# EL SIGNIFICADO DE LA RELATIVIDAD. INVARIANCIA Y COVARIANCIA.

Hans Freistadt.

Newark College of Engineering, Newark 2, New Jersey.

(Recibido: Abril 15)

*RESUMEN*

*Tensor covariance and invariance of dynamical laws, as axioms of relativity, are not always equivalent. The implications of each axiomatic formulation, as well as arguments in favor of each, are reviewed. It is suggested that the question cannot be closed at the present time.*

El propósito de esta nota es el de recordar que existen dos formas axiomáticas distintas de enfocar la relatividad, y el de discutir los argumentos en favor y las implicaciones de cada uno de ellas.

Pocos puntos nuevos se presentarán, pero se pondrá énfasis sobre las ideas básicas que se tratan superficialmente en las discusiones ordinarias, y que son insuficientemente apreciadas aún por especialistas en la teoría de la relatividad. Para ilustrar esta última afirmación, los miembros de un coloquium sobre teoría de campo, muchos de los cuales tenían a su crédito varias publicaciones sobre física relativista, discutieron larga y acaloradamente aún antes de que la esencia de la controversia emergiera claramente. La presente nota es un sumario revisado y aumentado de estas discusiones.

En lo que puede llamarse la formulación covariante de la relatividad, el significado fundamental de la relatividad es que las cantidades físicas deben describirse por medio de objetos geométricos (tensores) en un continuo tetra-dimensional, del cual nuestros procesos imperfectos de medición solo regristan proyecciones tri-dimensionales y uni-dimensionales. Por otro lado, de acuerdo con la formulación invariante, el significado fundamental de la relatividad es que las leyes básicas de la física toman exactamente la misma forma para distintos observadores, por ejemplo, ecuaciones diferenciales parciales, con coeficientes constantes exactamente iguales en todos los sistemas cartesianos de coordenadas,* independientemente del estado de movimiento de tales sistemas.

La base de la discusión está en el hecho de que para las ecuaciones de Maxwell, estas dos formulaciones son idénticas. Históricamente hablando, la formulación tetra-dimensional de Minkowski vino después de la de Einstein, la cual fue formulada en términos de invariancia; pero la estructura axiomática que eventualmente toma una teoría física difiere frecuentemente del razonamiento inicial que nos llevó a su adopción. Por lo tanto, partidarios de la formulación geométrica (covariante) pueden argüir que la primera formulación de Einstein debe considerarse un razonamiento heurístico conducente a una teoría cuyo verdadero significado fué comprendido mas tarde (el sistema tetra-dimensional de Minkowski y la teoría general de Einstein) ; mientras que otros[1] pueden alegar que la formulación tetra-dimensional, aunque elegante y cómoda, no tiene significado intrínseco. Para ambas formulaciones la covariancia es un reflejo de una invariancia básica objetiva; esta invariancia básica consiste, para el punto de vista de invariancia, en que las leyes de

* Sistemas coordenados curvilineos no son admisibles, de acuerdo con el punto de vista invariante, en discusiones fundamentales (excepto en la teoría general de la relatividad, véase abajo) porque introducen una anisotropía e inhomogeneidad "artificiales".

física pueden tomar una forma universalmente válida ( a veces reflejada en cova - riancia geométrica), y para el punto de vista de covariancia en la objetividad de una variedad geométrica tetra-dimensional (algunas veces reflejada en la invariancia obsoluta de las leyes dinámicas). No hay una necesidad *a priori* para ninguna de las dos, aunque ambas son estructuras filosóficas completas, probablemente ciertas, en parte, pero sin duda sobre-simplificadas.

No sería correcto alegar que el punto de vista de invariancia proporciona una base "física" para la relatividad, en contraste con el punto de vista covariante "puramente matemático" . Mas bien, en el punto de vista de invariancia, la relatividad es un principio aplicado a las leyes dinámicas del campo ( ejemplo, las ecuaciones de Maxwell), con consecuencias cinemáticas, mientras que en el punto de vista de covariancia, se hace una suposición cinemática básica ( la geometría de espacio-tiempo tetra-dimensional) con algunas consecuencias dinámicas que proceden de esta suposición. La base cinemática es parte de la física con la misma razón que las leyes dinámicas sobrepuestas sobre esta base.*

La razón de la identidad de las dos formulaciones de la relatividad en el caso de las ecuaciones de Maxwell (así como las de Klein-Gordon) es que fuera de las constantes escalares solo aparecen las variables de campo y los operadores diferenciales. Puede alegarse que no sucede así en las ecuaciones de onda inhomogeneas:

$$\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}A^{\mu} = 4\pi\, j^{\mu} \qquad (1)$$

(donde $\nabla_{\mu}$ denota la derivada covariante) pero el vector $j^{\mu}$ no es parte de la ley básica; refleja mas bien una situación física explícita.

Si hubiera una ley dinámica básica del campo de la forma:

$$K^{\alpha}\nabla_{\alpha}\phi = 0 \qquad (2)$$

---

* La tendencia de la relatividad general y las teorías de campo unificadas basadas sobre ellos son de unir los aspectos cinemáticos y dinámicos de la física.

donde $K^{\mu}$ es un vector prescrito o un campo vectorial, y $\phi$ una variable de campo, *los coeficientes de las ecuaciones diferenciales parciales variarían de un* sistema inercial a otro. Aun la presencia de un campo escalar prescrito en una ley dinámica básica destruiría la equivalencia de observadores en posiciones diferentes. Ahora bien, existe una ley básica que es superficialmente de la forma (2), la ecuación de Dirac:

$$( i \gamma^{\alpha} \nabla_{\alpha} + K) \ \psi = 0 \tag{3}$$

pero esto intensifica mas bien que aplaca la discusión. Como es bien sabido las matrices $\gamma$ pueden considerarse como las componentes de un vector constante, componentes que son distintos en sistemas coordenados diferentes (punto de vista covariante), en cuyo caso el significado original (invariante) de la relatividad se pierde; en ese caso, $\psi$ es un campo con cuatro componentes escalares. Por otra parte, uno puede superponer sobre cualquier cambio de coordenadas en espacio *tiempo una transformación en el espacio del spin, que repone el status-quo en lo* que se refiere a las matrices $\gamma$, aun cuando las componentes de $\psi$ difieren entonces de un sistema coordenado a otro; en la última formulación (invariante), las matrices $\gamma$ no son objetos geométricos verdaderos en espacio-tiempo a pesar de la notación engañosa, el índice solamente indica suma y no caracter vectorial*. Cada punto presenta cierta similitud con el caso de las ecuaciones de Maxwell:

---

* Las formulaciones invariantes y covariantes de la ecuación de Dirac pueden ser consideradas como casos especiales de transformaciones generales combinadas en el espacio-tiempo y espacio spin. En discusiones basadas en este punto de vista mas general[2 3] los índices del spin generalmente se escriben explicitamente, ej. $\gamma^{\mu A}{}_{B}$, $\psi^{A}$, una notación debido a Veblen[4]. La *síntesis* afectada de esta manera nos proporciona una imagen mas clara de la controversia de invariancia-covariancia en la medida en que concierne a la ecuación de Dirac, sin resolverla sin embargo. Para partidarios del punto de vista de invariancia, esta síntesis suministra un camino menos extremo de llegar a su fin que aquel que pasa por alto el caracter vectorial del índice en las matrices $\gamma$. Partidarios del punto de vista de covariancia considerarán la necesidad de correlacionar las transformaciones de coordenadas como poco naturales. [Si la etiqueta que designa al sistema de coordenadas está ligado a los índices mas bien que al símbolo que caracteriza al objeto geométrico (esta notación idealmente adecuada a la geometría, se debe a Schouten[5]), cualquier considera-

el punto de vista de invariancia en que las ecuaciones de campo de Dirac son exactamente las mismas ecuaciones diferenciales parciales en todos los sistemas de referencia Galileanos, y el punto de vista de covariancia en que las ecuaciones denotan una relación geométrica tan solo en el mundo de Minkowski. Todas las consecuencias físicas de la ecuación de Dirac son en última instancia debidas a las relaciones de anti-conmutación de las matrices $\gamma$ , de modo que la disputa alrededor de cuál es el significado fundamental de la relatividad, no puede determinarse por medio de la ecuación de Dirac.

Un argumento en favor del punto de vista de invariancia es presentado por la posibilidad de representar el momento angular total como un operador de rotación infinitesimal, si se sigue el punto de vista de invariancia. Como puede verse en Kramers[7], Wigner[8], Dirac[9] y otros, la ley de conservación de momento angular total $J$ de un sistema aislado es una consecuencia directa de la isotropía del espacio en el cual el sistema está localizado. Porque si el espacio es isotrópico, el operador de rotación no debe afectar al Hamiltoniano; el operador de rotación en el punto de vista de invariancia, en el cual se supone que el espacio es isotrópico (véase abajo), puede entonces identificarse con una constante del movimiento (para sistemas cerrados). Hay cálculos que demuestran que:

$$D_z = y\ \partial/\partial x - x\ \partial/\partial y + \tfrac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \tag{4}$$

donde $D_z$ es el generador de rotación infinitesimal alrededor del eje $z$ , en el punto de vista de invariancia tal como se aplica a la ecuación de Dirac. El último término en $D_z$ , $\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2$ , se deriva precisamente de aquella parte del operador de rotación que regresa a las matrices $\gamma$ a su forma original por una transformación en el espacio de spin. El operador Hermitiano correspondiente

---

ción de invariancia para componentes de un objeto geométrico nos conduce a monstruosidades de notación que se siguen de $\gamma^{\mu A'}{}_{B'} = \gamma^{\mu A}{}_{B}$]. Ademas, muchos partidarios del punto de vista de covariancia se opondrían a objetos geométricos comunes a dos espacios (espacio-tiempo y espacio spin) como un ulterior e innecesario alejamiento de procesos físicos comprensibles enteramente en espacio-tiempo. Preferirían considerar el espacio spin como un recurso matemático conveniente para representar relaciones de anti-conmutación, pero de otro modo sin significado físico. Es notable que existen ecuaciones tensoriales apropiadas (ejem. ecuaciones sin índices de spin libre) equivalentes a la ecuación de Dirac[8]. Las ecuaciones tensoriales equivalentes son isotrópicas (ejem. los índices tensoriales libres son ligados a variables de campo u operadores diferenciales o a símbolos que denotan una situación física explícita).

$J_z \equiv i\hbar D_z$ incluye además del momento angular orbital convencional (los dos primeros términos) el término (extra) $\frac{1}{2} i\hbar\gamma_1\gamma_2$ , que describe el momento angular debido al spin. El operador $J$ es entonces identificado como el momento angular total; tambien tiene las propiedades de conmutación correctas. Este argumento no es concluyente, solo demuestra que el punto de vista de invariancia puede, en este aspecto, ser mas elegante. En el punto de vista de covariancia, el generador de rotación infinitesimal (llamémoslo $D'_z$ ) solo tiene los dos primeros términos (orbitales) de la ecuación (4), y no regresa a las matrices $\gamma$ a su forma original, $i\hbar D'_z$ (identificado con el momento angular orbital) no conmuta con el Hamiltoniano, y no caracteriza una constante de movimiento. No esperamos tal cosa, ya que en el punto de vista de covariancia se abandona la isotropía del espacio (véase abajo); en ese caso una rotación puede afectar al Hamiltoniano. La discusión de este párrafo no está restringida a electrones y a la ecuación de Dirac[10 11].

Puede sugerirse en favor del punto de vista de covariancia, que la relatividad general, teoría intrínsecamente geométrica, ha hecho pasar de moda el punto de vista original de invariancia haciendo equivalentes todos los sistemas de coordenadas y no solo a los sistemas pseudo-cartesianos, aunque mas bien en el sentido de covariancia geométrica que en el de invariancia númerica de los coeficientes de derivadas en sistemas pseudo-cartesianos; de hecho, es dudoso que los sistemas pseudo-cartesianos tengan un significado físico excepto como una aproximación local. En sistemas no-cartesianos, ecuaciones tales como (1) y (3) ya no tienen coeficientes constantes. La réplica para tal argumento puede hacerse en dos niveles diferentes:

1) Un sistema localmente pseudo-cartesiano (inercial) puede introducirse en cada punto de espacio-tiempo, en el cual $\left\{ {}^{\lambda}_{\mu\nu} \right\} = 0$ en ese punto. Entonces las ecuaciones básicas de primer orden de Maxwell y Dirac (en el punto de vista de invariancia) conservan los mismos coeficientes constantes; en el caso de las ecuaciones (1) de segundo orden, o en las ecuaciones de Klein-Gordon, el término principal conserva su coeficiente constante invariante.

2) Las ecuaciones de Maxwell y Dirac no pertenecen en realidad a la relatividad general, pero están "acomodadas" allí a falta de un razonamiento mejor*.

Las ecuaciones básicas de relatividad general son de la forma $R_{\mu\nu} = 0$. En esa ecuación los términos son de la forma $g^{\rho\delta} g_{\mu\nu\,',\rho\delta}$ y de nuevo las ecuaciones diferenciales (ahora no lineales) tienen los mismos coeficientes constantes en cada sistema coordenado (no necesariamente pseudo-cartesiano). El caracter de coeficientes constantes invariantes de las ecuaciones, destruído por $g_{\mu\nu}$ no-cartesianos, en los casos de las teorías de Maxwell y de Dirac, es restituido inmediatamente cuando $g_{\mu\nu}$ se convierte a su vez en variable de campo**.

Hay una forma de hacer la formulación covariante equivalente a la formulación invariante: el espacio-tiempo, además de las propiedades atribuídas a él por situaciones físicas explícitas, puede esperarse isotrópico y homogeneo. Como la existencia de un vector determinado o un campo vectorial $K^{\mu}$ ( o aún un campo escalar determinado) es incompatible con este requisito, se eliminan las leyes básicas de la forma (2). Es muy factible, sin embargo, considerar la isotrópia y la homogeneidad como aspectos accidentales de las ecuaciones de Maxwell, para abandonarse cuando buscamos nuevos principios heurísticos. Esto es de hecho, el punto de vista usado en la nueva teoría de electrones de Dirac[15, 16]†.

Las posibilidad de formular consistentemente el punto de vista de covariancia muestra que la extendida creencia de que los tensores no son adecuados para la descripción de la realidad física[1, 2], no ha recibido hasta hoy una confirmación †† definitiva[6].

Hay interesantes trabajos en proceso en la dirección de describir los efectos

---

* La mayoría de los físicos que tratan seriamente la relatividad general, esperan que los campos "lineales" (Maxwell, Dirac, Klein-Gordon) aparecerán a su debido tiempo, como aproximaciones lineales de una teoría de campo unificada, como por ejemplo la de Einstein[12] y la de Schrödinger[13]. En esas teorías de campo unificadas se pueden esperar ecuaciones de campo de una estructura análoga a las de campo gravitacional, mas bien que a las de ecuaciones lineales de campo utilizadas hasta el presente.

** Para una discusión "invariante" de la ecuación de Dirac en la relatividad general, usando el formalismo "vierbein" de paralelismo distante de Einstein, véase Belinfante[14], quien considera al índice vector de las matrices $\gamma$ como un índice mas bien local que universal.

† La anisotropía discutida por Dirac está conectada con el hecho que, de acuerdo con la electrodinámica cuántica, aún el vacío contiene alguna corriente virtual indicando una dirección pero todas las direcciones tienen una probabilidad igual de ser escogidas.

†† Belinfante[17] ha propuesto una formulación invariante y no covariante de electrodinámica. Ahí se necesitan transformaciones mas complicadas aún que aquellas de espacio de spin para hacer aparente la invariancia. En este caso, la formulación covariante ordinaria precedió a la teoría no-covariante.

de cuánticas así como la relatividad en términos de geometría de espacio-tiempo. (Ver la contribución de Vigier en De Broglie y Vigier[18]). De hecho, en vista de la aparente impunidad con la que uno puede abandonar la isotropía en el caso de las matrices $\gamma$ de las ecuaciones de Dirac, uno puede elucubrar si en el futuro no se abandonará también la homogeneidad del espacio-tiempo, describiendo de ese modo efectos físicos adicionales. Es posible naturalmente que tales aspectos anisotrópicos e inhomogeneos de la capa substratum reaparecerán como aspectos del campo en teorías de campo más elaboradas, por medio de un proceso análogo al descrito para el tensor métrico en la relatividad general.

La disputa no puede ser decidida en el momento actual. Solamente tres leyes relativistas (Maxwell, Dirac, gravitación de Einstein) se conocen ahora. No es sorprendente que sea posible postular dos super-leyes diferentes que no están en contradicción con las tres leyes conocidas. Uno se siente algo así como en el cuento de los siete indios ciegos que tocaban las partes diferentes de un elefante y disputaban sobre la naturaleza de lo que tocaban. Quizás la invariancia y la covariancia, en el sentido mencionado aquí, son super-leyes válidas. Quizás las dos son solamente reflexiones parciales de la objetividad de un universo físico más básico aún desconocido. En el actual estado de cosas, el autor piensa que el punto de vista de covariancia es mas conducente a nuevas ideas en física, especialmente de la hidrodinámica del (inobservado) substratum[19, 20, 21].

Los participantes en el coloquio a que nos referimos en el primer capítulo: B. T. Darling, Robert D. Hatcher, Banesh Hoffmann, George E. Hudson y Eugene J. Saletan, revisaron amablemente parte o todo el manuscrito, sin estar todos de acuerdo con su contenido. También me place agradecer al critico anónimo de Science por la sugestión de varios cambios en una versión anterior de esta nota, que no había sido publicada.

## REFERENCIAS

1. C. Moller, *The Theory of Relativity* (Oxford, 1952)

2. E. M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations* (London, 1953).

3. W. L. Bade y H. Jehle, Rev.Mod.Phys. **25**, 714 (1953).

4. O. Veblen y J. Von Neumann, *Geometry of Complex Domains* (Notas Mimeográficas, Princeton, 1935-36, por W. Givens y A. H. Taub).

5. J. A. Schouten, *Tensor Analysis for Physicists* (Oxford, 1951).

6. A. H. Taub, Ann.Math. (Princeton) **40**, 937 (1939).

7. H. A. Kramers, *Die Grundlagen der Quantentheorie* (EuckenWolf's *Hand und Jahrbuch der Chemischen Physik*, Vol. 1, Leipzig, 1938; separata por Edward Bros., Ann Arbor.)

8. E. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (Braunschweig, 1931).

9. P. A. M. Dirac, *The Principle of Quantum Mechanics* (Oxford, 1947).

10. F. J. Belinfante, Physica **6**, 887 (1939).

11. F. J. Belinfante, Physica **7**, 449, 765 (1940).

12. A. Einstein, *The Meaning of Relativity* (Princeton, 1953).

13. E. Schrödinger, *Space-Time Structure* (Cambridge, 1950).

14. F. J. Belinfante, Physica **7**, 305 (1940).

15. P. A. M. Dirac, Proc.Roy.Soc. **A 209**, 291 (1951).

16. P. A. M. Dirac, Nature **168**, 906 (1951).

17. F. J. Belinfante, Phys.Rev. **84**, 541, 546, 644 (1951).

18. L. de Broglie y J. P. Vigier, *La Physique Quantique Restera-t-elle Indeterministe* (Paris) 1953).

19. D. Bohm y J. P. Vigier, Phys.Rev. **96**, 208 (1954).

20. T. Takabayasi, Prog.Theor.Phys. **8**, 143 (1952).

21 T. Takabayasi, Prog.Theor.Phys. **9**, 187 (1953).

Esta Página está intencionalmente en blanco.