

DESCRIPCION DINAMICA DE LA DISPERSION POR
MEDIO DE UNA FUERZA TENSORIAL

Juan Manuel Lozano

Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Enero 15, 1955)

RESUMEN

In the present paper we discuss the dynamical description of scattering by tensor forces. We obtain a generalization of the dynamical description of scattering by a potential presented elsewhere. This problem has also the interest of being a simple example of a nuclear reaction with two channels, in which the S matrix is a meromorphic function of the wave number.

En trabajos anteriores¹ se ha discutido la dispersión nuclear por medio de un potencial central de corto alcance y la relación entre los polos de la matriz S y la descripción en el curso del tiempo del proceso.

Ahora bien, es conocido² que la interacción nuclear depende no sólo de fuerzas centrales, sino también de fuerzas tensoriales; entonces tiene interés es-

tudiar la dispersión por un potencial tensorial añadido a un potencial central, desde el punto de vista del desarrollo en el tiempo del proceso y su conexión con los polos de la matriz S correspondiente. Además, este estudio tiene interés especial de ser el caso más simple de reacción nuclear, pues sólo tiene dos canales y la matriz S es meromorfa.

El Método que se empleará para resolver el problema que nos proponemos es, esencialmente, una generalización del método empleado en el caso más simple¹, por lo que en este trabajo no se harán explícitamente los cálculos. Es obvio que sólo el estado triplete presenta un nuevo interés.

Sean $V_C(r)$ y $V_T(r)$ dos potenciales continuos de corto alcance a , entonces la parte radial de la función de onda para el estado triplete satisface la ecuación matricial³:

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} (J-1)J & 0 \\ 0 & J(J+1) \end{bmatrix} + V_C(r) + \frac{V_T(r)}{2J+1} \begin{bmatrix} J-1 & -3[J(J+1)]^{\frac{1}{2}} \\ -3[J(J+1)]^{\frac{1}{2}} & J+2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \psi_{1J} \\ \psi_{2J} \end{bmatrix} = i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \psi_{1J} \\ \psi_{2J} \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde ψ_{1J} y ψ_{2J} son los coeficientes de las armónicas esféricas vectoriales de la función de onda del estado triplete para el momento angular total J :

$$\Psi = \psi_{1J} \bar{Y}_{J,J-1}^M(\theta, \varphi) + \psi_{2J} \bar{Y}_{J,J+1}^M(\theta, \varphi)$$

El sistema de unidades empleado es el sistema natural $\hbar = c = 2\mu = 1$, donde μ es la masa reducida.

Llamando k al número de onda relativo de las dos partículas y $E = k^2$ su energía, se tiene que en ausencia de los potenciales,

$$\Psi_J = \begin{bmatrix} \psi_{1J} \\ \psi_{2J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{J-1}(kr) \\ i_{J+1}(kr) \end{bmatrix} e^{-iEt} \quad ,$$

donde $i_{J \mp 1}(kr)$ son las funciones de Bessel esféricas de orden $J \mp 1$.

Sea U_J la solución de la ecuación:

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \kappa^2 - \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} (J-1)J & 0 \\ 0 & J(J+1) \end{bmatrix} - V_C - \frac{V_T}{2J+1} \begin{bmatrix} J-1 & -3[J(J+1)]^{\frac{1}{2}} \\ -3[J(J+1)]^{\frac{1}{2}} & J+2 \end{bmatrix} \right\} U_J = 0 \quad ,$$

con la condición de que si:

$$V_C, V_T \rightarrow 0, \quad U_J \rightarrow \begin{bmatrix} i_{J-1}(\kappa r) & 0 \\ 0 & i_{J+1}(\kappa r) \end{bmatrix} \quad . \quad (2)$$

Para $r \leq a$, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (2) se pueden escribir como columnas de una matriz 2×2 :

$$U_J = \begin{bmatrix} W_{11}^J(\kappa, r) & W_{12}^J(\kappa, r) \\ W_{21}^J(\kappa, r) & W_{22}^J(\kappa, r) \end{bmatrix} = W_J(\kappa, r) \quad , \quad (3a)$$

con las condiciones $W_J(\kappa, 0) = 0$, $W_J'(\kappa, 0) = I$, donde la prima ' indica derivada respecto a r .

Para $r > a$, la solución se escribe, usando la matriz S_J ,

$$U_J = \frac{1}{2} (H_J^-(\kappa r) + H_J^+(\kappa r) S(\kappa)) \quad , \quad (3b)$$

donde:

$$H_J^\mp(\kappa r) = \begin{bmatrix} h_{J-1}^\mp(\kappa r) & 0 \\ 0 & h_{J+1}^\mp(\kappa r) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

siendo $h_J^\mp(\kappa r)$ las funciones de Hankel de orden J .

Seguindo unos trabajos recientes⁴, podemos definir la matriz $R_J(\epsilon)$ en la siguiente forma:

$$W_J(\epsilon, a) = R_J(\epsilon) W_J'(\epsilon, a), \quad (5)$$

donde $\epsilon = \kappa^2$.

La matriz $R_J(\epsilon)$ así definida tiene la propiedad de que la forma hermitiana:

$$X^\dagger R_J X = R, \quad (6)$$

donde X es un vector arbitrario, es una función R de Wigner⁵.

Las matrices $R_J(\epsilon)$ y $S_J(\kappa)$ están relacionadas por la ecuación:

$$S_J(\kappa) = [H_J^+(\kappa a) - R_J(\epsilon) H_J^{+'}(\kappa a)]^{-1} [H_J^-(\kappa a) - R_J(\epsilon) H_J^{-'}(\kappa a)]. \quad (7)$$

De la relación anterior y del hecho de que la función R es de Wigner, se siguen las siguientes propiedades de la matriz $S_J(\kappa)$:

- 1- Los polos de la matriz S_J están en la parte inferior del plano complejo κ , o sobre el eje imaginario⁴.
- 2- Los polos de la matriz S_J están simétricamente colocados respecto al eje imaginario.
- 3- Para κ real, $S_J S_J^\dagger = 1$
- 4- La matriz $S_J \exp(2i\kappa a)$ es finita en la parte superior del plano complejo, excepto posiblemente sobre el eje imaginario.

$$5- S_J(\kappa) \exp(2i\kappa a) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} (-1)^{J-1} 2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - (i\kappa - \frac{1}{a}) R_J(\epsilon) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \times \\ \times (i\kappa - \frac{1}{a}) R_J(\epsilon) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 1 \left. \right\} .$$

Usando estas propiedades se puede construir la función de onda Ψ_J por el procedimiento siguiente:

$$\text{Para } t = 0, \quad \begin{bmatrix} \psi_{1J} \\ \psi_{2J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1J}(r) \\ f_{2J}(r) \end{bmatrix} = f_J(r)$$

Se define la transformada generalizada de Hankel en la forma:

$$F_J(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_J^\dagger(\kappa, r) f_J(r) r^2 dr, \quad (8)$$

y en consecuencia,

$$\Psi_J(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_J(\kappa, r) F_J(\kappa) e^{-i\kappa^2 t} \kappa^2 d\kappa. \quad (9)$$

Por otra parte, la transformada de Hankel ordinaria es:

$$\bar{F}_J(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty j_J(\kappa r) f_J(r) r^2 dr,$$

$$\text{donde } j_J(\kappa r) = \begin{bmatrix} j_{J-1}(\kappa r) & 0 \\ 0 & j_{J+1}(\kappa r) \end{bmatrix}$$

Por ser una dispersión, podemos considerar que en $t = 0$, la partícula incidente estaba fuera del alcance del potencial y entonces $f_J(r) = 0$ si $r < a$.

Se puede poner entonces:

$$F_J(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K_J(k, \kappa) \bar{F}_J(k) k^2 dk, \quad (10)$$

donde:

$$K_J(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty U_J^\dagger(\kappa, r) j_J(kr) r^2 dr \quad . \quad (11)$$

Por último, haciendo:

$$\Omega_J(r, k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_J(k, r) K_J(k, \kappa) e^{-i\kappa^2 t} \kappa^2 d\kappa \quad , \quad (12)$$

se obtiene:

$$\Psi_J(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Omega_J(r, k, t) \bar{F}_J(k) k^2 dk \quad , \quad (13)$$

que es la función de onda buscada. En vista de lo anterior, la matriz $\Omega_J(r, k, t)$ puede propiamente llamarse la "matriz de Green" del problema.

En primer lugar debe ser determinada la matriz $\Omega_J(r, k, t)$. Para esto se procede como sigue:

De la ecuación (2) para $r > a$ y de la ecuación de Bessel que satisface $j_{J+1}(kr)$, se sigue que:

$$(k^2 - \kappa^2) U_J^\dagger(\kappa, r) j_J(kr) r^2 = \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{d}{dr} r U_J^\dagger \right) r j_J(kr) - r U_J^\dagger \frac{d}{dr} r j_J(kr) \right] \quad r > a$$

Por tanto,

$$K_J(k, \kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2 - \kappa^2} \left[\left(\frac{d}{dr} r U_J^\dagger \right) r j_J(kr) - r U_J^\dagger \frac{d}{dr} r j_J(kr) \right]_a^\infty \quad ,$$

y tomando en cuenta las formas asintóticas de U_J y j_J , se tiene, finalmente:

$$K_J(k, \kappa) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4k\kappa} \{ [1 + S_J^\dagger(\kappa)] \delta(\kappa - k) + (-1)^{J-1} [1 + S_J^\dagger(\kappa)] \delta(\kappa + k) \} + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\kappa^2 - k^2} \left\{ \left(\frac{d}{dr} r U_J^\dagger(\kappa, r) \right) j_J(kr) - U_J^\dagger(\kappa, r) \frac{d}{dr} r j_J(kr) \right\}_{r=a} \quad . \quad (14)$$

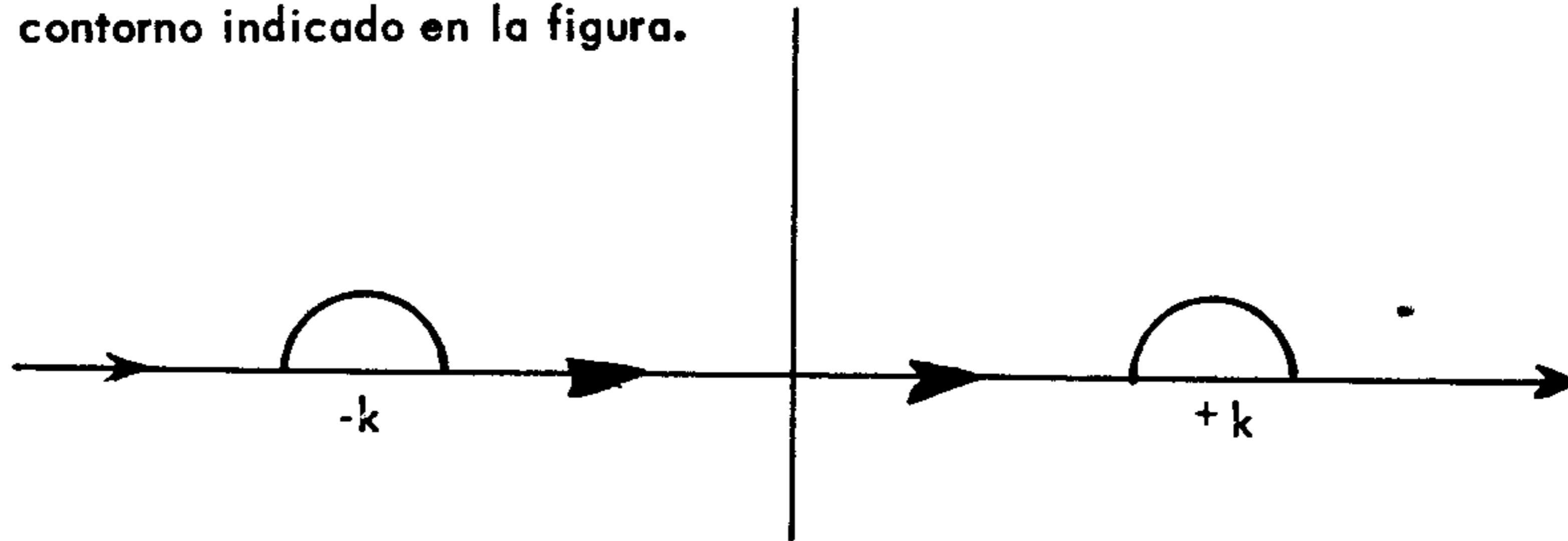
Ahora bien, de (12) y (3b), se tiene que:

$$\Omega_j(r,k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} H_j^+(\kappa, r) S_j(\kappa) K_j(k, \kappa) e^{-i\kappa^2 t} \kappa^2 d\kappa + \int_0^{\infty} H_j^-(\kappa, r) K_j(k, \kappa) e^{-i\kappa^2 t} \kappa^2 d\kappa \right\} \quad (15)$$

Haciendo en la segunda integral el cambio de variable $\kappa \rightarrow -\kappa$, y utilizando la relación $S_j(\kappa) K_j(k, \kappa) = (-1)^{j-1} K_j(k, -\kappa)$, se obtiene:

$$\Omega_j(r,k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} H_j^+(\kappa, r) S_j(\kappa) K_j(k, \kappa) e^{-i\kappa^2 t} \kappa^2 d\kappa \quad (16)$$

Esta integral se calcula substituyendo $K_j(k, \kappa)$ por su valor dado en la ecuación (14), pero antes es conveniente cambiar el contorno de integración usando el contorno indicado en la figura.



En esta forma se tiene:

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_C + i \operatorname{Res} []_{\kappa=-k} + i \operatorname{Res} []_{\kappa=k} ,$$

y usando la forma de la matriz $K_j(k, \kappa)$, la matriz de Green se expresa como:

$$\Omega_j(r,k,t) = j_j(kr) \exp(-iEt) + \frac{a}{\pi} \int \frac{1}{\kappa^2 - k^2} H_j(\kappa, r) \left\{ \frac{dr \tilde{U}_j(\kappa, r)}{dr} j_j(kr) - \tilde{U}_j(\kappa, r) \frac{d}{dr} j_j(kr) \right\}_{r=a} \times \exp(-i\kappa^2 t) \kappa^2 d\kappa .$$

Pero la matriz $H_J^+(\kappa, r)$, que contiene a $h_{J-1}^+(\kappa r)$ y $h_{J+1}^+(\kappa r)$, puede expresarse como suma de términos del tipo $(\kappa r)^{-p}$, por lo que la integral se puede poner:

$$\int_C = (-i)^J \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{J-1} \frac{C_p}{(-ir)^p} & 0 \\ 0 & -\sum_{p=0}^{J+1} \frac{C_p}{(-ir)^p} \end{pmatrix} \int_C \frac{\Phi_J(k, \kappa)}{\kappa^p} \exp[i\kappa(r-a)] \exp(-i\kappa^2 t) d\kappa,$$

donde la matriz $\Phi_J(\kappa)$ está dada por:

$$\Phi_J(k, \kappa) = \frac{\kappa \exp(i\kappa a)}{(\kappa-k)(\kappa+k)} \left\{ \frac{d}{dr} r \tilde{U}_J(\kappa r) j_J(\kappa r) - \tilde{U}_J(\kappa r) \frac{d}{dr} r j_J(\kappa r) \right\}_{r=a}.$$

Ahora bien, el método que se usa para evaluar explícitamente la integral anterior mediante el uso del teorema de la convolución es, en virtud de la analogía formal entre este resultado y el obtenido en el caso más simple de sólo un potencial central¹, y del hecho de que las propiedades de la matriz $S_J(\kappa)$ son también formalmente análogas a las anteriormente establecidas para el potencial central, una generalización del procedimiento ya usado, por lo que es fácil ver que la matriz de Green $\Omega_J(r, k, t)$ tiene la forma:

$$\Omega_J(r, k, t) = j_J(\kappa r) \exp(-iEt) - (-1)^{J-1} \frac{a^2}{r} \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{J-1} & 0 \\ 0 & -\sum_{p=0}^{J+1} \end{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_\alpha(k)}{\kappa_\alpha^p} \chi(r-a, \kappa_\alpha t) \quad (18),$$

donde κ_α son los polos de la matriz $S_J(\kappa)$ y además los polos del integrando en $\pm k$; las matrices A_α son los residuos:

$$A_\alpha(k) = \text{Res} [\Phi_J(k, \kappa)]_{\kappa=\kappa_\alpha},$$

y la función $\chi(r-a, \kappa_\alpha t)$ es la función introducida por Moshinsky⁶.

Nótese que el caracter matricial de $A_\alpha(k)$ produce una mezcla de los momentos angulares orbitales $J-1$ y $J+1$, por lo que este resultado no es una mera duplicación de lo que sucede en el estado singulete, y es, en consecuencia, un resultado novedoso.

Finalmente substituyendo el valor de la matriz de Green dado en la ecuación (18), en la ecuación (13), se obtiene la función de onda $\Psi_j(r,t)$; pero es más interesante encontrar el comportamiento asintótico de la función de onda cuando $j \rightarrow \infty$, usando el valor asintótico de la función $\chi(r-a, \kappa_\alpha t)$; el resultado es el siguiente:

$$\Psi_j \xrightarrow[r > a]{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [H_j^- + H_j^+ S_j(k)] \bar{F}_j(k) \exp(-ik^2 t) k^2 dk - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a^2}{r} \begin{pmatrix} \sum_{p=0}^{J-1} & 0 \\ 0 & \sum_{p=0}^{J+1} \end{pmatrix} \sum_\alpha \frac{\bar{A}_\alpha}{\kappa_\alpha^p} \exp(-i \kappa_\alpha a) \exp(i(\kappa_\alpha r - \kappa_\alpha^2 t)) \quad , \quad (19)$$

donde la matriz \bar{A}_α está dada por:

$$\bar{A}_\alpha = \int_0^\infty A_\alpha(k) \bar{F}_j(k) k^2 dk \quad , \quad (20)$$

y la suma sobre α se extiende sobre los polos de la matriz S_j cuyo argumento θ cumpla la condición $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$.

La integral en la ecuación (19) representa la forma estacionaria del proceso de dispersión y el segundo término, que decae con el tiempo por ser κ_α complejo, representa unos estados quasi-estacionarios de energía positiva, que se forman durante el proceso de la dispersión.

Es interesante hacer notar que la posibilidad de dar una descripción causal de la dispersión depende de que los polos de la matriz S_j estén en la parte inferior del plano complejo, pues si se les permite estar en la parte superior, la matriz de Green y la función de onda crecerían indefinidamente con el tiempo.

El autor agradece al Dr. Marcos Moshinsky la discusión del presente trabajo.

REFERENCIAS

1. J.M.Lozano, *Rev.Mex.Fis.* **2**, 155 (1953).
2. J.M.Lozano, *Rev.Mex.Fis.* **3**, 63 (1954).
2. Blatt & Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*; John Wiley and Sons, New York, 1952.
3. M.Moshinsky, *Journal de Physique* **15**, 264 (1954).
4. W.Laskar y M.Moshinsky, *Comptes Rendus* **238**, 2496 y **239**, 29 (1954).
5. E.P.Wigner, *Annals of Math.* **53**, 36 (1951).
6. M.Moshinsky, *Phys.Rev.* **84**, 525 (1951).