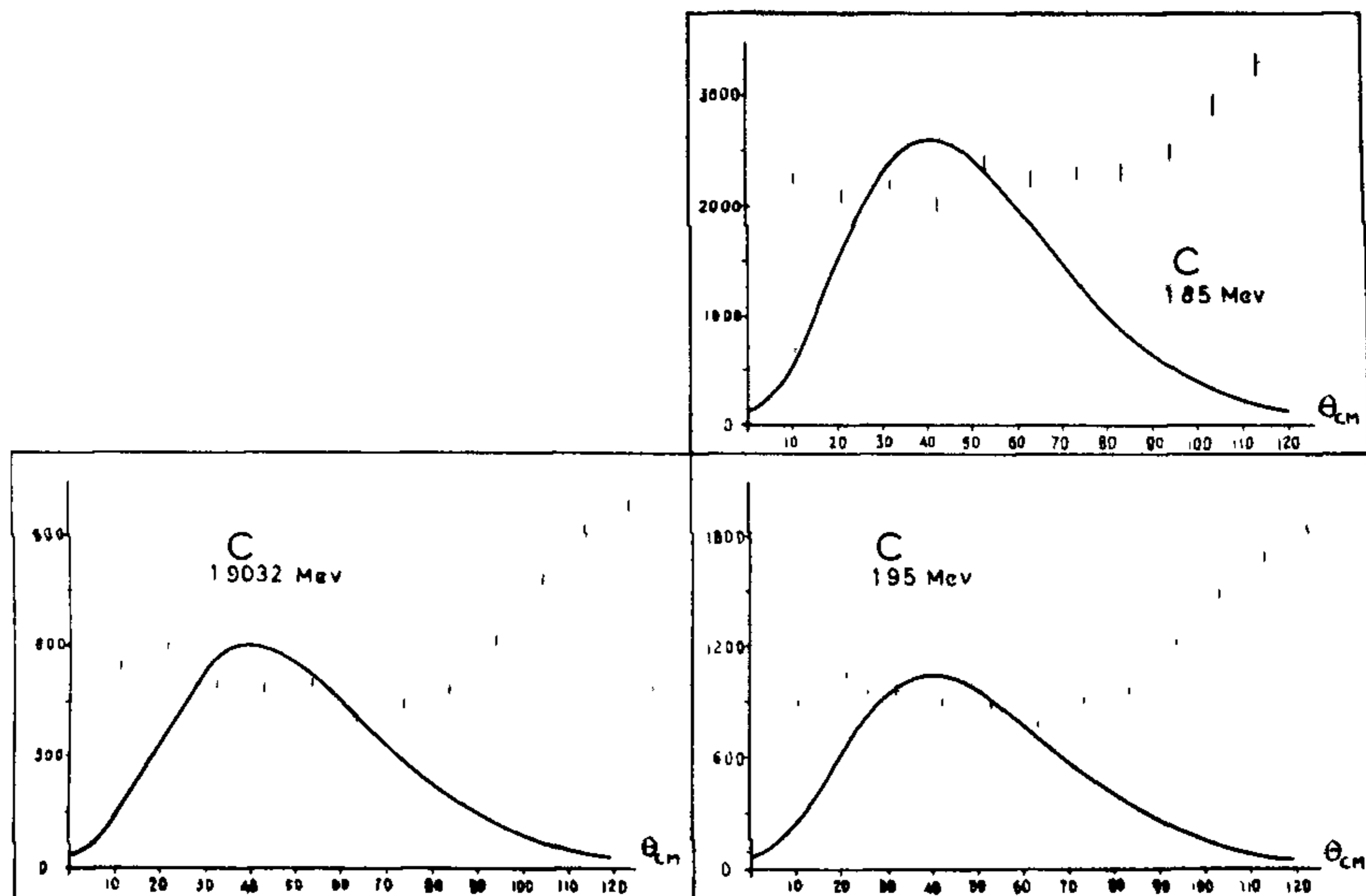


Fig. 8-10 Distribuciones angulares de los protones de la reacción $C^{12}(d,p)C^{13}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de errores son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).

Las variaciones propuestas de la sección diferencial no están siempre de acuerdo entre sí, aunque se puede decir de manera general que todas estas teorías indican máximos y mínimos bastante más pronunciado que los que muestran nuestras curvas experimentales. La distribución aproximadamente isotrópica que se obtiene para 1.66 y 1.70 MeV indica una preponderancia de la formación de un núcleo compuesto en la reacción; sería deseable una extensión de los experimentos más allá de 120° ya que en oposición a la teoría de Butler parece existir una contribución importante a ángulos grandes. Una extensión hacia ángulos grandes haría posible también aplicar el análisis propuesto por Bowcock (1955) a los datos.

Phillips (1950) ha determinado distribuciones angulares para esta reacción

a energías más bajas, y obtiene curvas del mismo tipo.

LA REACCION $O^{16}(d,p)O^{17}$: RESULTADOS.

Blancos de formvar fueron expuestos a energías de bombardeo (sistema de laboratorio) de 1.43, 1.71, 1.84 y 1.90 MeV. En cada placa se midieron 1000 trazas (en algunos casos menos), y además se contó el número de trazas en tres franjas con la misma técnica que la aplicada para los blancos de polietileno, para poder calcular la frecuencia en trazas por unidad de área con la cual ocurren las tres reacciones producidas.

Se dibujaron los alcances medidos de las trazas contra las frecuencias; una de estas gráficas está dada por la Fig. 11.

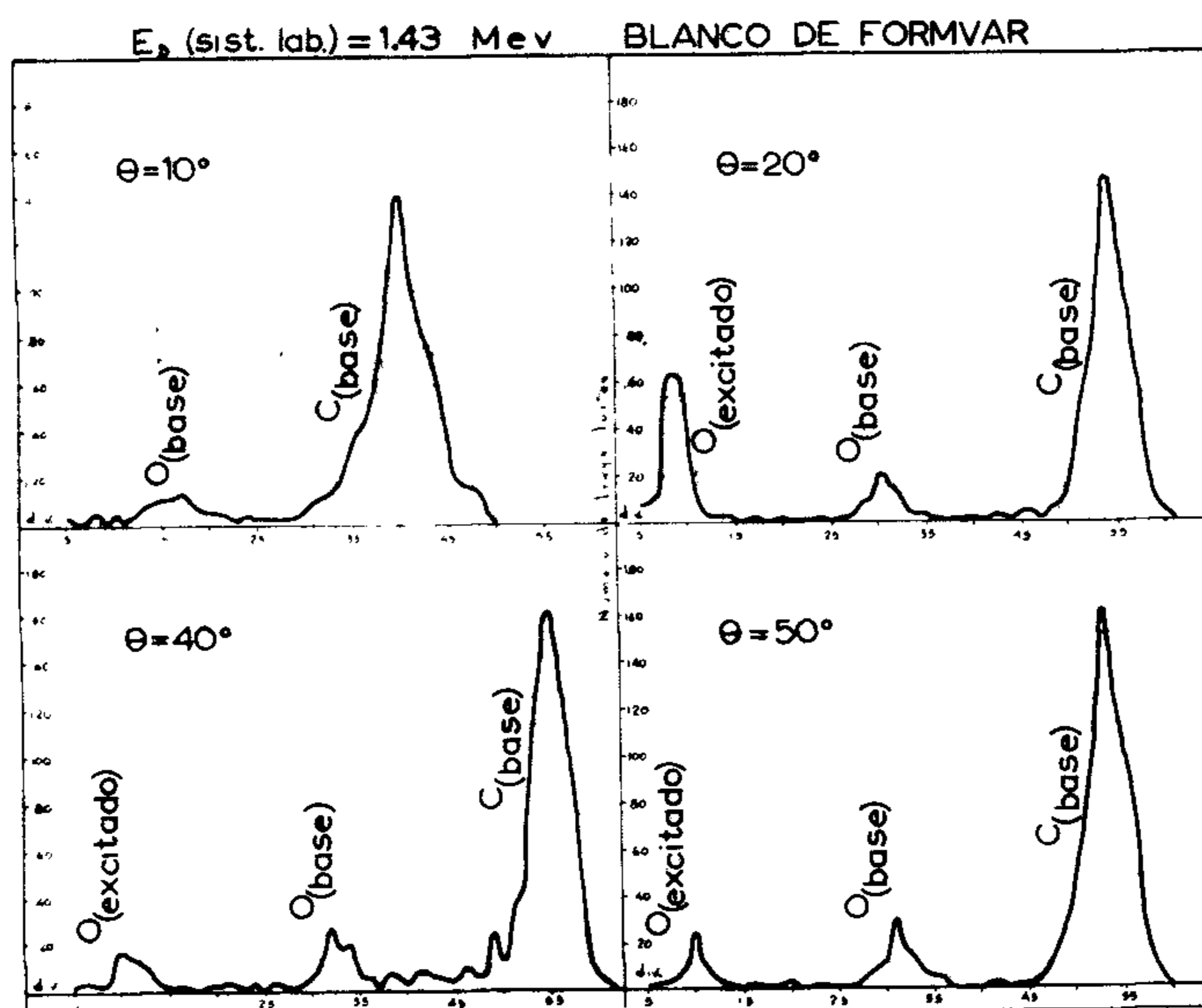


Fig. 11. Distribución de los alcances para cuatro ángulos al bombardear con deuterones de 1.43 MeV. 1 división = 1.6μ .

Se nota que los tres picos debidos a las tres reacciones se diferencian claramente hay un fondo de unas pocas trazas para cada longitud: este fondo se debe a la dispersión inelástica de protones en los bordes de la rendija definiendo el haz de protones y en el filtro, y a protones de reculada producidos en la emulsión por

neutrones de las reacciones (d,n).

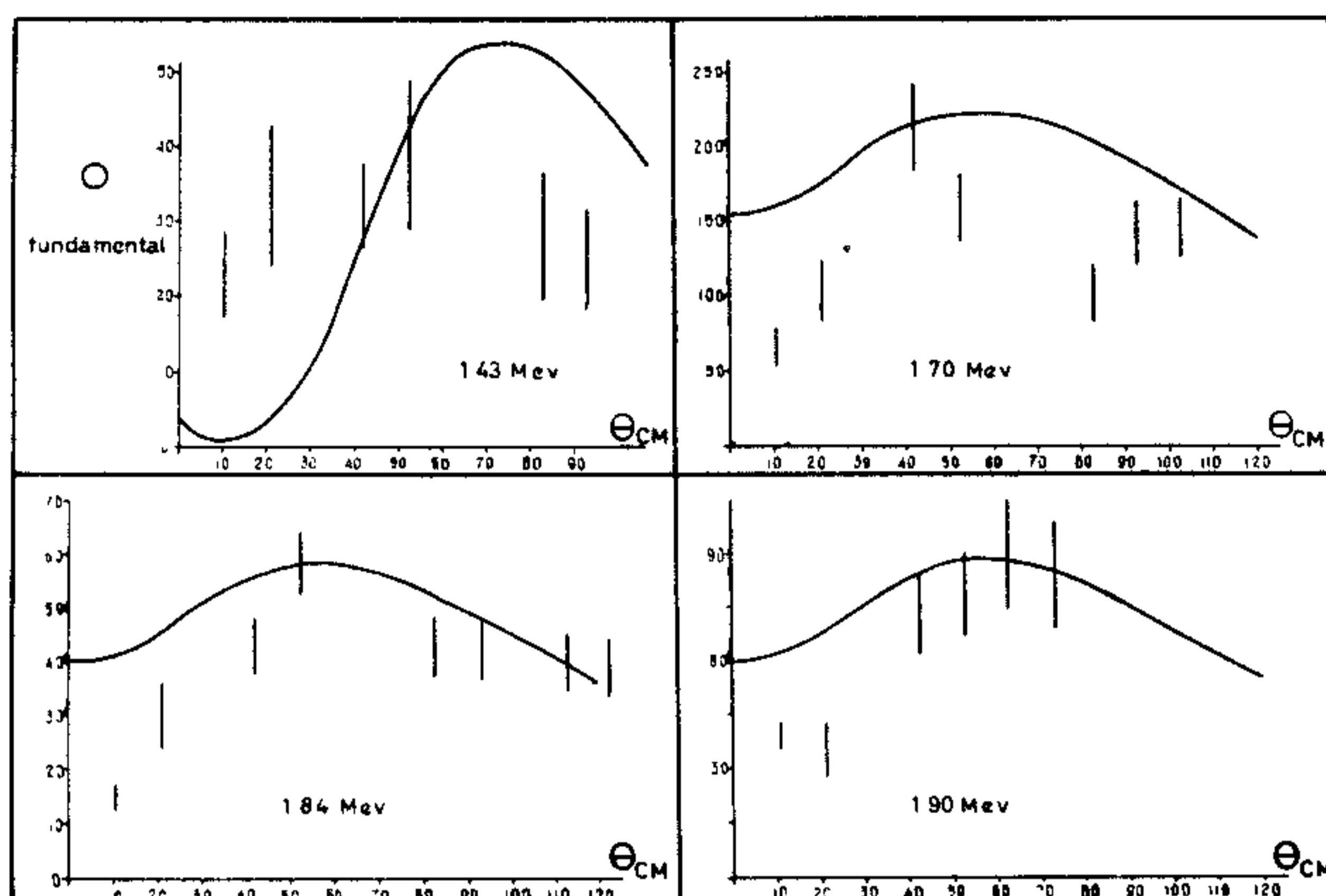
El número de partículas para cada reacción se tomó como el número de trazas contenido en el pico correspondiente, considerando que el pico queda entre los dos puntos en donde la frecuencia empieza a exceder la del fondo. Ninguna corrección se aplicó en forma de una sustracción del fondo, por la imposibilidad de estimar de una manera apropiada su valor. Ignorar el fondo no puede haber afectado notablemente los dos picos debidos al estado excitado del oxígeno y al carbono ; solamente el nivel fundamental de oxígeno contiene muy pocas trazas (1732 sobre un total de 23,884 medidas) y la corrección sería de alguna importancia, del orden del error estadístico en este caso.

Se pasa de la distribución de alcances en cada placa a la distribución angular para cada nivel y cada energía de bombardeo, y los valores así obtenidos se transfieren al sistema de centro de masa mediante las tablas ya mencionadas.

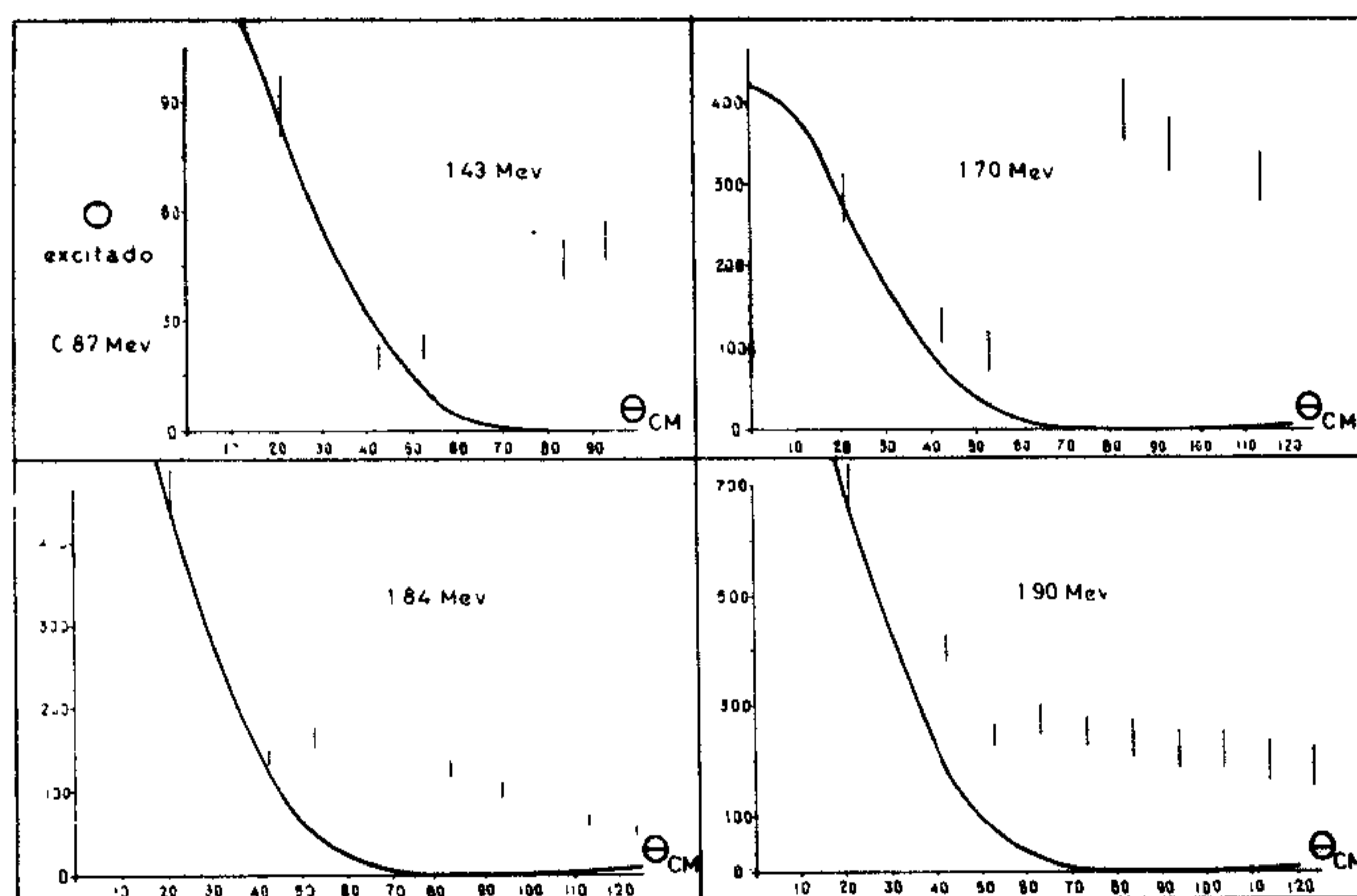
Los resultados para el nivel fundamental del O^{17} se ven en las Fig. 12 a 15. En las figuras están indicados los errores estadísticos. Las curvas continuas representan los valores calculados mediante la teoría de Butler y normalizados para coincidir con el máximo de los valores experimentales. El momento angular del neutrón capturado es igual a 2, según la determinación a altas energías de Burge, Burrows, Gibson y Rotblat (1952). Debido al número pequeño de trayectorias que corresponden a este nivel, los errores experimentales son grandes, por lo que es difícil sacar conclusiones. Se vé, sin embargo, que hay una mejor coincidencia con las previsiones de la teoría de Butler que para el caso del carbono, particularmente a las energías de 1.84 y 1.90 MeV.

LA REACCION $O^{18}(d,p)O^{17*}$: RESULTADOS.

En las mismas placas en que se observaron los grupos de protones correspondientes al estado base del oxígeno, se observaron también los grupos mucho más abundantes del primer estado excitado (0.872 MeV). De las 23,884 trazas medidas 9221 pertenecían a estos grupos. Después de los mismos cálculos que para los grupos del estado base, se obtuvieron los resultados representados en las Fig. 16 a 19. Las curvas de Butler dibujadas para la comparación corresponden a un



Figs. 12-15 Distribuciones angulares de los protones para la transición al estado base de la reacción $O^{16}(d,p)O^{17}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de error son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).



Figs. 16-19 Distribuciones angulares de los protones para la transición al primer estado excitado (0.872 MeV) de la reacción $O^{16}(d,p)O^{17}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de error son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).

momento angular de cero para el neutrón capturado (Burge, Burrows, Gibson, Rotblat 1952). En la ausencia de datos a 0° , la normalización se hizo a 20° .

Debido a la mejor estadística, los errores son más pequeños. Los datos experimentales concuerdan relativamente bien con la teoría de Butler para ángulos menores de 50° ; pero más allá aparece en todos los casos un máximo secundario que la teoría no predice. Este máximo es particularmente pronunciado para la energía de 1.71 MeV. La explicación puede encontrarse en el hecho de que a esta energía el núcleo compuesto, flúor 18, tiene un nivel excitado de 9 MeV (Ajzenberg y Lauritsen 1955).

La misma reacción ha sido estudiada con el nuevo acelerador electrostático de Saclay (Berthelot et al. 1954); los resultados para energías de 1.66, 1.78, 1.82 y 1.94 MeV obtenidos por este grupo concuerdan muy bien con los presentados aquí. Las conclusiones difieren, sin embargo, notablemente en cuanto al nivel de resonancia de 9.5 MeV en el F^{18} : mientras la resonancia de 9 MeV influye mucho sobre la forma de la distribución angular, la de 9.5 MeV no la afecta y se muestra solamente en las curvas de excitación.

Las paridades y spins de estos dos niveles de F^{18} son todavía desconocidos; pese a esto, parece lícito suponer que la diferente influencia de la formación de un núcleo compuesto en los dos casos se debe a una diferencia en la propiedad de estos dos estados excitados del flúor.

El máximo secundario observado no se puede explicar por el efecto coulombiano; a pesar de sus divergencias, ninguna de las formulaciones teóricas citadas indica un máximo a estos ángulos.

ERRORES EXPERIMENTALES.

a. Blancos de polietileno. La energía de los deuterones se conoce con una precisión de ± 15 keM. El espesor del blanco produce un error de ± 20 keM. Los ángulos en el sistema centro de masa varían de $\pm 2^\circ$.

Los errores en el recuento de las trazas se deben a las siguientes causas:

i. Fondo por dispersión y otras reacciones: aproximadamente 40 trazas sobre 1000 contadas, o sea 4%.

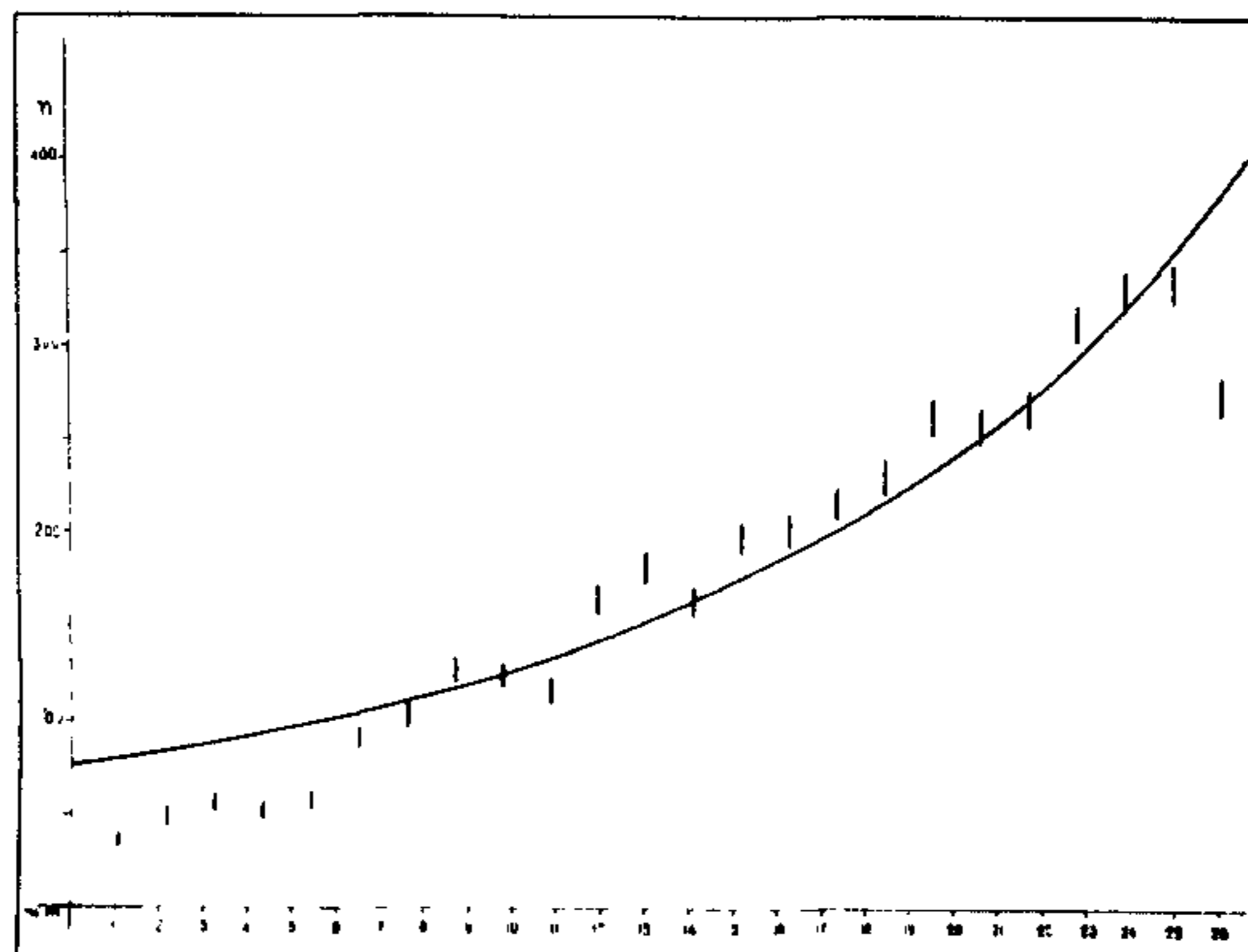


Fig. 20 Variación del número de trazas en una placa en función de la distancia al borde. El origen es el borde alejado del blanco. La curva continua representa la variación del ángulo sólido subtendido al blanco por la unidad de área. Para 26 mm el borde de aluminio elimina una parte de las trazas.

ii. **Errores de lectura:** 1%. Esta estimación incluye el error en el recuento de las franjas, así como los errores debidos a la longitud variable de las franjas y el error sobre la determinación de la anchura de las franjas.

iii. **Error estadístico.** Este error depende del número contado y se ha indicado en las figuras 6 a 9 para cada punto.

La distribución de las trazas a lo largo de la franja no es uniforme, debido a la variación del ángulo sólido. En la figura 20 se compara la distribución experimental del número de trazas en cada 0.085 mm^2 de la placa con la distribución teórica. La concordancia es buena, excepto en el extremo alejado del blanco; la pequeña desviación que se observa allí no ha recibido una explicación satisfactoria, pero su influencia sobre el error global de las determinaciones es despreciable.

b. **Blancos de formvar.** La precisión de la energía de los deuterones, el espesor del blanco, y el error sobre los ángulos son los mismos que para los blancos de polietileno.

Los errores en la determinación del número de trazas en cada grupo de protones son los siguientes:

i. Fondo por dispersión y otras reacciones: aproximadamente 40 trazas sobre 1000, o sea 4%.

ii. El esparcimiento ("straggling") causa una incertidumbre de 7 keV en la energía de las partículas o sea, para protones saliendo del blanco con una energía de 1 MeV, un error de 1%.

iii. La precisión en la determinación del número de trazas en cada pico es 2% para un pico conteniendo 1000, y proporcionalmente mayor para los picos más pequeños. Este error incluye errores en la determinación de los alcances, errores en la delimitación de los picos y errores debidos a cambios en la longitud y anchuras de las franjas.

iv. Errores estadísticos. Este error depende del número medido y se ha indicado en las figuras 12 a 19 para cada punto.

Los señores Luis y Juan Velásquez Soto fueron responsables del manejo del acelerador de Van de Graaff y de su mantenimiento en buen estado. Las señoritas Lilia Aldave L. y Gloria Cadena G. se encargaron del escrutinio microscópico de las placas. Jorge Dorantes y Alfonso Urbina hicieron el revelado de las placas.

Nuestro agradecimiento va también al Dr. Marcos Moshinsky y al Prof. W.W. Buechner, con los cuales hemos tenido muchas discusiones fructíferas acerca del presente trabajo.

REFERENCIAS

Ajzenberg, F. y T. Lauritsen 1955, Rev.Mod.Phys. , 27 , 77.

Berthelot, A. et al. 1954 , C.R. , 238 , 1312.

Bethe H.A. y J. Ashkin, 1953, en Segré, Experimental Nuclear Physics, New York 1953, Vol. 1 , P. 166.

Bowcock, J.R. 1955, Proc.Phys.Soc. A 68, 512.

- Burge, E. J. , H.B. Burrows, W.M. Gibson y J. Rotblat 1952, Proc.Roy.Soc. **A**,**210**
534.
- Butler, S.T. 1951, Proc.Roy.Soc. **A**, **208**, 559.
- Grant, I.P. 1954, Proc.Phys.Soc. **A**, **67** , 981.
- Grant I.P. 1955, Proc.Phys.Soc. **A**, **68**, 244.
- Horowitz, J. y A.M. Messiah 1953, J.Phys.Rad. , **14**, 695 .
- Moskow, M. 1948 , Tesis Johns Hopkins University, Baltimore.
- Nieto Casas L. y V. Serment 1954, Cosmos y Ciencia, **1**, No. 1.
- Phillips, G.C. 1950, Phys.Rev., **80**, 164.
- Rotblat, J. 1951, Nature, **167**, 1027.
- Tobocman, W. 1954, Phys.Rev., **94**, 1655.
- Tobocman, W. y M.H. Kalos, Phys.Rev. , **97**, 132.
- Yoccoz, J. 1954, Proc.Phys.Soc. **A**, **67**, 813.