ESPACIOS DE PROBABILIDAD EN LA MECANICA CUANTICA I

Alejandro Medina.
Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Abril 30, 1956)

RESUMEN

This work contains an analysis of some of the fundamental principles underlaying the construction of operators in Quantum Mechanics. Each operator is associated to a projection operator and these projection operators are shown to fulfil a set of properties formally identical to those of a probability field. It is shown that, by the introduction of a measure in configuration space it is possible to obtain complete sets of commuting observables having, within limits, preasigned spectra. The introduction of new operators by consideration of the groups expressing the symmetries of the system, is discussed.

I. CAMPOS CUANTIZADOS DE PROBABILIDAD.

Consideremos un sistema mecánico cuyos observables constituyen un espacio de configuración $\mathcal{E}$. Cada punto de $\mathcal{E}$ representa una posible configuración clásica (es decir, no cuantizada) del sistema que requiere cierto número de datos para su especificación $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_n)$. El conjunto de las α'_i (i = 1, ...n) se representará por el símbolo (α'). Asi, (α') es un punto de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ a su vez es el conjunto de todos los (α').

Denotaremos por A un conjunto arbitrario de puntos de $\mathcal{E}$, es decir, un conjunto arbitrario de configuraciones no cuantizadas del sistema. El simbolo A designará en lo sucesivo una "variable conjunto". Además introduciremos como base de toda nuestra discusión una clase $\mathcal{B}$ de conjuntos A, que sea un anillo de Borel. De esta suerte, $(A, \mathcal{B})$ es un espacio medible. Supondremos además que $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$, o sea, que restringimos $\mathcal{B}$ a un algebra de conjuntos.

Introduzcamos ahora una medida μ sobre $\mathcal{B}$, de manera que $(A, \mathcal{B}, \mu)$ sea un espacio metrológico*. Excepto por el hecho de que la función de conjunto μ debe ser una medida, no supondremos ninguna otra restricción sobre μ es decir, consideramos una medida enteramente arbitraria. Por otra parte, indistintamente trataremos μ como función de conjunto $\mu = \mu(A)$ o como función casi monótoma $\mu = \mu(\alpha')$ de las variables (α') a la cual $\mu(A)$ esta unívocamente relacionada[1,2].

El esquema de cuantización se realiza de la manera siguiente: A cada punto $(\alpha') \in \mathcal{E}$ asociamos un elemento

$$(\alpha') \leftrightarrow |\alpha'\rangle \tag{1}$$

de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Nuestra suposición básica es que existe un espacio $\mathcal{H}$ que puede ser puesto en correspondencia biunivoca con $\mathcal{E}$ de tal manera que los kets $|\alpha'\rangle$ satisfagan las siguientes condiciones:

a) Los kets $|\alpha'\rangle$ forman un sistema ortonormal respecto a la medida μ, es decir:

$$\int_A \langle \alpha' | \alpha'' \rangle \, d\mu(\alpha'') = \Delta_A(\alpha') \quad , \tag{2}$$

---

* En el curso de este trabajo, la palabra "metrológico" se va a usar para denotar aquellas propiedades del espacio que se refieren a la medida μ, propiedades que, en general, son en todo diferentes a las "métricas" que dependen de la introducción de una distancia entre pares de puntos de $\mathcal{E}$.

en donde la integral del lado izquierdo debe entenderse en el sentido de Stieltjes, A es cualquier conjunto de $\mathcal{B}$ y $\Delta_A(\alpha')$ es la función característica de A es decir:

$$\Delta_A(\alpha') = \begin{cases} 1 \text{ si } (\alpha') \in A \\ 0 \text{ si } (\alpha') \bar{\in} A \end{cases} \quad , \qquad (2a)$$

Ademas (2) y (2a) valdrán para todo $A \in \mathcal{B}$.

b) Los kets $|\alpha'>$ forman un sistema completo, es decir [3, 4]:

$$\int |\alpha'> d\mu(\alpha') < \alpha'| = 1 \quad , \qquad (3)$$

en donde $\int \ldots$ denota la integral extendida al espacio completo $\mathcal{E}$.

Con estas hipótesis, a todo conjunto $A \in \mathcal{B}$ vamos a asociar un operador $P(A)$ que definiremos por la relación.

$$P(A) = \int_A |\alpha'> d\mu(\alpha') < \alpha'| \quad , \qquad (4)$$

de la definición y de (2) se sigue inmediatamente que:

$$P(A)|\alpha'> = \int_A |\alpha''> d\mu |\alpha'') < \alpha''|\alpha'> = \Delta_A(\alpha')|\alpha'> \quad (5)$$

de manera que $P(A)$ tiene valores propios 0 y 1 y debe por tanto satisfacer la ecuación:

$$P(A)\,[P(A) - 1] = 0 \quad , \qquad (5)$$

o sea que :

$$P(A) = P(A)^2 \qquad (6)$$

es un operador idempotente.

Todo conjunto $A \in \mathcal{B}$ determina un conjunto de kets $|\alpha'>$, a saber todos los kets $|\alpha'>$ cuyos "argumentos" (α') son miembros de A: $\{ \, |\alpha'> \, : \, (\alpha') \in A \, \}$ y a su vez estos kets subtienden un espacio lineal en $\mathcal{H}$ que es la clase de todos los elementos $|f> \in \mathcal{H}$ que son combinaciones lineales de dichos kets. Asi, a todo conjunto A de puntos de $\mathcal{E}$ se le puede hacer corresponder un espacio lineal $M(A)$ de $\mathcal{H}$ que se define por la relación

$$M(A) = \{ |f> : \; |f> = \int_A |\alpha'> d\mu(\alpha') <\alpha'|f> \} \quad , \qquad (7)$$

obviamente esta correspondencia es biunívoca:

$$A \leftrightarrow M(A) \qquad , \qquad (8)$$

de suerte que al anillo $\mathcal{B}$ de conjuntos A corresponde una clase $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ de espacios lineales de $\mathcal{H}$, cuyos miembros son los $M(A)$.

Designaremos ahora por $M(A)$ el complemento ortogonal[5]:

$$\hat{M}(A) = \mathcal{H} \ominus M(A) \qquad , \qquad (9)$$

de $M(A)$ en $\mathcal{H}$. Si A' es el complemento de A en $\mathcal{E}$, será:

$$\hat{M}(A) = M(A') \qquad . \qquad (9a)$$

Ademas, $\mathcal{H}$ se puede descomponer en la forma:

$$\mathcal{H} = M(A) \oplus \hat{M}(A) \qquad , \qquad (9b)$$

y cualquier ket $|\psi> \in \mathcal{H}$ se puede escribir como :

$$|\psi> = \int_A |\alpha'> d\mu(\alpha') <\alpha'|\psi> + \int_{A'} |\alpha'> d\mu(\alpha') <\alpha'|\psi> =$$

$$= |\psi>_A + |\psi>_{A'} \qquad (10)$$

en donde $|\psi>_A$ es la componente de $|\psi>$ sobre $M(A)$ y $|\psi>_{A'}$, la componente sobre $\widehat{M}(A)$. De (4) se sigue que $|\psi> \in \mathcal{H}$,

$$P(A) |\psi> = |\psi>_A \quad , \qquad (11)$$

o sea que $P(A)$ es el operador de proyección sobre $M(A)$.

De las relaciones anteriores se desprenden inmediatamente los siguientes resultados: si $\emptyset$ designara el conjunto vacío,

$$P(\emptyset) = 0 \quad , \qquad (12)$$

del caracter completo del conjunto de kets resulta:

$$P(\mathcal{E}) = 1 \quad , \qquad (12a)$$

además

$$P(A_1) + P(A_2) = P(A_1 \cup A_2) \quad , \qquad (12b)$$

para cualquier par A_1, A_2 de conjuntos de $\mathcal{B}$ tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

La relación de inclusión establece un ordenamiento parcial de los conjuntos $A \in \mathcal{B}$. Claramente, si $A_1 \subseteq A_2$, será $M(A_1) \subseteq M(A_2)$ asi que la misma relación de inclusión establece un ordenamiento parcial de los espacios lineales $M \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Podremos ahora convenir en que cuando $A_1 \subseteq A_2$, lo que ocurre si y solo si $M(A_1) \subseteq M(A_2)$, se escribirá:

$$P(A_1) \leqslant P(A_2) \quad , \qquad (13)$$

lo cual establece un ordenamiento parcial de los operadores $P(A)$. Entonces, en tanto que para todo $\mathbf{A}$, $\emptyset \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathcal{E}$, de (12), (12a), y (13) se sigue que para *todo* $\mathbf{A} \in \mathcal{B}$,

$$0 \leqslant P(\mathbf{A}) \leqslant 1 \tag{12c}$$

Por otra parte de la definición se sigue que:

$$P(\mathbf{A}_1)\ P(\mathbf{A}_2) = P(\mathbf{A}_2)\ P(\mathbf{A}_1) = P(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) \tag{14}$$

de donde se infiere que todos los $P(\mathbf{A})$ conmutan:

$$[\ P(\mathbf{A}_1)\ ,\ P(\mathbf{A}_2)\ ] = 0 \tag{12d}$$

Las ecuaciones (12) a (12d) tienen todo el aspecto formal de los postulados de Kolmogorov sobre la probabilidad. Basta substituir $\mathcal{E}$ por $\mathcal{H}$, $(\alpha')>$ por $|\alpha'>$, $\mathbf{A}$ por $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{B}$ por $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Los operadores $P(\mathbf{A})$ se comportan como una probabilidad sobre $\mathcal{L}$. Por esta razón $(\mathcal{H}, \mathcal{L}, P)$ se llamará un CAMPO CUANTIZADO DE PROBABILIDADES. Es de hacerse notar que la relación (13) representa solamente un ordenamiento parcial. Esta característica y la idempotencia de las $P(\mathbf{A})$ son las principales notas distintivas entre las probabilidades cuantizadas y las ordinarias.

Como operadores, las $P(\mathbf{A})$ son acotados. En efecto, en tanto que:

$$||\ P(\mathbf{A})\ |\psi>\ || \leqslant ||\ |\psi>\ || \quad ,$$

será siempre:

$$|\ P(\mathbf{A})\ | \leqslant 1 \tag{15}$$

La función de conjunto $P(\mathbf{A})$ puede asociarse unívocamente a una función puntual $P(\alpha')$ de la manera ordinaria: a cualquier punto $(\alpha') \in \mathcal{E}$ se le hace corresponder el intervalo semi-infinito $((-\infty), (\alpha'))$ y entonces $P(\alpha')$ se define por la relación :

$$P(\alpha') = \int_{-\infty}^{(\alpha')} |\alpha'' > d\mu\,(\alpha'') < \alpha''| \quad , \tag{16}$$

de suerte que $P(\alpha')$ se comporta como una función de distribución .

Formalmente, en el sentido de NIKODYM, escribiremos:

$$dP(\alpha') = |\alpha' > \ d\mu\,(\alpha') < \alpha'| \quad , \tag{17}$$

de donde se infiere que la derivada de NIKODYM:

$$\frac{dP(\alpha')}{d\mu(\alpha')} = |\alpha' > < \alpha'| \quad , \tag{18}$$

es la proyección sobre el eje $|\alpha' >^{e}$.

II. CONSTRUCCION DE OPERADORES.

Sea ahora $f(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_n) = f(\alpha')$ una función de posición en $\mathcal{E}$. La esperanza de $f(\alpha')$ respecto a la probabilidad cuantizada $P(\mathbf{A})$, es el operador:

$$f(\alpha) = \int f(\alpha')\ d\,P\,(\alpha') \quad , \tag{19}$$

se tiene:

$$f(\alpha)\,|\alpha' > = \int f(\alpha'')\ dP\,(\alpha'')\,|\alpha' > = \int f(\alpha'')\,|\alpha'' > d\mu\,(\alpha'') < \alpha''|\alpha'>$$

$$= f(\alpha')\,|\alpha' > \quad ,$$

es decir, $f(\alpha)$ es diagonal y sus valores propios son $f(\alpha')$. En particular, si $f(\alpha') = \alpha'_i$ es una de las coordenadas, el operador resultante:

$$\alpha_i = \int \alpha'_i \; d\, P\, (\alpha') \qquad (20)$$

es el operador asociado a la variable α'_i . Este operador se puede entender como el valor esperado de α'_i relativamente al sistema de probabilidad cuantizada.

Si $|\psi>$ es un estado arbitrario, podemos definir para todo $\mathbf{A}$ la función (numérica) de conjunto:

$$p\,(\mathbf{A}\,|\,\psi) = <\psi\,|\,P(\mathbf{A})\,|\,\psi> = \|\;|\psi>_{\mathbf{A}}\|^2 , \qquad (21)$$

es decir, $p\,(\mathbf{A}\,|\,\psi)$ es la esperanza de $P(\mathbf{A})$ en el estado $|\psi>$.

En general,

$$|\psi> = \int |\alpha'>\, d\mu\,(\alpha') <\alpha'|\psi> = \int |\alpha'>\, d\mu(\alpha')\; \psi(\alpha') , \qquad (22)$$

en donde:

$$\psi(\alpha') = <\alpha'\,|\,\psi> \qquad (22a)$$

se llamará la "FUNCION DE ONDA" que representa al estado $|\psi>$ [3].

De (21) y (22) se sigue que:

$$p(\mathbf{A}\,|\,\psi) = <\psi\,|P(\mathbf{A})\,|\,\psi> = \int_{\mathbf{A}} <\psi|\,\alpha'>\, d\mu(\alpha') <\alpha'\,|\,\psi> =$$

$$= \int_{\mathbf{A}} |\,\psi(\alpha')\,|^2\, d\mu\,(\alpha') \qquad (23)$$

es decir, $p(\mathbf{A}\,|\,\psi)$ es la probabilidad de encontrar al sistema dinámico en cualquier estado $(\alpha') \in \mathbf{A}$ cuando se encuentra en el estado $|\psi>$.

Si $|\psi>$ está debidamente normalizado, $p(\mathbf{A}\,|\,\psi)$ es una probabilidad en el sentido ordinario. Concretamente, es la probabilidad de transición (causada por observación) del estado $|\psi>$ al "estado conjunto" $\mathbf{A}$. De este modo, por medio de (21), la probabilidad operacional $P(A)$ puede emplearse para definir infinitos campos de probabilidad ordinaria $p(A \mid \psi)$ correspondientes a todos los estados bien comportados $\mid \psi >$ del sistema.

La integral:

$$p(\alpha' \mid \psi) = \int_{-\infty}^{(\alpha')} \mid \psi(\alpha'') \mid^2 d\mu(\alpha'') = < \psi \mid P(\alpha') \mid \psi > \quad , \qquad (24)$$

es la correspondiente función de distribución. Es de observarse que $p(A \mid \psi)$ es uniformemente contínua respecto a $\mu(A)$ y que la derivada de Nikodym:

$$\frac{d\, p(\alpha' \mid \psi)}{d\mu(\alpha')} = \mid \psi(\alpha') \mid^2 \qquad (25)$$

es la densidad de probabilidad respecto a μ.

La esperanza del operador $f(\alpha)$ en el estado $\mid \psi >$ será:

$$< f(\alpha) >_\psi = < \psi \mid f(\alpha) \mid \psi > = \int f(\alpha')\, d < \psi \mid P(\alpha') \mid \psi > =$$

$$= \int f(\alpha')\, dp\, (\alpha' \mid \psi) \quad , \qquad (26)$$

es decir, es la esperanza de la función $f(\alpha')$ respecto a la probabilidad $p(A \mid \psi)$.

III. TRANSFORMACIONES.

Sea $T : \alpha' \to \bar{\alpha}' = T(\alpha')$ una transformación de $\mathcal{E}$ que manda el punto (α') *al punto* $(\bar{\alpha}')$. *En virtud de* T, *un conjunto* A *de* $\mathcal{E}$ *se transformará* en un conjunto $\bar{A} = T(A)$ y a su vez será $A = T^{-1}(\bar{A})$. A su vez la medida μ sufre una transformación $\mu \to \bar{\mu}$ en donde $\bar{\mu}(\bar{A}) = \mu[T^{-1}(\bar{A})] = \mu(A)$. Consideraremos tan sólo transformaciones $\mathcal{B}$-medibles que dejan la medida invariante. Para ellas será:

$$\bar{\mu}(\bar{A}) = \mu[T^{-1}(\bar{A})] = \mu(A) = \mu(\bar{A}) \quad , \qquad (27)$$

estas transformaciones las llamaremos ISOMETROLOGICAS.

En virtud de la correspondencia biunívoca $(\alpha') \leftrightarrow |\alpha'>$ entre puntos de $\mathcal{E}$ y kets de $\mathcal{H}$, al transformado $(\bar{\alpha}')$ de (α') corresponde un ket $|\bar{\alpha}'>$ que puede considerarse como el transformado de $|\alpha'>$.

Así pues T induce en $\mathcal{H}$ una transformación:

$$\begin{aligned} |\alpha'> \rightarrow |\bar{\alpha}'> &:= |T(\alpha')> \\ \bar{\alpha}' &= T(\alpha') \end{aligned} \quad . \qquad (28)$$

En virtud del caracter ortonormal de los $|\alpha'>$, la transformación inducida en $\mathcal{H}$ podrá representarse por un operador unitario u_T tal que:

$$\begin{aligned} <\bar{\alpha}'| &= <T(\alpha')| = <\alpha'| u_T \\ |\bar{\alpha}'> &= |T(\alpha')> = u_T^{-1} |\alpha'> \end{aligned} \quad . \qquad (29)$$

La ley de transformación de las proyecciones se siguen inmediatamente:

$$\bar{P}(\bar{A}) = \int_{\bar{A}} |\bar{\alpha}'> d\bar{\mu}(\bar{\alpha}') <\bar{\alpha}'| = \int_{\bar{A}} |\bar{\alpha}'> d\mu(\bar{\alpha}') <\bar{\alpha}'| = P(\bar{A}) =$$

$$= \int_A |T(\alpha')> d\mu(\alpha') < T(\alpha')| = u_T^{-1} \int_A |\alpha'> d\mu(\alpha') <\alpha'| \, u_T =$$

$$= u_T^{-1} P(A) \, u_T \quad .$$

En virtud del caracter isometrológico de T, FUNCIONALMENTE $P(A)$ se transforma por invariancia y como operador sufre una transformación unitaria:

$$P(\bar{A}) = P[T(A)] = u_T^{-1} P(A) \, u_T \quad . \qquad (30)$$

La función de transformación es :

$$< \bar{\alpha}'' \mid \alpha' > \; = \; < \alpha'' \mid u_T \mid \alpha' > \tag{31}$$

y un sencillo cálculo muestra que los elementos de matriz de $P\,[\,T(A)\,]$ son:

$$< \alpha' \mid P(T(A)) \mid \alpha'' > = \int_A < \alpha' \mid T(\alpha''') > d\mu(\alpha''') < T(\alpha''') \mid \alpha'' >$$

$$= \int_{\bar{A}} < \alpha' \mid \bar{\alpha}''' > d\mu(\bar{\alpha}''') < \bar{\alpha}''' \mid \alpha'' > . \tag{32}$$

Podemos asociar a las nuevas variables $\bar{\alpha}'_i = \bar{\alpha}'_i\,(\alpha')$ un conjunto de operadores $\bar{\alpha}'_i$ empleando el mismo formalismo del párrafo **II** :

$$\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i(\alpha) = \int \bar{\alpha}'_i\,(\alpha')\,dP(\alpha') \quad , \tag{33}$$

por cambio de variables en la integral resulta:

$$\bar{\alpha}_i = \int \bar{\alpha}'_i\; dP\,(\bar{\alpha}') \quad , \tag{33a}$$

y empleando las propiedades de transformación de $P(A)$,

$$\bar{\alpha}_i = \int \alpha'_i\; d\, u_T^{-1}\, P\,(\alpha')\; u_T = u_T^{-1}\;\alpha_i\, u_T \quad , \tag{33b}$$

así que deberá cumplirse:

$$\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i\,(\alpha) = u_T^{-1}\;\alpha_i\;u_T \quad , \tag{34}$$

además es obvio que:

$$\bar{\alpha}_i \mid \bar{\alpha}' > \; = \; \bar{\alpha}'_i \mid \bar{\alpha}' > \quad , \tag{35}$$

de manera que el formalismo entero permanece invariante.

IV. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES:

Consideremos ahora un grupo $\mathcal{G} = \{T\}$ de transformaciones isometrológicas. Supondremos que $\mathcal{G}$ es un grupo contínuo con p parámetros: $(r^1, r^2 \ldots r^p) = (r)$. El elemento de parámetros (r) será designado por $\{r\}$ y el correspondiente punto en el espacio paramétrico $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ se denotará por (r)[7]. *Suponemos además que el origen $r^i = 0$ corresponde a la identidad del grupo* $T = I$. Nuestros operadores u_T serán ahora funciones de los parámetros de T y los denotamos consecuentemente por $u(r)$. Las ecuaciones (34) se escriben ahora en la forma:

$$\bar{\alpha}^i = \bar{\alpha}^i \ (\alpha, r) = u(r)^{-1} \ \alpha_i \ u(r) \qquad , \qquad (36)$$

correspondiendo a la transformación:

$$\bar{\alpha}'^i = \bar{\alpha}'^i \ (\alpha', r) \qquad . \qquad (36a)$$

Introducimos ahora las transformaciones infinitesimales[8, 9].

$$\lambda^i_j(\alpha) = \left(\frac{\partial \ \bar{\alpha}'^i \ (\alpha, r)}{\partial \ r^j} \right) \qquad . \qquad (37)$$

$$I_j = \left(\frac{\partial \ u \ (r)}{\partial r^j} \right) \qquad . \qquad (38)$$

Puesto que $u(0) = 1$ y $\bar{\alpha}^i(\alpha, 0) = \alpha^i$, derivando (36) parcialmente respecto a r^j y tomando el límite cuando todas las $r \to 0$ resulta:

$$\lambda^i_j(\alpha) = \alpha^i I_j - I_j \alpha^i$$

o sea

$$[\alpha^i, I_j] = \lambda^i_j(\alpha) \qquad , \qquad (39)$$

relación que expresa las reglas de conmutación entre las observables α^i y los operadores infinitesimales I_j del grupo de simetrías.

Se sabe por otra parte que los operadores $u(r)$ deben satisfacer las ecuaciones:

$$\frac{\partial u(r)}{\partial r^i} = u(r)\, I_k\, v^k{}_i(r) \qquad , \qquad (40)$$

en donde las $v^k{}_i(r)$ son las funciones características de $\mathcal{G}$. Se recuerda además que los operadores infinitesimales cumplen las reglas de conmutación[8]:

$$[I_i, I_j] = c^k_{ij} I_k \qquad , \qquad (41)$$

siendo las c^k_{ij} las constantes estructurales del grupo. Además, del caracter unitario de $u(r)$ se deriva, como es sabido, la propiedad antihermitiana de las I_j:

$$I^+_j = - I_j \qquad . \qquad (42)$$

Podemos pues formar un conjunto de operadores hermitianos:

$$\beta_j = i\, I_j \qquad , \qquad (43)$$

que son los IMPULSOS ASOCIADOS AL GRUPO $\mathcal{G}$. De (39) y (41) resultan las reglas de conmutación:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha^i, \beta_j] &= i\,\lambda^i_j(\alpha) \\ [\beta_i, \beta_j] &= i\, c^k_{ij}\, \beta_k \end{aligned}\right\} \qquad . \qquad (44)$$

Nuevamente de (36) resulta:

$$i \frac{\partial \alpha^i}{\partial r^j} = [\alpha^i, \beta_j] \tag{45}$$

que es la ecuación de movimiento del operador α^i respecto al parametro r^j y por otra parte escribiendo la ecuación de transformación de los kets básicos (29) en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \langle \bar{\alpha}' | &= \langle \alpha' | \; u(r) \\ | \bar{\alpha}' \rangle &= u(r)^{-1} \; | \alpha' \rangle \end{aligned} \right\} \tag{46}$$

se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial \langle \alpha' |}{\partial r^j} &= \langle \alpha' | \beta_j \\ - i \frac{\partial | \alpha' \rangle}{\partial r^j} &= \beta_j | \alpha' \rangle \end{aligned} \right\} \tag{47}$$

En la continuación de este trabajo estudiaremos algunas consecuencias de estos resultados.

REFERENCIAS

1. Halmos, *Measure Theory*, New York, 1951 .
2. J. V. Neumann, *Functional Operators* , Princeton, 1950.
3. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, 1947.
4. K. O. Friedrichs, *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*, New York, 1953.

5. B. v. Sz. Nagy, *Spektraldarstellung Linearer Transformationen des Hilbert - schen Raumes,* Berlin, 1942.
6. J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin, 1942
7. E. Wigner, *Gruppentheorie und ihre anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren.* Braunschweig, 1931.
8. L. Pontrjagin, *Topological Groups,* Princeton, 1946.
9. B. L. van der Waerden, *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik.* Berlin, 1932.

Esta Página está intencionalmente en blanco.