

## MOVIMIENTOS COLECTIVOS Y LAS REACCIONES NUCLEARES.

Marcos Moshinsky

(Recibido: Abril 1, 1956)

Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México e  
Instituto Nacional de la Investigación Científica.

### RESUMEN

*The present paper aims at giving a unified discussion of the influence of collective motions on nuclear reactions, where by collective motions we shall understand essentially the type of surface deformation and coupling proposed by A. Bohr<sup>2</sup>. A guiding principle in the present paper will be the analogy discussed previously by the author<sup>4</sup>, between the effect of collective motions on the scattering of nucleons and the classical problem of scattering of sound waves by soap bubbles. In both problems the scattering is influenced by interior and surface effects with many points of resemblance.*

*The general outline of the paper goes as follows: In section II we give a brief abstract of the nature of collective motions and their interactions with incident nucleons. In section III we deal with a perturbation method for the inelastic scattering of nucleons by collective motions, where we start from an initial state in which the scattering by the interior of the nucleus is already taken into account.*

The inelastic scattering amplitude is determined in terms of the initial wave function at the surface of the nucleus in the incoming and outgoing channels. In section IV we discuss the validity of the perturbation approximation with the help of the expectation value for the perturbed wave function of the angular momentum  $L_z$  of the nucleon. We find that the perturbation method fails at resonance energies inside a certain range.

In section V we turn then to what we could call a Tamm-Dancoff approach to the collective effects, in which we limit ourselves to a definite number of states (the simplest case being two states of 0 and 1 phonon respectively) and carry out a rigorous analysis for them. We obtain the scattering amplitude for both elastic and inelastic scattering, and find that for the former case the logarithmic derivative at the surface is a sum of two parts, one due to the interior of the nucleus and one due to collective effects. The net result of the interference between these two effects will be a broadening of the ordinary resonances as shown in table #3 and a corresponding decrease in the maximum of the resonances. These results are in general agreement with those of the cloudy crystal ball model. The validity of the Tamm-Dancoff approximation is discussed again with the help of the expectation value of  $L_z$ .

The analysis carried out in the previous sections is given in terms of the phonon excitation of the nucleus which would be likely only for nuclei near closed shells. In section VI we consider the case of strongly deformed target nuclei, where rotational excitations are likeliest, and discuss the scattering of nucleons by these nuclei, both in the perturbation and Tamm-Dancoff approximations. The analysis can be carried out in a fashion similar to that of the previous sections, and the final results only substitute the deformation parameter  $\beta$  for the  $5\hbar(4BC)^{-\frac{1}{2}}$  of the phonon case. The broadening of the resonances is correspondingly changed as shown in table #5.

In all previous sections approximations of one sort or another were made, not always in a justifiable fashion. It is of interest, therefore, to show that a procedure somewhat similar to the one used in the discussion of the scattering of sound waves by soap bubbles could give rise to a formalism in Fock space<sup>10</sup> that

*allows an exact description of the scattering of nucleons by surface motions. The results of this analysis justify from another viewpoint the general characteristics of the scattering process obtained with the help of a Tamm-Dancoff approximation. Finally in section VIII we recapitulate some of the main conclusions and indicate possible further developments.*

## I. INTRODUCCION

Desde que la importancia de los efectos colectivos en los problemas de estructura nuclear se hizo patente a través del trabajo inicial de Rainwater<sup>1</sup> sobre cuadrupolo eléctrico de los núcleos, y en particular a través de los trabajos de A. Bohr<sup>2,3</sup> y sus colaboradores, se ha investigado la influencia de estos efectos colectivos en un número cada vez mayor de fenómenos asociados con los núcleos. En particular, la influencia de estos movimientos colectivos en los spins, momentos magnéticos y cuadrupolos eléctricos de los núcleos, así como la presencia de niveles de rotación en los núcleos deformados<sup>3</sup>, han sido ampliamente corroborados desde el punto de vista experimental. Es de interés por lo tanto, llevar a cabo un análisis de los efectos colectivos en la teoría de las reacciones nucleares.

Para tener una idea intuitiva de la forma como aparecen los efectos colectivos en las reacciones nucleares, el autor en un trabajo previo<sup>4</sup> discutió el problema clásico de la dispersión de ondas sonoras por gotas de líquido o por pompas de jabón. En particular en el caso de las pompas de jabón, se vió que la dispersión estaba influenciada tanto por las vibraciones excitadas en el gas dentro de la pompa, como por las vibraciones excitadas en la superficie de ésta. Un fenómeno muy parecido deberá ocurrir en el caso de dispersión de nucleones (neutrones en el presente análisis para evitar la dificultad del campo coulombiano) por los núcleos. Tenemos allí por un lado la dispersión o captura por lo que pudiéramos llamar el interior del núcleo, que se puede representar de acuerdo con las teorías bien conocidas<sup>5</sup>, y por otro, la dispersión por los movimientos superficiales del núcleo. Este último efecto puede analizarse empleando el potencial de interacción entre el nucleón incidente y las vibraciones superficiales propuestos por Bohr<sup>2</sup>.

Algunos aspectos de los efectos colectivos con las reacciones nucleares han sido analizados por Bohr y Mottelson<sup>8</sup> en lo que se refiere a su influencia en la explicación de las resonancias gigantes de Weiskopff et al.,<sup>6</sup> por Yoshida<sup>7</sup> en lo que se refiere a su influencia en las anchuras de los niveles de los núcleos compuestos, y por Hayakawa, Yoshida<sup>8</sup> y Wandel<sup>9</sup> en la aproximación de acoplamiento fuerte, esto es, en la dispersión por núcleos fuertemente deformados.

El propósito del autor es hacer ver como la influencia de los efectos colectivos puede derivarse siguiendo el mismo tipo de razonamiento para todos los diferentes casos que se puedan presentar, e indicando las limitaciones dentro de las cuales son válidos los resultados. En particular las ideas intuitivas del trabajo anterior<sup>4</sup> nos sirven para interpretar los diferentes términos asociados con el proceso de dispersión que aparecen en la derivada logarítmica<sup>5</sup>.

El plan de trabajo sigue los siguientes lineamientos:

- a) Indicamos brevemente el potencial de interacción así como la descripción general de las vibraciones colectivas que necesitamos para nuestro análisis<sup>2,3</sup>.
- b) Considerando la interacción entre el nucleón y las vibraciones colectivas como una perturbación, obtenemos la sección para dispersión inelástica.
- c) Hacemos un análisis de la validez del método de perturbaciones utilizado en el inciso anterior, y encontramos que no es válido en las cercanías de resonancias.
- d) Procedemos entonces a analizar el problema dentro de una aproximación de Tamm-Dancoff obteniendo así la influencia de los efectos colectivos tanto en la dispersión elástica como en la inelástica.
- e) En el caso de dispersión elástica, la derivada logarítmica de la función de onda del nucleón sobre la superficie, difiere de la derivada logarítmica que se tendría despreciando los efectos de los movimientos colectivos, por términos cuyo efecto neto es el de aumentar la anchura de las resonancias por valores que oscilan entre 6 Mev si  $A \sim 50$  hasta 2.4 Mev si  $A \sim 200$ .
- f) Consideramos tanto desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones, como desde el punto de vista de Tamm-Dancoff la dispersión de nucleones por núcleos fuertemente deformados por los movimientos colectivos. Este tipo de análisis se aplicaría principalmente a núcleos blancos situados entre capas cerradas, mientras

que en el inciso (d) se obtienen las secciones para núcleos de capas cerradas o cercanos a ellas.

g) El ensanchamiento observado podría obtenerse sobre un análisis enteramente análogo al que se lleva a cabo en la dispersión del sonido por pompas de jabón, si se supone que el nucleón incidente puede incorporarse a los movimientos de la superficie de acuerdo con un formalismo introducido por el autor<sup>10</sup> y por F. Medina Nicolau<sup>11</sup>

h) Finalmente, resumimos las principales conclusiones e indicamos posibles generalizaciones de los resultados obtenidos.

## II. EL HAMILTONIANO DEL PROBLEMA.

Siguiendo los lineamientos A. Bohr<sup>2</sup>, el hamiltoniano del problema puede dividirse en tres partes:

$$H = H_p + H_s + H_{int.} \quad (2.1)$$

donde  $H_p$  es el hamiltoniano de la partícula incidente, que desde luego corresponde a una partícula libre fuera del radio del núcleo, y dentro del núcleo debe representar las interacciones con todos los nucleones que idealizaremos por medio de un potencial central  $V(r)$ . Esta idealización no implica restricción, ya que como veremos, lo único que aparecerá en las fórmulas finales será la derivada logarítmica asociada a la dispersión por el interior del núcleo, que podemos determinar por alguno de los diversos procedimientos indicados por Blatt y Weisskopf<sup>5</sup>. En (1)  $H_s$  representa al hamiltoniano de la superficie que deberá estar dado en términos de los parámetros  $a_{\lambda\mu}; \mu = -\lambda.. \lambda; \lambda = 0, 1, 2..$  que caracterizan a la deformación del núcleo, así como de sus cantidades de movimientos conjugadas  $\pi_{\lambda\mu}$ . La deformación del núcleo estaría dada por la fórmula:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right] \quad (2.2)$$

con  $a_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu a_{\lambda, -\mu}$  para que  $R$  sea real, y  $R_0$  es el radio del núcleo no deformado. Si nos restringimos a las vibraciones de frecuencia mas baja correspon-

dientes a  $\lambda = 2$ , el hamiltoniano de la superficie toma la forma:

$$H_s = \sum_{\mu=-2}^2 [ B^{-1} (-1)^\mu \pi_\mu \pi_{-\mu} + C (-1)^\mu a_\mu a_{-\mu} ] \quad (2.3)$$

donde por comodidad suprimimos el indice  $\lambda = 2$ . Los coeficientes B y C estarían determinados por las características del nucleo representado como una gota de líquido cargado, y para diferentes valores del número de masa A tenemos los siguientes valores de Ford<sup>12</sup>:

Tabla # 1

A	C (Mev)	$\hbar^2 B^{-1}$ (Mev)	$\hbar \omega = \hbar (C/B)^{1/2}$ (Mev)
50	54	0.251	3.68
100	65.6	0.0794	2.28
200	62.9	0.0249	1.25

Finalmente,  $H_{int}$  de (1) representa al hamiltoniano de interacción entre la partícula incidente y las vibraciones de la superficie. La dependencia de  $H_{int}$  sobre las coordenadas angulares de la partícula y sobre las  $a_\mu$  es bien conocida<sup>2</sup>, pero su dependencia sobre la coordenada radial de la partícula no se especifica en la literatura, y en el presente trabajo supondremos que esa dependencia radial es de la forma de una  $\delta(r - R_0)$ . Para derivar la forma completa de  $H_{int}$  podemos considerar que si el potencial  $V(r)$ , que representa en forma idealizada las interacciones del nucleón con el nucleo,  $\simeq -V_0$  cuando  $r \simeq R_0$ , cualquier elemento de matriz de  $H_{int}$  puede escribirse en el supuesto de deformaciones pequeñas comparadas con  $R_0$ , como:

$$\iiint \psi_\lambda^* H_{int} \psi_\lambda d\tau = -V_0 [ \iiint_{\text{región limitada por superficie}} \psi_\lambda^* \psi_\lambda d\tau - \iiint_{\text{región limitada por esfera } R_0} \psi_\lambda^* \psi_\lambda d\tau ] \quad (2.4)$$

$$\simeq -V_0 R_0 \iint \left[ \sum_{\mu} a_{\mu}^* Y_{2\mu}(\theta, \varphi) \right] \psi_{\lambda}^* \psi_{\lambda} R_0^2 d\Omega, \quad (2.4)$$

y de aquí se ve  $H_{int}$  toma la forma:

$$H_{int} = -V_0 R_0 \delta(r - R_0) \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Y_{2\mu}(\theta, \varphi) a_{-\mu} \quad (2.5)$$

La forma (2.1) del hamiltoniano en donde  $H_s$  y  $H_{int}$  estarán dadas por (2.3) y (2.5) respectivamente, es la apropiada en el caso de acoplamiento débil.<sup>2</sup> Para el caso de acoplamiento fuerte debemos expresar  $H_s + H_{int}$  en un sistema de coordenadas fijo en el núcleo y no fijo en el espacio como en el presente caso. Restringiéndonos por el momento al caso de acoplamiento débil, (volveremos al caso de acoplamiento fuerte en la sección VI) tenemos que en (2.1) el  $H_{int}$  puede considerarse como una perturbación comparado tanto con  $H_p$  como  $H_s$ . Es pues conveniente partir de un sistema completo de estados  $H_p$  y  $H_s$  para hacer el análisis.

Como es bien sabido<sup>2</sup>, podemos definir un momento angular  $Q$  asociado con los movimientos de la gota de líquido, en la forma:

$$Q = i \sum_{\mu, \mu'} q_{\mu\mu'} a_{\mu} \pi_{\mu'} \quad (2.6)$$

donde  $q_{\mu\mu'}^x$ ,  $q_{\mu\mu'}^y$ ,  $q_{\mu\mu'}^z$  son las matrices que representan las rotaciones infinitesimales a lo largo de los tres ejes para una representación del grupo de rotaciones de orden 2. De la forma de estas matrices<sup>13</sup> y de (2.6), vemos que se satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[Q_z, a_{\mu}] = \mu a_{\mu}; \quad [Q_x \pm i Q_y, a_{\mu}] = \{(2 \pm \mu)(2 \pm \mu + 1)\}^{\frac{1}{2}} a_{\mu \pm 1} \quad (2.7)$$

De (2.7) concluimos que las  $a_{\mu}$ ,  $\mu = -2, \dots, 2$  corresponden a un tensor en el sentido de Racah. De (2.6) y (2.3) tenemos que  $Q$  es una integral de movimientos y que por lo tanto,  $H_s$ ,  $Q^2$ ,  $Q_z$  son las integrales de movimiento que

caracterizan a los desplazamientos de la superficie. Los estados de la superficie estarán caracterizados por el ket  $| N q \mu \rangle$  que satisface:

$$\begin{aligned} H_s | N q \mu \rangle &= \left(\frac{5}{2} + N\right) \hbar \omega | N q \mu \rangle ; Q^2 | N q \mu \rangle = \\ &= q (q + 1) | N q \mu \rangle \\ Q_z | N q \mu \rangle &= \mu | N q \mu \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $N$  es el número de fonones en la superficie.

Para el nucleon incidente tenemos que considerar el hecho que además de su momento angular orbital, tiene spin. Si suponemos por el momento que en el interior del nucleo no hay fuerzas de acoplamiento spin-órbita, el hamiltoniano (2.1) sería independiente del spin y podríamos caracterizar el estado del nucleón simplemente por su momento angular orbital  $l$ . Supondremos también que el spin del nucleo blanco es 0. Estas dos suposiciones nos restringen a cierto tipo de nucleos en particular a los nucleos par-par cercanos a las capas cerradas, donde esperaríamos que se realizara la hipótesis del acoplamiento debil que vamos a discutir en primer término. Las suposiciones que hemos hecho no alteran las características esenciales de los fenómenos que nos interesan, y en cambio simplifican considerablemente los cálculos. El estado del nucleón puede representarse por:

$$| \epsilon l m \rangle = r^{-1} u_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.9)$$

donde  $u_l(kr)$  representa la parte radial y  $k$  está dado por:

$$k = (2m_0 \epsilon / \hbar^2)^{\frac{1}{2}} ; E = \epsilon + (N + 5/2) \hbar \omega \quad (2.10)$$

$E$  siendo la energía total de la superficie mas la de la partícula.

Como el hamiltoniano de interacción (2.5) contiene un producto escalar de dos tensores de Racah  $Y_{2\mu}$  y  $\alpha_\mu$ , es evidente que  $I = L + Q$ , que represen-

ta la suma de los momentos angulares de la superficie y la partícula, es una integral de movimiento del hamiltoniano completo. De aquí que conviene trabajar en representaciones donde la  $I$  es diagonal y para ello construimos los kets:

$$| l ; N q ; I M \rangle = \sum_{\mu, m} \langle l q m \mu | I M \rangle Y_{lm}(\theta, \varphi) | N q \mu \rangle \quad (2.11)$$

Las eigenfunciones del hamiltoniano no perturbado  $H_s + H_p$ , y de  $L^2, Q^2, I^2, I_z$  toman la forma:

$$r^{-1} u_l(kr) | l ; N q ; I M \rangle \quad (2.12)$$

Tenemos pues la familia de eigenfunciones que necesitamos para atacar el problema de la dispersión de nucleones en el caso de acoplamiento débil, y en la siguiente sección discutiremos el caso de dispersión inelástica con la absorción de un fonón por las vibraciones de la superficie.

### III.- DISPERSION INELASTICA POR LOS MOVIMIENTOS COLECTIVOS.

Consideremos que antes de intervenir las vibraciones colectivas, el sistema de núcleo mas nucleón tenía un momento angular relativo  $l$  y se encontraba en su estado base en lo que a movimientos colectivos se refiere, es decir  $N = 0$ . Tenemos entonces el estado inicial:

$$r^{-1} u_{l_0}(k_0 r) | l_0 ; 00 ; I M \rangle \quad (3.1)$$

donde  $I = l_0$  y  $k_0$  están dados por (2.10) cuando  $N = 0$ .

Están ya incluidos en  $u_{l_0}(k_0 r)$  los efectos de dispersión y absorción debidos a la parte interior del núcleo.

Nos preguntamos ahora que tipo de transiciones puede inducir la  $H_{int}$  de (2.5). Sabemos que las  $\alpha_\mu$  que aparecen en (2.5) puede expresarse como<sup>2</sup>:

$$\alpha_\mu = (\hbar/2 B \omega)^{\frac{1}{2}} ( b_\mu + (-1)^\mu b_{-\mu}^* ) \quad (3.2)$$

en donde  $b_{\mu}^*$  es el operador bien conocido de creación de un fonón y  $b_{\mu}$  el correspondiente de aniquilación. De (2.5) y (3.1) vemos que  $H_{int}$  solo puede llevar a estados de un fonón del tipo:

$$r^{-1} u_{l_1}(k_1 r) | l_1 ; l_2 ; I M \rangle \quad (3.3)$$

donde:  $l_1 = l_0 \pm 2$ ,  $l_0$  y  $(\hbar^2 / 2 m_0) (k_0^2 - k_1^2) = \hbar \omega$ .

Como (2.5) solo actúa cuando  $r = R_0$ , tenemos que, si la interacción en el interior del núcleo puede representarse por un potencial  $V(r)$ , la función  $u_{l_1}(k_1 r)$  satisface:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l_1(l_1 + 1)}{r^2} - \frac{2 m_0 V(r)}{\hbar^2} + k_1^2 \right] u_{l_1}(k_1 r) = 0, \text{ si } r \neq R_0 \quad (3.4)$$

Si proponemos una función  $\Psi$  que incluye los estados del tipo (3.1) y (3.3), obtenemos del hamiltoniano (2.1) la condición a la frontera:

$$R_0 \left[ \frac{d}{dr} u_{l_1}(k_1 r) \right]_{r=R_0-0}^{r=R_0+0} = - (k_0 R_0)^2 u_{l_0}(k_0 R_0) \langle \gamma_1 | H_{\omega} | \gamma_0 \rangle \quad (3.5)$$

donde  $k_0 = (2 m_0 V_0 / \hbar^2)^{1/2}$  y el elemento de matriz es:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1 | H_{\omega} | \gamma_0 \rangle &\equiv \langle l_1 ; l_2 ; I M | \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Y_{2\mu}(\theta, \varphi) a_{-\mu} | l_0 ; 00 ; I M \rangle \\ &= (-1)^{l_1 - l_0} \langle l_1 || Y_2 || l_0 \rangle \langle l_2 || a || 00 \rangle W(l_1 2 l_0 0 ; I 2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

En (3.6) la  $W$  indica un coeficiente de Racah, y los pseudo-elementos de matriz tienen la bien conocida forma:

$$\langle l_1 || Y_2 || l_0 \rangle = [5(2l_0 + 1) / 4\pi]^{1/2} \langle l_0 200 | l_1 0 \rangle \quad (3.7)$$

$$\langle 12 || a || 00 \rangle = (\hbar/2 B\omega)^{\frac{1}{2}} \langle 12 || b || 00 \rangle = (5\hbar/2 B\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Como los estados de la partícula correspondiente a momento angular  $l_1$  y número de onda  $k_1$  son los debidos a la dispersión inelástica, tenemos que para  $r > R_0$ ,  $u_{l_1}(k_1 r)$  representa una onda puramente saliente, esto es:

$$u_{l_1}(k_1 r) = S_{l_1}(k_1) u_{l_1}^+(k_1 r) \quad (3.9)$$

mientras que de (3.4) vemos que para  $r < R_0$ ,  $u_{l_1}(k_1 r)$  sería la solución asociada con la dispersión por el potencial. Dividiendo y multiplicando (3.5) por  $u_{l_1}(k_1 R_0)$ , y aprovechando por un lado el hecho que la función de onda misma es continua, y por otro las definiciones bien conocidas de derivada logarítmica:

$$f_l = \frac{R_0 (d u_l / dr)_{R_0}}{(u_l)_{R_0}} \quad \therefore \Delta_l + i s_l = \frac{R_0 (d u_l^+ / dr)_{R_0}}{(u_l^+)_{R_0}} \quad (3.10)$$

se obtiene de (3.4) y (3.9) que:

$$S_{l_1}(k_1) = \frac{-(K_0 R_0)^2 u_{l_0}(k_0 R_0) \langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle}{[\Delta_{l_1} + i s_{l_1} - f_{l_1}] u_{l_1}^+(k_1 R_0)} \quad (3.11)$$

La expresión para la matriz  $S$  asociada a la dispersión inelástica todavía puede simplificarse tomando en cuenta que la función  $u_{l_1}(k_1 r)$  para  $r > R_0$ , debida puramente a efectos del interior del nucleo, toma la forma<sup>5</sup>:

$$u_{l_1}(k_1 r) = u_{l_1}^-(k_1 r) - \eta_{l_1} u_{l_1}^+(k_1 r); \quad \eta_{l_1} = \frac{f_{l_1} - \Delta_{l_1} + i s_{l_1}}{f_{l_1} - \Delta_{l_1} - i s_{l_1}} \frac{u_{l_1}^-(k_1 R_0)}{u_{l_1}^+(k_1 R_0)} \quad (3.12)$$

De (3.12) y (3.11) vemos que  $S_{l_1}(k_1)$  puede escribirse como:

$$S_{l_1}(k_1) = -(K_0 R_0)^2 (2 i k_1 R_0)^{-1} \langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle u_{l_0}(k_0 R_0) u_{l_1}(k_1 R_0) \quad (3.13)$$

De (3.13) tenemos que la matriz  $S_{l_1}$  para la dispersión inelástica por los efectos colectivos, es proporcional tanto a la amplitud de onda entrante asociada con el proceso de dispersión por el interior del núcleo, como a la amplitud de la onda saliente asociada al mismo proceso. En el supuesto de que el núcleo sin efectos colectivos se comportara como una esfera rígida, la matriz  $S_{l_1}$  sería 0 ya que  $u_l(kR_0) = 0$  para toda  $l$  y  $k$ , resultado que era obvio esperar ya que una esfera rígida no puede sufrir deformaciones. El caso más favorable sería aquel en que tanto el canal de entrada  $k_0, l_0$  como el de salida  $k_1, l_1$ , correspondieran a resonancias en lo que a estados del interior del núcleo se refiera, ya que en ese caso  $u_{l_0}(k_0 R_0)$  y  $u_{l_1}(k_1 R_0)$  tendrían sus valores máximos sobre la esfera  $r = R_0$ . En el siguiente capítulo discutiremos algunos órdenes de magnitud que puede tener la sección para dispersión inelástica, pero antes analizaremos las limitaciones que presenta el método de perturbaciones en lo que concierne a los efectos colectivos.

#### IV. VALIDEZ DEL ANALISIS DE ACOPLAMIENTO DEBIL DENTRO DEL MARCO DE LA TEORIA DE PERTURBACIONES.

En su trabajo fundamental sobre los movimientos colectivos, Bohr y Mottelson<sup>3</sup> han demostrado para problemas de estados ligados, que la validez de la hipótesis de acoplamiento débil se restringe a aquellas funciones de onda perturbadas para las cuales el valor de expectación de la componente de momento angular  $L_z$  de la partícula, se mantiene cercano al valor de expectación  $M$  de  $I_z$ . Procederemos a establecer una condición similar para las funciones de espectro continuo que tenemos en los problemas de reacciones nucleares.

Si designamos por  $H_0$  el hamiltoniano no perturbado, y por  $\Gamma$  a un conjunto de observables que conmutan entre sí y con  $H_0$ , y forman con este un sistema completo, tenemos que los eigenestados de este sistema completo, que se pueden designar por  $|E'' \gamma''\rangle$ , satisfacen:

$$H_0 |E'' \gamma''\rangle = E'' |E'' \gamma''\rangle, \Gamma |E'' \gamma''\rangle = \gamma'' |E'' \gamma''\rangle \quad (4.1)$$

Si introducimos ahora un hamiltoniano de interacción  $H_{int}$  y aplicamos la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, tenemos que cuando  $t \rightarrow \infty$ , el estado original  $|E'' \gamma''\rangle$  se transforma en un estado perturbado  $|P E'' \gamma''\rangle$  de la forma:

$$|P E'' \gamma''\rangle = \sum_{\gamma} [ \delta_{\gamma\gamma''} - 2\pi i \langle E'' \gamma | H_{int} | E'' \gamma'' \rangle ] |E'' \gamma\rangle \exp(-i E'' t/\hbar) \quad (4.2)$$

que hasta términos de 1er. orden incluidos está normalizado. Supongamos ahora que las  $\Gamma$  pueden dividirse en dos conjuntos  $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$  tales que  $\Gamma_2$  conmute con  $H_{int}$ . Si ahora  $\Lambda$  es una observable que conmuta con  $H_0$  y con  $\Gamma_1$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \langle E' \gamma'_1 \gamma'_2 | \Lambda | E'' \gamma''_1 \gamma''_2 \rangle &= \\ &= \delta(E' - E'') \delta(\gamma'_1, \gamma''_1) \Lambda(\gamma''_1, \gamma''_2, E'') \end{aligned} \quad (4.3)$$

y de (4.2) y (4.3) el elemento de matriz diagonal en  $\Gamma_2$  de  $\Lambda$  para el estado perturbado toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle P E' \gamma'_1 \gamma'_2 | \Lambda | P E'' \gamma''_1 \gamma''_2 \rangle &= \delta(E' - E'') \delta(\gamma'_1, \gamma''_1) \Lambda(\gamma''_1, \gamma''_2, E'') \\ &+ 4\pi \sum_{\gamma_1} \langle E' \gamma_1 \gamma'_2 | H_{int} | E' \gamma'_1 \gamma'_2 \rangle^* \langle E'' \gamma_1 \gamma''_2 | H_{int} | E'' \gamma''_1 \gamma''_2 \rangle \\ &\delta(E' - E'') \Lambda(\gamma_1, \gamma''_2, E'') \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vamos a aplicar este resultado para obtener el valor de expectación perturbado de la componente  $z$  del momento angular de la partícula. Como  $L_z = I_z - Q_z$  e  $I_z$  es integral de movimiento con eigenvalor  $M$ , nos basta determinar el valor de expectación de  $Q_z$ . El grupo de observables  $\Gamma$  corresponde ahora a  $L^2, Q^2, I_z, I^2$  en donde  $\Gamma_1$  es  $L^2, Q^2, I_z = L_z + Q_z$  ya que conmutan con  $Q_z$ , mientras que  $\Gamma_2$  es  $I^2$  ya que conmuta con  $H_{int}$  pero no con  $Q_z$ . Se tiene además que  $Q_z$  es independiente de la energía de la partícula. De las discusiones expuestas en la sección anterior, vemos que los elementos de matriz que necesitamos en (4.4) son:

$$\langle E' ; l_0 ; 00 ; IM | Q_z | E'' ; l_0 ; 00 ; IM \rangle = 0 \quad (4.5a)$$

$$\langle E' ; l_1 ; 12 ; IM | Q_z | E'' ; l_1 ; 12 ; IM \rangle = \delta(E' - E'')$$

$$M [I(I+1) - l_1(l_1+1) + 6] [2I(I+1)]^{-1} \quad (4.5b)$$

donde el último resultado proviene de una bien conocida relación para la representación de momento angular<sup>13</sup>. Finalmente, de (4.4) y (4.5) tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle P E' ; l_0 ; 00 ; IM | L_z | P E'' ; l_0 ; 00 ; IM \rangle = \\ = M \delta(E' - E'') \\ \times \left[ 1 - \sum_{l_1} \left| 2\pi \langle E'' ; l_1 ; 12 ; IM | H_{int} | E'' ; l_0 ; 00 ; IM \rangle \right|^2 \right. \\ \left. 2 [I(I+1) - l_1(l_1+1) + 6] \{2I(I+1)\}^{-1} \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

De acuerdo con el tipo de análisis de Bohr y Mottelson<sup>3</sup>, el segundo término dentro del paréntesis cuadrado tiene que ser  $\ll 1$  si la hipótesis de acoplamiento débil es válida. Pero de la teoría de perturbaciones de primer orden se ve que la sección total para dispersión inelástica con excitación de un fonón estaría dada por:

$$\sigma(\epsilon l_0 \rightarrow \epsilon - \hbar \omega, l_1) = \pi \lambda^2 (2l_0 + 1) \left| 2\pi \langle E \gamma_1 | H_{int} | E \gamma_0 \rangle \right|^2 \quad (4.7)$$

de lo cual se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \langle P E' \gamma_0 | L_z | P E'' \gamma_0 \rangle = M \delta(E' - E'') \\ \times \left[ 1 - \sum_{l_1} \frac{\sigma(\epsilon, l_0 \rightarrow \epsilon - \hbar \omega, l_1)}{\pi \lambda_0^2 (2l_0 + 1)} \left\{ \frac{I(I+1) - l_1(l_1+1) + 6}{2I(I+1)} \right\} \right] \quad (4.8) \end{aligned}$$

De (4.8) se ve que la hipótesis de acoplamiento debil para la descripción de los efectos colectivos, solo es válida si la sección inelástica total dentro de una perturbación de 1er. orden es pequeña comparada con el valor máximo  $\pi \chi_0^2 (2l_0 + 1)$  de la sección. Como en el capítulo anterior evaluamos la matriz  $S_l$  para la dispersión inelástica, podemos obtener la sección total por medio de la conocida expresión<sup>16</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma(\epsilon, l_0 \rightarrow \epsilon - \hbar \omega, l_1) &= \pi \chi_0^2 (2l_0 + 1) (k_1/k_0) |S_{l_1}(k_1)|^2 \\ &= \pi \chi_0^2 (2l_0 + 1) [4 k_1 k_0 R_0^2]^{-1} (K_0 R_0)^4 |\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle|^2 |u_{l_0}(k_0 R_0)|^2 \\ &\quad |u_{l_1}(k_1 R_0)|^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Posteriormente, discutiremos algunos aspectos del comportamiento de la sección como función de  $\epsilon, l_0, l_1$ , pero aquí vamos a investigar bajo que condiciones es válida la hipótesis de acoplamiento debil. De (4.9) vemos que  $\sigma$  es máxima si  $|u_l(k R_0)|^2$  lo es tanto en el canal de entrada como en el de salida, o sea si estamos en resonancia  $f_l = 0$  en ambos canales. En ese caso sabemos que:

$$|u_l(k R_0)|_{res}^2 = \frac{4 (k R_0)^2 v_l}{\Delta_l^2 + s_l^2} = \frac{4}{v'_l} \quad (4.10)$$

donde  $v_l$  y  $v'_l$  son las funciones de  $k R_0$  definidas por Blatt y Weisskopf.<sup>17</sup> De (4.9) y (4.10) tenemos entonces:

$$\left[ \frac{\sigma(\epsilon, l_0 \rightarrow \epsilon - \hbar \omega, l_1)}{\pi \chi_0^2 (2l_0 + 1)} \right]_{max} = \frac{4 (K_0 R_0)^4}{(k_1 R_0) (k_0 R_0)} \frac{|\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle|^2}{v'_{l_0}(k_0 R_0) v'_{l_1}(k_1 R_0)} \quad (4.11)$$

Como un ejemplo de la relación anterior consideremos el caso en que el canal de entrada corresponda a  $l_0 = 0$ , en cuyo caso el canal de salida necesariamente corresponde a  $l_1 = 2$ . Utilizando la notación  $x = k_1 R_0$ , la expresi-

si3n (4.11) que designaremos por  $y$  toma la forma:

$$y \equiv \left[ \frac{\sigma(\epsilon, 0 \rightarrow \epsilon - \hbar\omega, 2)}{\pi\lambda_0^2} \right]_{\max} = \frac{(K_0 R_0)^4 (5\hbar / 2\pi B \omega) x^5}{[x^2 + (\hbar\omega/V_0)(k_0 R_0)]^{1/2} [x^2(x^2 - 6)^2 + (6 - 3x^2)]} \quad (4.12)$$

Con los valores  $V_0 = 20 \text{ MeV}$ ,  $R_0 = 1.5 \times 10^{-13} \text{ A}^{1/3}$  o sea  $K_0 R_0 = 1.5 \text{ A}^{1/3}$ , y dando a  $A$  los valores 50, 100, 200, obtenemos con la ayuda de la tabla de la pag. # 6, las siguientes gráficas de " $y$ " como funci3n de " $x$ ".

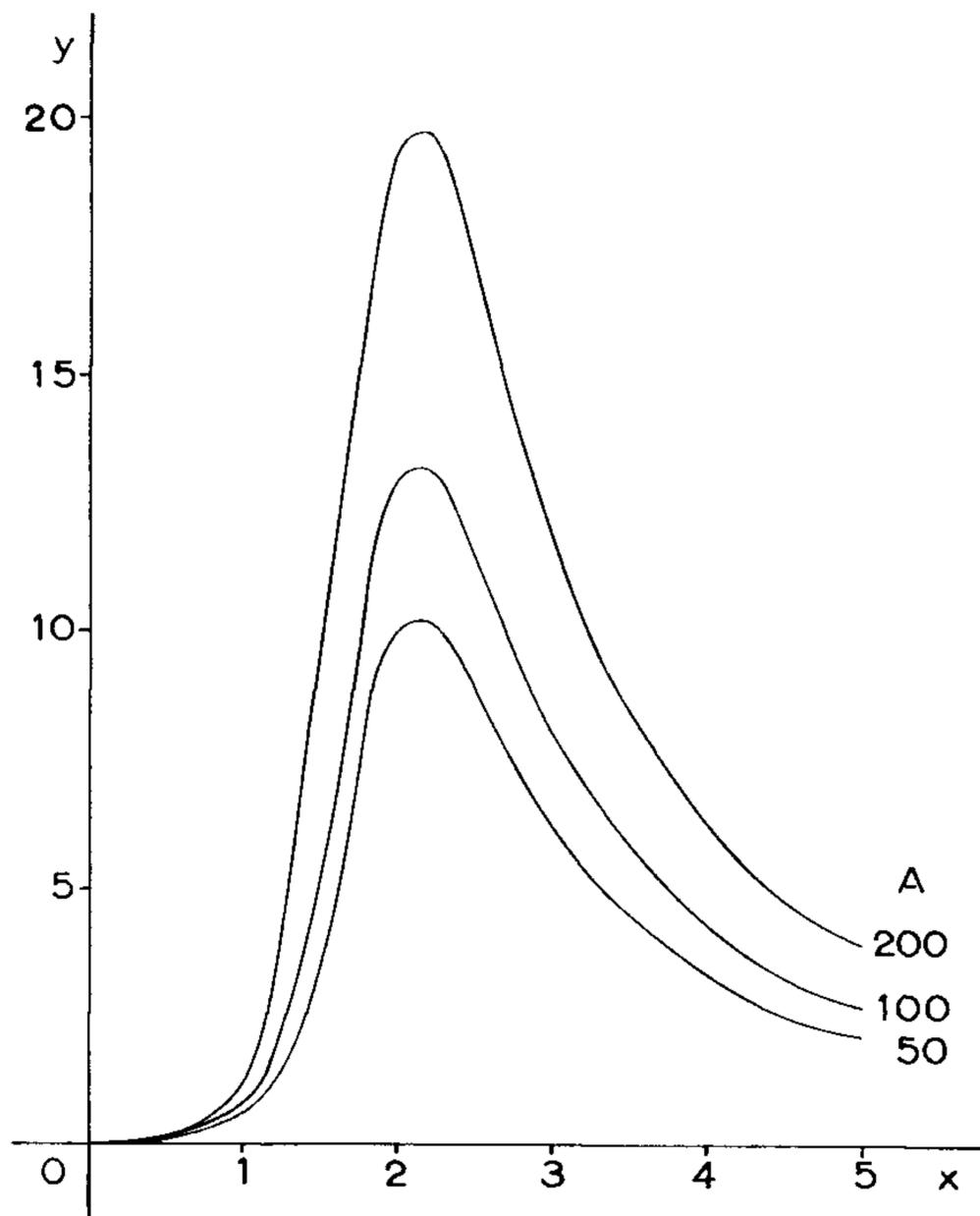


Fig. # 1

El m3ximo de la curva ocurre aproximadamente en  $x = 2.2$  para las

tres curvas y en la tabla siguiente se indica el valor máximo de “y” y la energía que corresponde en el canal de entrada para los tres valores de A.

Tabla # 2

A	50	100	200
y (Max)	10.23	13.16	19.71
E (MeV)	6.85	4.28	2.50

De la tabla y la gráfica se concluye que para ciertas energías del nucleón en el canal de entrada, la aproximación de perturbaciones no puede darnos la sección correcta cerca de las resonancias del interior del núcleo, ya que  $y \gg 1$  para esas energías.

#### V.- DISPERSION ELASTICA E INELASTICA EN LA APROXIMACION DE TAMM-DANCOFF.

En las secciones anteriores hemos discutido la aproximación de acoplamiento débil a los efectos colectivos con ayuda de una teoría de perturbaciones, y hemos observado las limitaciones intrínsecas a un análisis de este tipo. Teniendo en cuenta que las energías de los fonones son del orden de MeV, se sugiere la posibilidad de que en un proceso determinado no participen más que un número reducido de niveles de excitación de la superficie, y que limitándonos a estos niveles pudiéramos discutir la interacción desde un punto de vista de Tamm-Dancoff. Empezaremos suponiendo que en la interacción de la partícula con los movimientos de la superficie solo intervienen dos estados, aquel que contiene 0 fonones y aquel que contiene 1 fonón, es decir que la función de onda es del tipo:

$$\psi = r^{-1} u_{l_0}(k_0 r) |l_0; 00, IM\rangle + \sum_{l_1} r^{-1} u_{l_1}(k_1 r) |l_1; 12; IM\rangle \quad (5.1)$$

Debido a que la interacción solo tiene lugar sobre la esfera  $r = R_0$ , tenemos que para  $r \neq R_0$ ,  $u_{l_0}(k_0 r)$  y  $u_{l_1}(k_1 r)$  satisfacen ecuaciones del tipo (3.4).

Además del hamiltoniano (2.1), tenemos las condiciones a la frontera:

$$R_o \left[ \frac{d}{dr} u_{l_1}(k_1 r) \right]_{r=R_o-0}^{r=R_o+0} = - (K_o R_o)^2 u_{l_o}(k_o R_o) \langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_o \rangle \quad (5.2a)$$

$$R_o \left[ \frac{d}{dr} u_{l_o}(k_o r) \right]_{r=R_o-0}^{r=R_o+0} = - (K_o R_o)^2 \sum_{l_1} u_{l_1}(k_1 R_o) \langle \gamma_o | H_\omega | \gamma_1 \rangle, \quad (5.2b)$$

donde  $l_1 = l_o, l_o \pm 2$  y  $(\hbar^2 / 2 m_o) (k_o^2 - k_1^2) = \hbar \omega$ . Dividimos y multiplicamos la ecuación (5.2a) por  $u_{l_1}(k_1 R_o)$  y utilizando (3.10) obtenemos:

$$u_{l_1}(k_1 R_o) = S_{l_1}(k_1) u_{l_1}^+(k_1 R_o) = - \frac{(K_o R_o)^2 u_{l_o}(k_o R_o) \langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_o \rangle}{\Delta_{l_1} + i s_{l_1} - f_{l_1}} \quad (5.3)$$

Sustituyendo (5.3) en (5.2b), y definiendo por  $\tilde{f}_{l_o}$  y  $f_{l_o}$  las derivadas logarítmicas en  $R_o + 0$  y  $R_o - 0$  respectivamente, obtenemos:

$$\tilde{f}_{l_o} - f_{l_o} = (K_o R_o)^4 \sum_{l_1} \frac{|\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_o \rangle|^2}{\Delta_{l_1} + i s_{l_1} - f_{l_1}} \quad (5.4)$$

La matriz  $S$  para dispersión inelástica estaría dada por (3.11) o (3.13) en donde  $u_{l_o}(k_o R_o)$  correspondiente a la derivada logarítmica  $f_{l_o}$ , tiene que ser sustituida por  $\tilde{u}_{l_o}(k_o R_o)$  correspondiente a la derivada logarítmica  $\tilde{f}_{l_o}$ .

Nos va a interesar en particular el efecto que los movimientos colectivos tienen sobre la dispersión elástica. De (5.4) vemos que a la derivada logarítmica  $f_{l_o}$  asociada con la dispersión producida por el interior del núcleo, hay que agregar el miembro derecho de (5.4) para dar la nueva derivada logarítmica. Claramente el miembro derecho de (5.4) está asociado con los movimientos colectivos, ya que contiene el elemento de matriz  $\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_o \rangle$ . Los efectos colectivos pierden importancia a altas energías  $E \gg \hbar \omega$ , ya que en este caso  $\epsilon_1 = E - \hbar \omega$  es de varias Mev, y  $f_{l_1}$  puede aproximarse por su valor en la teoría del continuo<sup>5</sup>

$f_{l_1} \simeq -i K R_0$  cuyo valor absoluto es en general  $\gg 1$ , lo que hace que el miembro derecho de (5.4) sea  $\ll 1$ . Nos interesa mas bien el caso en que  $E$  es el orden de  $\hbar\omega$ , y entonces  $E - \hbar\omega$  correspondería a energías pequeñas comparadas con  $\hbar\omega$ , y estaría dentro de la región de resonancia para la dispersión por el interior del nucleo. En tal caso las contribuciones del miembro derecho de (5.4) son particularmente importantes para aquellas energías  $\epsilon_n$  para las cuales  $f_{l_1}(\epsilon_n) = 0$ , esto es para los casos de resonancia. En la vecindad de  $\epsilon_n$ ,  $f_{l_1}(\epsilon) = (df_{l_1}/d\epsilon)_{\epsilon_n} (\epsilon - \epsilon_n)$  y en tal caso la expresión (5.4) puede expresarse como:

$$\tilde{f}_{l_0}(\epsilon) = f_{l_0}(\epsilon) + (K_0 R_0)^4 \sum_{l_1} \sum_n \frac{|\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle|^2}{[\Delta_{l_1}(\epsilon_{nl_1}) + i s_{l_1}(\epsilon_{nl_1}) - (df_{l_1}/d\epsilon)_{\epsilon_{nl_1}} (\epsilon - \epsilon_{nl_1})]} \quad (5.5)$$

donde la suma con respecto a  $n$  se efectúa sobre todas las resonancias  $\epsilon_{nl_1}$  del canal  $l_1$ , en la zona de energía que nos interesa.

Haremos ahora la suposición de que las anchuras reducidas asociadas con las resonancias, definidas por:

$$\gamma_{nl_1} = - (df_{l_1}/d\epsilon)_{\epsilon = \epsilon_{nl_1}}^{-1} \quad (5.6)$$

son independientes del canal  $l_1$  y de la energía  $\epsilon_{nl_1}$  y las designaremos por  $\gamma$  sin índice. Supondremos también que los niveles de resonancia están equidistantemente distribuidos, es decir que:

$$\epsilon'_{nl_1} = \epsilon_{nl_1} - (df_{l_1}/d\epsilon)_{\epsilon_{nl_1}}^{-1} \Delta_{l_1}(\epsilon_{nl_1}) = \epsilon_0 + n D \quad (5.7)$$

donde  $D$  es la distancia entre los niveles, distancia que está relacionada con la anchura reducida por la bien conocida expresión<sup>5</sup>:

$$\gamma \simeq \frac{D}{\pi K_0 R_0} \quad (5.8)$$

Con estas suposiciones vemos que el denominador de (5.5) multiplicado por  $\gamma$  toma la forma:

$$\epsilon - \epsilon_0 - nD + i\gamma s_{l_1}(\epsilon_{nl_1}) = \epsilon - \epsilon_0 - nD + i(\epsilon_{nl_1}/V_0)^{1/2} (D/\pi) v_{l_1} \quad (5.9)$$

donde el miembro derecho se obtuvo utilizando (5.8) y la definición<sup>5</sup>  $s_l = kR_0 v_l$

Como  $v_{l_1}$  es siempre menor que 1 y  $\epsilon_{nl_1} \ll V_0$  vemos que excepto en la vecindad de la resonancia, la magnitud de la parte imaginaria de (5.9) es despreciable comparada con la magnitud de la parte real. Podemos con las suposiciones anteriores, escribir (5.5) bajo la forma:

$$\tilde{f}_{l_0}(\epsilon) = f_{l_0}(\epsilon) + (K_0 R_0)^3 (D/\pi) \sum_{l_1} | \langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle |^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\epsilon - \epsilon_0 - nD]^{-1} \quad (5.10)$$

De la expresión (3.6) para  $\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle$  y de una bien conocida relación matemática<sup>18</sup>, tenemos que:

$$\sum_{l_1} | \langle l_1; 12; IM | H_\omega | I; 00; IM \rangle |^2 = (5/8\pi) (\hbar/B\omega) \quad , \quad (5.11)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [ (\pi/D)(\epsilon - \epsilon_0) - n\pi ]^{-1} = \cot [ (\pi/D)(\epsilon - \epsilon_0) ] \quad . \quad (5.12)$$

La derivada logarítmica para la dispersión inelástica modificada por los efectos colectivos, toma entonces la forma:

$$\tilde{f}_{l_0}(\epsilon) = f_{l_0}(\epsilon) + (K_0 R_0)^3 (5/8\pi) (\hbar/B\omega) \cot [ (\pi/D)(\epsilon - \epsilon_0) ] \quad (5.13)$$

El primer término del miembro derecho de (5.13) corresponde a la derivada logarítmica asociada a la dispersión ordinaria producida por el interior del núcleo,

y a la separación entre resonancias sucesivas asociadas a este efecto la designaremos por  $\mathfrak{D}$ . El segundo término del miembro derecho de (5.13) está asociado con los efectos de la superficie y la distancia entre sus resonancias se designará por  $D$ . Las suposiciones indicadas en esta sección implican que  $D \ll \mathfrak{D}$ , y que por lo tanto hay muchas resonancias del tipo "superficial" entre cada par de resonancias del tipo "ordinario".

Nos preguntamos ahora en que forma modifican los efectos superficiales las resonancias asociadas con la dispersión elástica producida por el interior del núcleo. En primer lugar tenemos que distinguir entre dos tipos de resonancias, las resonancias colectivas  $\epsilon_r$  que hacen  $\tilde{f}_{l_0}(\epsilon_r) = 0$  y las resonancias ordinarias  $\epsilon_R$  que hacen  $f_{l_0}(\epsilon_R) = 0$ . Con estos dos tipos de resonancias tenemos asociadas sus correspondientes anchuras  $\gamma_r$  y  $\gamma_R$  definidas por:

$$\gamma_r = - (df_{l_0}/d\epsilon)_{\epsilon_r}^{-1} ; \quad \gamma_R = - (df_{l_0}/d\epsilon)_{\epsilon_R}^{-1} . \quad (5.14a,b)$$

Desde luego la separación entre las resonancias colectivas sucesivas es del orden de  $D$ , y la separación entre las resonancias ordinarias sucesivas es del orden de  $\mathfrak{D}$ . Nos interesa ahora determinar la  $\gamma_r$  para resonancias  $\epsilon_r$  vecinas de una resonancia ordinaria  $\epsilon_R$ ; en tal caso  $f_{l_0}$  se puede aproximar por:

$$f_{l_0}(\epsilon) = (df_{l_0}/d\epsilon)_{\epsilon_R} (\epsilon - \epsilon_R) = - \gamma_R^{-1} (\epsilon - \epsilon_R) , \quad (5.15)$$

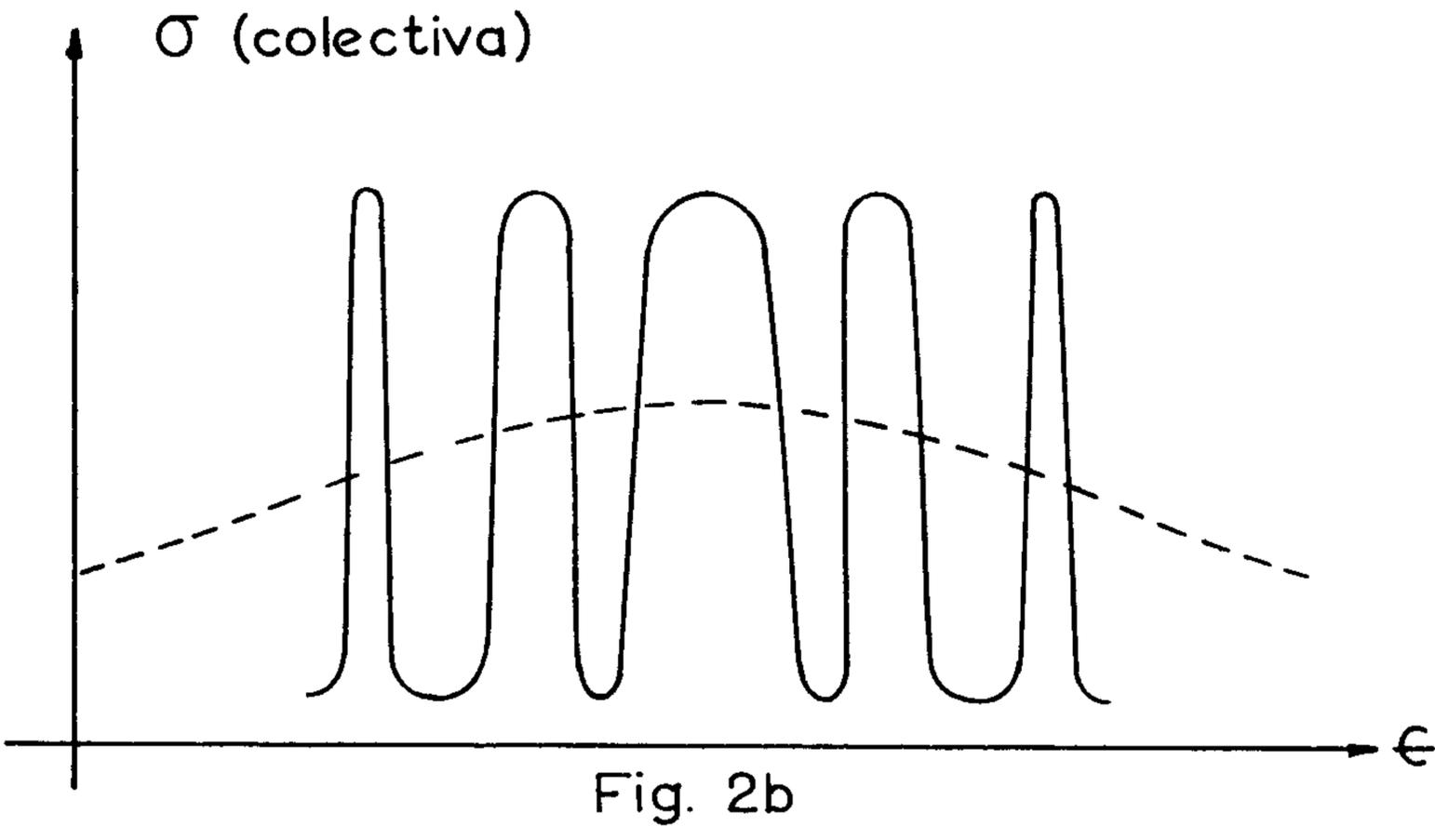
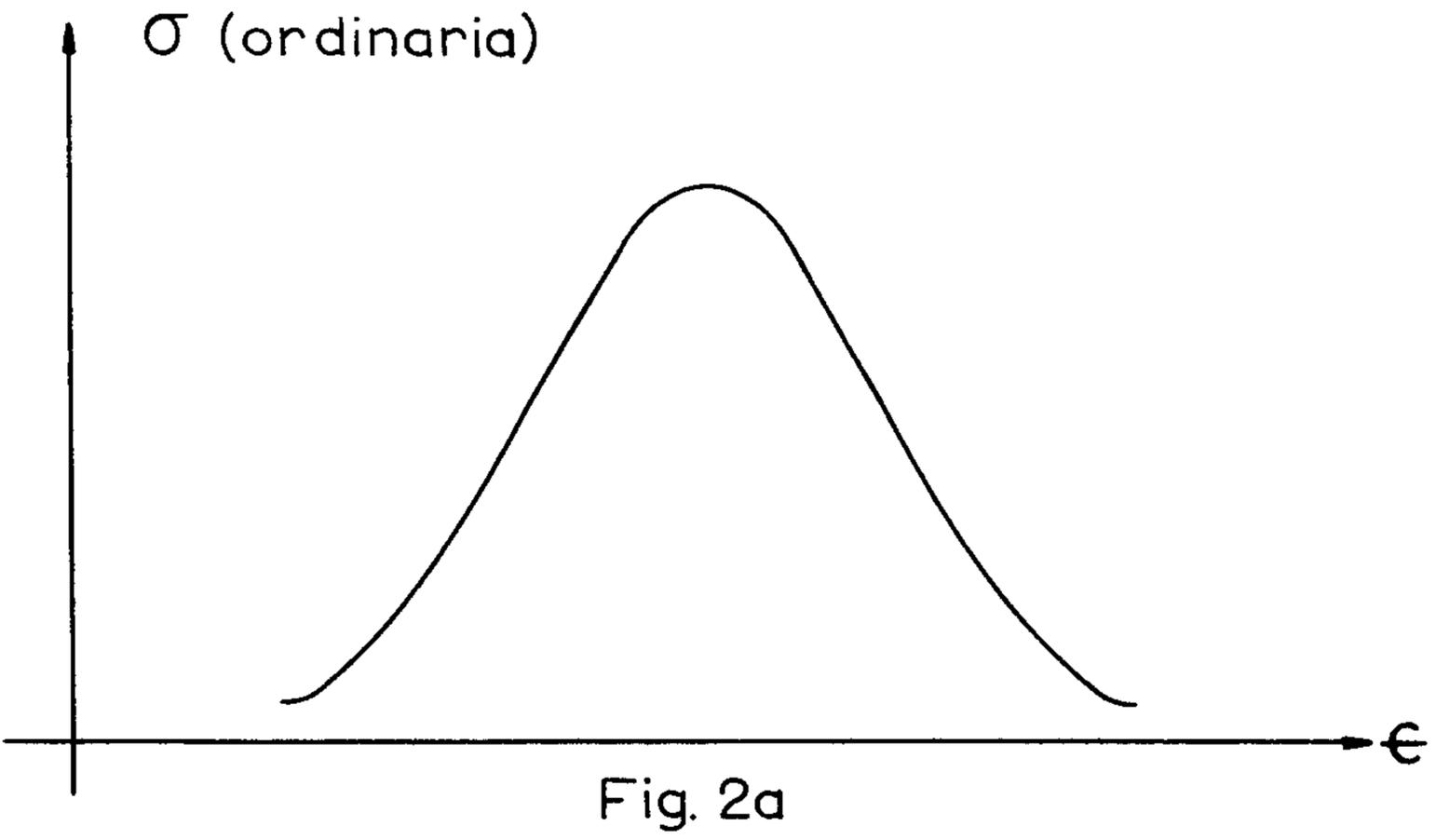
y de (5.13) y (5.14) tenemos que  $\epsilon_r$  y  $\gamma_r$  están definidas por:

$$- \gamma_R^{-1} (\epsilon_r - \epsilon_R) + \rho \cot [ (\pi/D) (\epsilon_r - \epsilon_0) ] = 0 \quad (5.16)$$

$$\gamma_r^{-1} = \gamma_R^{-1} + \rho (\pi/D) \operatorname{cosec}^2 [ (\pi/D) (\epsilon_r - \epsilon_0) ] , \quad (5.17)$$

donde:

$$\rho \equiv (K_0 R_0)^3 (5 \hbar / 8 \pi B \omega) . \quad (5.18)$$



De (5.16) y (5.17) podemos expresar  $\gamma_r$  para resonancias  $\epsilon_r$  vecinas de una  $\epsilon_R$  como:

$$\gamma_r = \gamma_R \{ 1 + (\gamma_R \pi \rho / D) [ (\gamma_R \rho)^{-2} (\epsilon_r - \epsilon_R)^2 + 1 ] \}^{-1} \quad (5.19)$$

Vemos de (5.19) que a medida que las resonancias colectivas  $\epsilon_r$  se alejan de la resonancia ordinaria  $\epsilon_R$ , las anchuras correspondientes van disminuyendo. Por otro lado si  $D \ll \mathfrak{D}$ , vemos de la fórmula general para la sección<sup>5</sup> de dispersión elástica que los máximos de esas resonancias se mantienen muy cercanos al máximo de la resonancia ordinaria. De aquí pues que las resonancias ordinarias de anchura  $\gamma_R$ , se vean sustituidas por un grupo grande de resonancias mas estrechas debido a la presencia de efectos colectivos tal como se ilustra en la Fig. # 2. Podemos trazar la envolvente a estas resonancias en forma que el area bajo la curva de la envolvente corresponda al area promedio asociada con las resonancias de energía correspondiente. En tal caso la semianchura  $(W/2)$  de la envolvente correspondería a aquella energía  $\epsilon_r$  para la cual  $\gamma_r$  fuera la mitad de su valor máximo que tenemos de (5.19) cuando  $\epsilon_r = \epsilon_R$ , es decir:

$$1 + (\pi \rho \gamma_R / D) [ (\gamma_R \rho)^{-2} (W/2)^2 + 1 ] = 2 [ 1 + (\pi \rho \gamma_R / D) ] \quad (5.20)$$

Pero tenemos de (5.13) que  $(D / \pi \rho)$  correspondería a la anchura de los niveles colectivos en ausencia de la dispersión por el interior del nucleo, anchura que es necesariamente mucho menor que  $\gamma_R$  ya que  $D \ll \mathfrak{D}$ . De aquí  $(\pi \rho \gamma_R / D) \gg 1$ , y despreciando la unidad comparado con ella, tenemos que:

$$W = 2 \gamma_R \rho \quad (5.21)$$

Podemos hacer una estimación de la anchura ordinaria suponiendo que el interior del nucleo se comporta como un pozo de potencial cuadrado de profundidad  $V_0$ , en cuyo caso para  $l_0$  razonables se tiene que  $f_{l_0} \approx K R_0 \cot K R_0$  donde

$K^2 = (K_0^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$  Con ese valor de  $f_{l_0}$  vemos que la  $\gamma_R$  toma la forma  $\gamma_R = (\hbar^2 / m R_0^2)$  y por lo tanto, que  $W$  está dado por:

$$W = 2 (\hbar^2 / m R_0^2) (K_0 R_0)^3 (5\hbar / 8 \pi B \omega) \quad (5.22)$$

Suponiendo que  $V_0 = 20 \text{ Mev}$  o sea  $K_0 = 10^{13} \text{ cm}^{-1}$ ,  $R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  donde  $r_0 = 1.5 \times 10^{-13} \text{ cm}$  y los valores de  $\hbar \omega$  y  $(\hbar^2 / B)$  de la tabla 1, obtenemos para diferentes valores de  $A$  que  $W$  y  $\gamma_R$  toman la forma:

Tabla # 3.

A	50	100	200
W (Mev)	6	4	2.4
$\gamma_R$ (Mev)	1.3	.82	.52
$\gamma_R / W$	.217	.205	.217

De la tabla # 3 vemos que el efecto neto de los movimientos colectivos es el de producir un ensanchamiento de las resonancias ordinarias si interpretamos la curva envolvente a las resonancias colectivas como la curva experimental, cosa que es razonable suponer teniendo en cuenta la imprecisión de energías en el haz incidente de neutrones.

Nos preguntamos ahora como se compara el máximo de la sección promediada sobre las resonancias colectivas con el máximo de la sección ordinaria. Como ya indicamos anteriormente, los máximos de las secciones debidos a las resonancias colectivas en la vecindad de una resonancia ordinaria, tienen el mismo valor que el máximo de esta última. Por lo tanto, la relación del área bajo la curva de la sección promediada al área bajo la curva de la sección ordinaria, debe ser aproximadamente igual a la relación de la suma  $\Gamma$  de las anchuras reducidas  $\gamma_r$  debidas a las resonancias colectivas a la anchura reducida ordinaria  $\gamma_R$ . Como la separación entre las resonancias colectivas es  $D$ , podemos poner  $\epsilon_r - \epsilon_R = n D$  y designar la correspondiente anchura reducida por  $\gamma_n$ , de donde por (5.19),  $\gamma$ -

utilizando el hecho que  $(\pi \rho \gamma_R / D) \gg 1$  y la relación (5.12) obtenemos:

$$\Gamma = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (D / \pi \rho) [(\gamma_R \rho)^{-2} n^2 D^2 + 1]^{-1} \quad (5.23)$$

$$= i \gamma_R \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(i \pi \gamma_R \rho / D) - n \pi]^{-1} = \gamma_R \coth(\pi \gamma_R \rho / D) \simeq \gamma_R$$

De aquí se concluye que las áreas bajo las curvas de la sección colectiva promediada, y de la sección ordinaria, son aproximadamente iguales, y que por lo tanto la relación del máximo de la sección colectiva promediada  $(\bar{\sigma}_{col})_{max}$  al máximo de la sección ordinaria  $(\sigma_{ord})_{max}$ , va en relación inversa a sus anchuras reducidas es decir que:

$$(\bar{\sigma}_{col} / \sigma_{ord})_{max} = \frac{\gamma_R}{W} = \frac{1}{2\rho} \quad (5.24)$$

Para diversos valores de  $A$  esta relación está dada en el último renglón de la tabla # 3, y vemos que es prácticamente independiente de  $A$  con el valor  $\simeq .21$ .

Como hemos considerado en la aproximación de Tamm-Dancoff además del estado base solamente estados con un fonón de excitación, tenemos del hecho que el número de partículas incidentes es igual al de las salientes, que:

$$|S_{l_0}(k_0)|^2 + \frac{k_1}{k_0} \sum_{l_1} |S_{l_1}(k_1)|^2 = 1 \quad (5.25)$$

donde  $S_{l_0}(k_0)$  está dada por:

$$S_{l_0}(k_0) = \frac{\Delta_{l_0} - i s_{l_0} - f_{l_0}}{\Delta_{l_0} + i s_{l_0} - f_{l_0}} \frac{u_{l_0}^-(k_0 R_0)}{u_{l_0}^+(k_0 R_0)} \quad (5.26)$$

La sección total de dispersión inelástica es entonces igual a la sección de captura y de (5.25) y (5.26) se tiene que:

$$\begin{aligned}
(k_1/k_0) \sum_{l_1} |S_{l_1}(k_1)|^2 &\equiv [\pi \chi_0^2 (2l_0 + 1)]^{-1} \sum_{l_1} \sigma(\epsilon, l_0 \rightarrow \epsilon - \hbar \omega, l_1) \\
&\approx -4 s_{l_0} \operatorname{Im} \tilde{f}_{l_0} [(\operatorname{Re} \tilde{f}_{l_0} - \Delta_{l_0})^2 + (\operatorname{Im} \tilde{f}_{l_0} - s_{l_0})^2]^{-1} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

El valor de expectación de  $L_z$  seguiría siendo (4.8), solo que ahora la razón de la sección a su valor máximo estaría dada en términos de la  $S_{l_1}(k_1)$  de (5.3). Por la relación (5.25) y utilizando la desigualdad de Schwartz, vemos que:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{k_1}{k_0} \sum_{l_1} \left\{ |S_{l_1}(k_1)|^2 [2I(I+1)]^{-1} [I(I+1) - l_1(l_1+1) + 6] \right\} \right| \\
& \leq \left\{ \sum_{l_1} \left[ \frac{I(I+1) - l_1(l_1+1) + 6}{2I(I+1)} \right]^2 \right\}^{1/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } I = 0 \\ \left[ \frac{8I(I+1) + 13}{[I(I+1)]^2} \right]^{1/2} & \text{si } I \neq 0 \end{cases} \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Como el miembro izquierdo de (5.28) no es nunca superior a 2.7 (valor que toma cuando  $I = 1$ ), tenemos una cota superior al valor de expectación de  $(Q_z / M)$  que es inferior a la que se tiene en el análisis de perturbaciones, pero que todavía es lo suficientemente grande para limitar la validez del presente análisis en algunos casos en que la sección de absorción del nucleón sea comparable con la sección de dispersión elástica. En el capítulo VII de este trabajo haremos ver como es posible mantener las conclusiones del presente capítulo respecto a la dispersión elástica, dentro de un formalismo en que el valor de expectación de  $Q_z / M$  es siempre 0.

## VI. DISPERSION ELASTICA E INELASTICA EN EL CASO DE NUCLEOS BLANCOS FUERTEMENTE DEFORMADOS.

En las secciones anteriores analizamos la dispersión de nucleones por los movimientos colectivos en aquellos casos en que se excitaban fonones en el nucleo

blanco. Si el nucleo blanco está fuertemente deformado, como se observa para nucleos situados entre capas cerradas, el nucleo es mas susceptible de excitarse por rotación que por vibración, llevando a los niveles de rotación predichos por A. Bohr. En este caso es conveniente discutir el hamiltoniano (2.1) para el sistema nucleón+nucleo, en un sistema de referencias cuyos ejes coinciden con los ejes principales del nucleo blanco deformado. En tal caso como es bien sabido, H toma la forma :

$$H = H_p - V_0 R_0 \delta(r - R_0) \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Y_{2\mu}(\theta', \varphi') a_{-\mu} + \sum_k \frac{Q_k^2}{2 \mathfrak{I}_k} + T_{\text{vib}} + \frac{1}{2} C \beta^2, \quad (6.1)$$

donde  $\theta', \varphi'$  representan las coordenadas de la partícula en el sistema fijo en el nucleo blanco, y el 2o. sumando en (6.1) corresponde al hamiltoniano de interacción en el mismo sistema. Los últimos tres términos de (6.1) representan el hamiltoniano de la superficie dividido en la energía de rotación, la de vibración y la potencial. Al escogerse los ejes del nuevo sistema a lo largo de los ejes principales del nucleo blanco, tenemos las siguientes relaciones<sup>3</sup> :

$$a_1 = a_{-1} = 0, \quad a_2 = a_{-2} = (2)^{-\frac{1}{2}} \beta \text{sen } \gamma, \quad a_0 = \beta \text{cos } \gamma$$

y

$$\mathfrak{I}_k = 4 B \beta^2 \text{sen}^2 \left( \gamma - \frac{2}{3} \pi k \right) \quad (6.2)$$

Las variables que caracterizan los movimientos colectivos en lugar de ser las  $a_{\mu}$ ,  $\mu = -2, \dots, 2$ , son ahora  $\beta, \gamma$  y los angulos de Euler  $\Phi, \Theta, \chi$  que caracterizan la rotación del nucleo blanco. Los operadores  $Q_k$  son los que nos dan los momentos angulares alrededor de los tres ejes principales del nucleo blanco, y están definidos en términos de los angulos de Euler por las relaciones bien conocidas del trompo asimétrico<sup>19</sup>

Los trabajos de Bohr<sup>3</sup> han mostrado que los nucleos blancos fuertemente deformados en su posición de equilibrio poseen un eje de simetría, lo que implica que

$\gamma = 0$  . Además vamos a investigar en esta sección exclusivamente las interacciones que exciten las rotaciones y no las vibraciones, en cuyo caso  $\beta$  tendría un valor constante y la energía cinética de vibraciones sería 0. De (6.2) vemos que cuando  $\gamma = 0$  se obtiene:

$$a_0 = \beta, a_\mu = 0 \text{ si } \mu \neq 0, \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I} = 3B\beta^2, \mathfrak{I}_3 = 0 \quad (6.3)$$

Nos conviene ahora escribir el hamiltoniano (6.1) de nuevo en el sistema de referencia fijo en el espacio, para lo cual utilizamos el hecho que:

$$Y_{20}(\theta', \varphi') = \sum_{\mu} \mathfrak{D}_{\mu 0}^2(\Phi, \Theta, \chi) Y_{2\mu}(\theta, \varphi), \quad (6.4)$$

donde las  $\mathfrak{D}_{\mu 0}^2 \equiv (4\pi/5)^{1/2} Y_{2\mu}(\Theta, \Phi)$  corresponden a la representación de orden 2 del grupo de rotaciones que son también eigenfunciones del trompo simétrico. Como  $\mathfrak{I}_3 = 0$  las eigenfunciones de rotación deben corresponder a eigenvalores 0 de  $Q_3$  por lo cual el hamiltoniano (6.1) con las restricciones indicadas arriba toma la forma:

$$H = H_p - V_0 R_0 \delta(r - R_0) (4\pi/5)^{1/2} \beta \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Y_{2\mu}(\theta, \varphi) Y_{2-\mu}(\Theta, \Phi) + \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} Q^2 \quad (6.5)$$

Las eigenfunciones de  $Q^2$ ,  $Q_3$  y  $Q_z$  correspondientes respectivamente a los eigenvalores  $q(q+1)$ , 0 y  $\mu$  son las:

$$\mathfrak{D}_{\mu 0}^q \equiv (4\pi/2l+1)^{1/2} Y_{q\mu}(\Theta, \Phi), \quad (6.6)$$

y por lo tanto independientes de las  $\chi$  . Además las condiciones de simetría de la función de onda discutidas por A. Bohr<sup>2</sup> nos restringen a valores pares de  $q$  .

De (6.5) y (6.6) vemos que el problema para núcleos deformados es muy similar al problema de excitación de fonones discutido en las secciones anteriores. De nuevo nos conviene introducir las eigenfunciones del momento angular total  $I = L + Q$  definidas por:

$$|l; q; IM\rangle = \sum_{m, \mu} \langle l q m \mu | IM\rangle Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{q\mu}(\Theta, \Phi) \quad (6.7)$$

La eigenfunción del hamiltoniano sin interacción correspondiente a la energía total:

$$E = \epsilon + (\hbar^2 / 2 \mathcal{I}) q(q+1), \quad \epsilon = (\hbar^2 k^2 / 2 m_0) \quad (6.8)$$

estará dada como en la sección II por:

$$r^{-1} u_l(kr) |l; q; IM\rangle \text{ con } q \text{ par} \quad (6.9)$$

Consideremos ahora que antes de intervenir las interacciones del nucleón con los movimientos de rotación del núcleo, el nucleón tenía un momento angular orbital  $l_0$ , el núcleo un estado de rotación caracterizado por el número cuántico  $q_0$ , y todo el sistema con momento angular  $I$ . Los efectos colectivos podrán llevar solo a estados  $l_1, q_1$ , tales que el siguiente elemento de matriz sea diferente de cero:

$$\begin{aligned} & \langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle \equiv \\ & \equiv \langle l_1; q_1; IM | (4\pi/5) \beta \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Y_{2\mu}(\theta, \varphi) Y_{2-\mu}(\Theta, \Phi) | l_0; q_0; IM \rangle \\ & = (4\pi/5)^{\frac{1}{2}} \beta (-1)^{l_1 + q_0 - I} \langle l_1 || Y_2 || l_0 \rangle \langle q_1 || Y_2 || q_0 \rangle \end{aligned}$$

$$W(l_1 q_1 l_0 q_0; I 2) =$$

$$= (5/4 \pi)^{\frac{1}{2}} \beta (-1)^{l_1 + q_0 - I} [(2l_0 + 1)(2q_0 + 1)]^{\frac{1}{2}} W(l_1 q_1 l_0 q_0; I 2) \\ \langle l_0 200 | l_1 0 \rangle \langle q_0 200 | q_1 0 \rangle \quad (6.10)$$

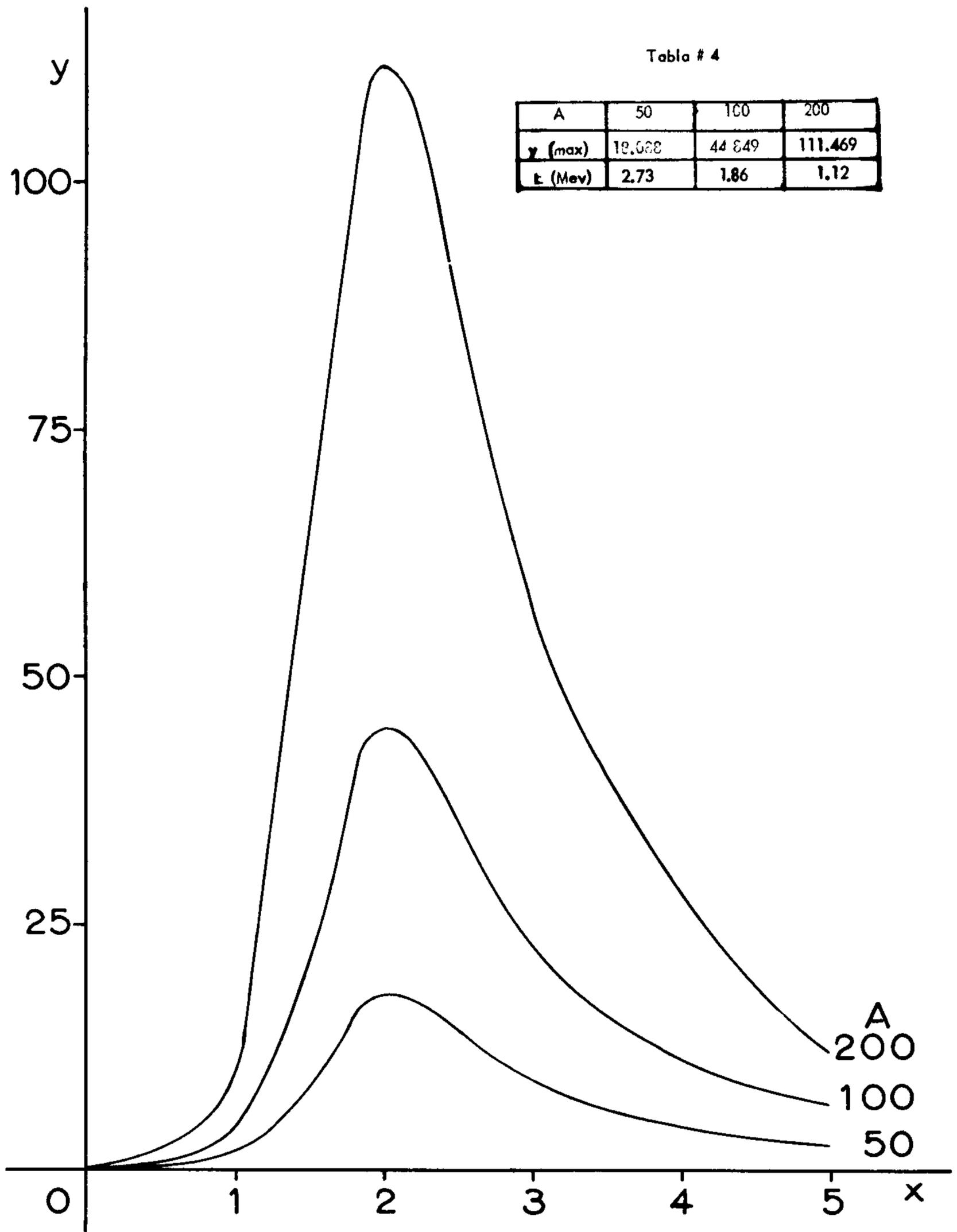
De las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan y de Racah, deducimos - que las transiciones solo pueden hacerse a los siguientes valores de  $l_1 q_1$  :

$$l_1 = l_0, l_0 \pm 2; q_1 = q_0, q_0 \pm 2, q_1 \neq 0 \text{ si } q_0 = 0 \quad . \quad (6.11)$$

El análisis de la dispersión inelástica desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones se puede hacer exactamente según los lineamientos de la sección III , y se llega precisamente al valor (3.11) o (3.13) para  $S_{l_1}(k_1)$  con la diferencia que  $\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle$  está dada por (6.10) y  $k_1$  por:

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2 m_0} - \frac{\hbar^2 k_1^2}{2 m_0} = - \frac{\hbar^2}{2 \mathfrak{J}} q_0 (q_0 + 1) + \frac{\hbar^2}{2 \mathfrak{J}} q_1 (q_1 + 1) . \quad (6.12)$$

En el caso en que el nucleo blanco estuviera en un estado  $q_0 = 0, l_0 = I$  se tiene que  $q_1 = 2$  y el elemento de matriz  $\langle \gamma_1 | H_\omega | \gamma_0 \rangle$  de (6.10) difiere del de (3.6) solo por el hecho que  $\beta$  reemplaza  $(5\hbar/2B\omega)^{\frac{1}{2}}$ . De nuevo el análisis de la sección IV se puede utilizar para mostrar que en general, la teoría de perturbaciones no es aplicable para este tipo de interacciones. En la Fig. # 3 se repite la curva de la Fig. # 1 con un valor de  $\beta = 0.2$  y  $E_{rot} = (6\hbar^2/2\mathfrak{J}) = 0.08$  Mev. Los máximos de las curvas ocurren aproximadamente para  $x = 2$  y en la tabla # 4 se indica el valor máximo de  $\gamma$ , y la energía correspondiente en el canal de entrada, para los valores 50, 100 y 200 de  $A$ .



Teniendo en cuenta las limitaciones de un análisis de perturbaciones, es conveniente también en este caso efectuar un análisis de Tamm-Dancoff en la suposición que el núcleo blanco corresponde a una  $q_0$  determinada. La discusión difiere de la presentada en la sección V solo por el hecho de que ahora hay elementos de matriz que conectan a la función de onda consigo misma, es decir  $l_1$  puede ser igual a  $l_0$  y  $q_1$  a  $q_0$ . Con el objeto de evitar dificultades algebraicas que son irrelevantes a la esencia del problema, nos concretaremos al caso en que  $l_0 = q_0 = I = 0$ , lo que implica que  $l_1 = q_1 = 2$ . En tal caso, si nos limitamos a los estados con 0 y 1 cuanto de rotación, en el supuesto que los otros estados son mas difíciles de excitar, la función de onda toma la forma:

$$\Psi = r^{-1} u_0(k_0 r) |0; 0; 00\rangle + r^{-1} u_2(k_1 r) |2; 2; 00\rangle. \quad (6.13)$$

Introduciendo esta función de onda en el hamiltoniano (6.5) tenemos por consideraciones análogas a las de la sección V y evaluando los elementos de matriz con ayuda de (6.10), que:

$$\begin{aligned} R_0 \left[ \frac{d u_2(k_1 r)}{d r} \right]_{r=R_0-0}^{r=R_0+0} &= - (K_0 R_0)^2 (5/4 \pi)^{1/2} \beta \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} u_0(k_0 R_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{21} u_2(k_1 R_0) \right] \\ R_0 \left[ \frac{d u_0(k_0 r)}{d r} \right]_{r=R_0-0}^{r=R_0+0} &= - (K_0 R_0)^2 (5/4 \pi)^{1/2} \beta \left[ u_0(k_0 R_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{5}} u_2(k_1 R_0) \right] \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde  $k_1$  y  $k_0$  están relacionados por (6.12) con  $q_0 = 0$  y  $q_1 = 2$ . De (6.14) obtenemos por el análisis usual el siguiente resultado:

$$\tilde{f}_0(k_0) - f_0'(k_0) = \frac{(K_0 R_0)^4 (4\pi)^{-1} \beta}{\Delta_2(k_1) + i s_2(k_1) - f_2'(k_1)}, \quad (6.15)$$

donde:

$$f_0'(k_0) = f_0(k_0) - (K_0 R_0)^2 (5/4\pi)^{1/2} \beta ;$$

$$f_2'(k_1) = f_2(k_1) - (K_0 R_0)^2 \frac{1}{21} (5/4\pi)^{1/2} \beta \quad (6.16)$$

La expresión (6.15) es enteramente similar a la (5.4) de la sección V para el caso  $l_0 = 0$ , con la sola diferencia que  $\beta$  reemplaza  $(5\pi/2 B \omega)$ .

Por lo tanto el ensanchamiento que sufren las resonancias estaría dado por:

$$W = 2 (\hbar^2 / m R_0^2) (K_0 R_0)^3 (4\pi)^{-1} \beta, \quad (6.17)$$

y en la tabla siguiente damos los valores  $(W/\beta)$  como función de A.

Tabla # 5

A	50	100	200
$W/\beta$	35.14	44.31	55.87

## VII.- DESCRIPCION DE LOS EFECTOS COLECTIVOS EN REACCIONES NUCLEARES SIGUIENDO LA ANALOGIA DE LA DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR POMPAS DE JABON.

En la secciones V y VI discutimos la excitacion de vibraciones y rotaciones del nucleo blanco por el nucleón incidente, y los efectos de estos movimien-

tos colectivos sobre la dispersión elástica e inelástica de nucleón. Vimos sin embargo, del valor de expectación de  $Q_z$  y de otras consideraciones, que aún la aproximación de Tamm-Dancoff presenta sus limitaciones para el análisis de este problema. Por esa causa, en esta sección elaboramos un análisis de la interacción del nucleón con la superficie, que prescinde de toda aproximación. El método es muy similar al que el autor<sup>10</sup> y F. M. Medina Nicolau<sup>11</sup> han empleado en una teoría de reacciones nucleares.

Un problema que ofrece cierta analogía con el de efectos colectivos sobre la dispersión de nucleones, es el de la dispersión de una onda sonora por una pompa de jabón, que el autor ha considerado en un artículo anterior<sup>4</sup>. En este problema hay que considerar los desplazamientos en tres regiones,

a) La región del gas exterior a la pompa, b) La superficie de la pompa misma, c) La región del gas en el interior de la pompa. Las condiciones a la frontera son que la componente normal de la velocidad del gas sea continua sobre la superficie, y que la diferencia de presiones del interior al exterior sea igual a la fuerza que ejerce la tensión superficial.

En forma análoga al problema clásico del párrafo anterior, podemos suponer que el nucleón interaccionando con los movimientos colectivos puede representarse en tres etapas:

- 1) El nucleón está fuera del núcleo y su función de onda es esencialmente la de una partícula libre.
- 2) El nucleón está sobre la superficie del núcleo y ha sido incorporado a los movimientos colectivos, de manera que su función de onda está restringida a la superficie de una esfera de radio  $R_0$ .
- 3) El nucleón está dentro del núcleo, donde por simplicidad podemos suponer que su función de onda corresponde al de una partícula dentro de un pozo de potencial.

Éstas tres etapas tienen que estar correlacionadas por medio de condiciones a la frontera, y es particularmente sugestivo tratar de derivar estas condiciones a la frontera de consideraciones de conservación de probabilidades.

Por simplicidad nos limitaremos a núcleos blancos de spin 0 y haremos caso omiso del spin del nucleón. Tenemos entonces que las tres etapas indicadas arriba pueden representarse por una función de Fock  $\Psi$  cuyas componentes corresponden a la función de onda asociada a cada etapa, es decir:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 (r, \theta, \varphi, t) \\ \psi_2 (\theta, \varphi, t) \\ \psi_3 (r, \theta, \varphi, t) \end{bmatrix} .$$

En ausencia de interacciones, las funciones de onda satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} i\hbar (\partial \psi_1 / \partial t) &= -(\hbar^2 / 2 m_0) \nabla^2 \psi_1, r > R_0 , \\ i\hbar (\partial \psi_2 / \partial t) &= (\hbar^2 / 2 \mathfrak{I}) L^2 \psi_2 + E_0 \psi_2 , r = R_0 \\ i\hbar (\partial \psi_3 / \partial t) &= -(\hbar^2 / 2 m_0) \nabla^2 \psi_3 + V(r) \psi_3 , r < R_0 , \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde  $L^2$  es el operador:

$$L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} , \quad (7.3)$$

y  $E_0$  es un parámetro que, como veremos, estará relacionado con las resonancias debidas a los efectos colectivos.

La probabilidad de encontrar al nucleón en cualquiera de sus tres etapas - estará dada por:

$$P = \int \psi_1^* \psi_1 d\tau + \int \psi_2^* \psi_2 d\Omega + \int \psi_3^* \psi_3 d\tau , \quad (7.4)$$

donde:  $d\tau = (r^2 / R_0^2) d\Omega dr$  .

La probabilidad  $P$  debe ser independiente del tiempo y de hecho, igual a 1 si la función de onda está normalizada, e inclusive esta independendencia del tiempo debe ser válida para productos de dos funciones de Fock  $\Psi$  y  $\Psi'$ . En el supuesto que la densidad de probabilidad es continua a través de la frontera, es decir que  $\psi_1(R_0) = \psi_3(R_0)$ , tenemos, utilizando las ecuaciones de movimiento, que:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{dP}{dt} = & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\hbar^2}{2m_0 R_0^2} \left[ \left( \frac{\partial r \psi'_1}{\partial r} - \frac{\partial r \psi'_3}{\partial r} \right)^* (r \psi_1) - \right. \\ & \left. (r \psi'_1)^* \left( \frac{\partial r \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial r \psi_3}{\partial r} \right) \right]_{r=R_0} d\Omega \\ & + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \psi_2'^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} L^2 \psi_2 + E_0 \psi_2 \right) - \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2'}{\partial t} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} L^2 \psi_2' + E_0 \psi_2' \right)^* \psi_2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (7.5)$$

Por un análisis enteramente similar al desarrollado en trabajos anteriores<sup>10,11</sup> y en el supuesto que el acoplamiento tiene lugar solo a través de los movimientos colectivos de la superficie, se obtienen las condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} (r \psi_1)_{r=R_0} = C \psi_2 \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} L^2 \psi_2 + E_0 \psi_2 \right] = \\ = C^* \frac{\hbar^2}{2m_0 R_0^2} \left[ \frac{\partial r \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial r \psi_3}{\partial r} \right]_{r=R_0} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Las ecuaciones (7.6) combinadas con las (7.2) definen completamente las interacciones. En ellas tenemos a los parámetros  $E_0$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $C$ ,  $E_0$  corresponde a la energía de resonancia asociada con los movimientos colectivos de la superficie,  $\mathfrak{I}$  está relacionado con el momento de inercia de esta superficie, y  $C$

que nos da el acoplamiento de la partícula con la superficie, también mide la anchura reducida asociada con las resonancias<sup>10</sup> debidas a los movimientos colectivos. En el supuesto de que la superficie tiene varias frecuencias características  $E_n$   $n = 0, 1, 2 \dots$  y no solo una, deberíamos introducir tantas funciones de onda sobre la superficie  $\psi_{2n}$  como frecuencias características, y aplicando el formalismo multinivel<sup>11</sup>, tenemos que:

$$(r \psi_1)_{r=R_0} = \sum_n C_n \psi_{2n} \quad , \quad (7.7)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{M}} \nabla^2 \psi_{2n} + E_n \psi_n = C_n^* \frac{\hbar^2}{2m_0 R_0^2} \left[ \frac{\partial r \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial r \psi_3}{\partial r} \right]_{r=R_0}$$

Para estados estacionarios con un momento angular definido, las funciones de onda son:

$$r \psi_1 = u_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp(-iEt/\hbar),$$

$$r \psi_3 = F_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp(-iEt/\hbar)$$

$$\psi_{2n} = A_{2n} Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp(-iEt/\hbar) \quad (7.8)$$

donde  $F_l(r)$  representa la solución regular en el interior para el potencial  $V(r)$ . Sustituyendo (7.8) en (7.7), y haciendo uso del hecho que  $u_l(kR_0) = F_l(R_0)$ , tenemos que la diferencia entre la derivada logarítmica exterior  $\tilde{f}_l$  y la interior  $f_l$  es:

$$\tilde{f}_l - f_l = (2m_0 R_0^3 / \hbar^2) \left[ \sum_n (|C_n|^2 / (E_{nl} - E)) \right]^{-1} \quad (7.9)$$

donde:  $E_{nl} = (\hbar^2 / 2\mathfrak{M}) l(l+1) + E_n$

La expresión (7.9) es muy similar a la (5.10), lo que muestra que por un análisis dentro del espacio de Fock, podríamos derivar los efectos colectivos sin tener que recurrir a aproximaciones como el método de perturbaciones o el de Tamm-Dancoff. Con el objeto de poder comparar mejor (7.9) con los resultados de la sección V, supondremos que las constantes de acoplamiento  $C_n$  son todas iguales a  $C$ , y que los niveles de resonancia asociados a los movimientos colectivos están igualmente espaciados con separación  $D$ , es decir que:

$$E_{nl} = E_{o'l} + (n - \frac{1}{2}) D \quad (7.10)$$

En tal caso<sup>18</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{|C_n|^2}{E_{nl} - E} &= (\pi/D) |C|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ (n - \frac{1}{2}) \pi - (\pi/D) (E - E_{o'l}) ]^{-1} \\ &= (\pi/D) |C|^2 \tan [ (\pi/D) (E - E_{o'l}) ] \quad (7.11) \end{aligned}$$

Introduciendo (7.11) en (7.9) tenemos que:

$$\tilde{f}_l - f_l = (D/\pi\gamma) \cot [ (\pi/D) (E - E_{o'l}) ], \quad (7.12)$$

en donde:

$$\gamma = (\hbar^2 |C|^2 / 2 m_o R_o^3) \quad (7.13)$$

La constante  $\gamma$  tiene el significado de anchura reducida asociada a las resonancias de los movimientos colectivos, porque en ausencia de dispersión por el interior del núcleo, es decir cuando  $f_l = 0$ ,  $\gamma = - (d\tilde{f}_l/dE)_{E_{res}}^{-1}$ .

La expresión (7.12) es idéntica a (5.13), si es que la razón de la distancia entre resonancias colectivas  $D$  a la anchura reducida de estas resonancias se hace igual a:

$$(D/\pi\gamma) = (5\hbar/8\pi B\omega) (K_0 R_0)^3 = (W/2\gamma_R) \quad (7.14)$$

De la tabla # 3 vemos que  $(W/2\gamma_R)$  es prácticamente constante e igual  $\sim 0.1$ . Esto implica que el presente análisis de la dispersión de nucleones por movimientos colectivos llevaría al mismo ensanchamiento de las resonancias predicho por la teoría de Tamm-Dancoff de la sección V, si la relación entre distancias entre niveles, y la anchura reducida de los mismos está dada por:

$$D \sim .3\gamma \quad , \quad (7.15)$$

lo que implica que las resonancias están tan cerca entre sí que solo podría observarse su efecto promedio a través de un ensanchamiento de las resonancias ordinarias relacionadas con el movimiento individual de las partículas.

### VIII CONCLUSION.

En las secciones anteriores hemos discutido los efectos de movimientos colectivos sobre las reacciones nucleares, tanto por lo que respecta a la excitación de niveles de vibración en núcleos poco deformados cercanos a capas cerradas, como por lo que respecta a la excitación de niveles de rotación para núcleos fuertemente deformados entre las capas. Vimos que el análisis por medio de la teoría de perturbaciones no es válido para los casos físicamente interesantes en que nos encontramos cerca de resonancias del interior del núcleo. El método de Tamm-Dancoff es más apropiado para la discusión de los efectos colectivos, y se obtiene, de las interacciones del nucleón con la superficie, un ensanchamiento de las resonancias y un correspondiente decremento del máximo de las mismas, que están de acuerdo con los lineamientos generales del modelo óptico del núcleo<sup>6</sup>.

Para el caso de la dispersión inelástica de neutrones, la sección en la aproximación Tamm-Dancoff tendría la misma forma que la obtenida por el análisis de perturbaciones, con la diferencia que la derivada logarítmica en el canal de en-

trada estaría dada por (5.5). Esta modificación alteraría la magnitud de la sección pero no su distribución angular, y por lo tanto, para la distribución angular podríamos seguir considerando el análisis de Hayakawa y Yoshida<sup>8</sup>, o bien, hacer la discusión a partir del análisis general de distribuciones angulares propuesto por Blatt y Biedenharn<sup>20</sup>

En las consideraciones expuestas en el presente artículo hemos indicado las interacciones del nucleón con los movimientos colectivos, pero no hemos tomado en cuenta que el núcleo está a su vez compuesto de nucleones indistinguibles del nucleón incidente. Es posible mostrar sin embargo, que en el supuesto que la función de onda de núcleo más nucleón incidente satisfaga el principio de Pauli, los elementos de matriz que intervienen en el análisis expuesto en el presente artículo no sufren cambios esenciales siempre y cuando los estados excitados sean de la superficie exclusivamente, y no estados excitados del interior del núcleo.

## REFERENCIAS

1. J. Rainwater. *Phys.Rev.* **79**, 432 (1950).
2. A. Bohr. *Dan Mat. Fys. Medd.* **26**, No. 14 (1952).
3. A. Bohr & B. R. Mottelson. *Dan. Mat. Fys. Medd.* **27**, No. 16 (1953).
4. M. Moshinsky. *Rev. Mex. Fis.* **4**, 95 (1955).
5. J. Blatt & V. F. Weisskopf. *Theoretical Nuclear Physics* (Jhon Wiley, N. Y.)
6. V. F. Weisskopf, C. E. Porter & H. Feshbach. *Phys. Rev.* **96**, 448 (1954).
7. S. Yoshida. *Prog. Theoretical Phys.* **12**, 141 (1954).
8. S. Hayakawa & S. Yoshida. *Prog. Theoretical Phys.* **14**, 1 (1955).
9. C. F. Wandel (Private communication of A. Lane).
10. M. Moshinsky. *Phys. Rev.* **81**, 347 (1951).
11. F. M. Medina Nicolau. *Rev. Mex.Fis.* **3**, 43 (1954).
12. K. W. Ford. *Phys. Rev.* **90**, 29 (1953).
13. E. U. Condon & G. H. Shortley. *The Theory of Atomic Spectra.* (Cambridge University Press.).
14. G. Racah. *Phys. Rev.* **62**, 438 (1942).
15. K. W. Ford & C. Levinson. *Phys. Rev.* **100**, 1 (1955).
16. E. P. Wigner. *Phys. Rev.* **70**, 15, 606 (1946).
17. H. Feshbach & Lax. *J. Accoust. Soc. Am.* **20**, 108 (1948).
18. J. Pierpont. *Functions of a Complex Variable.* (Ginn and Company) p. 285 .
19. L. Pauling & E. B. Wilson. *Introduction to Quantum Mechanics.* (McGraw - Hill) pp. 275-283.
20. J. Blatt y L. C. Biedenharn. *Rev. Mod. Phys.* **24**, 258 , (1952).

Esta Página está intencionalmente en blanco.