

SOBRE LA SINTESIS DE SISTEMAS LINEALES PARA LA TRANSMISION SIN
RETRASO, RETRASADA Y PREDICION LINEAL DE SENALES. II *

Manuel Cerrillo V.

Instituto Nacional de la Investigación Científica

e

Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de
México

(Recibido: Julio 15, 1955)

III.- FENOMENOS DE CONVERGENCIA DE LAS SOLUCIONES .-
EFECTO DE LA DISPERSION DE IMPULSOS.

3.0 Objetivo de este Capítulo.- En el capítulo I sección 5.0, se ha indicado que una función de excitación aceptable $\varphi(t)$, se puede descomponer en tres funciones componentes: Una función continua $\varphi_1(t)$ de clase C^0 en el intervalo $0 < t \leq \infty$. Una función discontinua $\varphi_2(t)$ en forma de escalera que presenta saltos de altura finita, sobre un conjunto numerable de puntos aislados en el intervalo $0 < t \leq \infty$. Una función singular $\varphi_3(t)$ que es casi nula para todos los

* La primera parte de este trabajo fue publicada en el volumen IV. pag. 61, de la Revista Mexicana de Física.

puntos en el intervalo $0 < t < \infty$. Los puntos excepcionales forman un conjunto numerable y aislado, donde $\varphi_s(t)$ toma las mismas funciones singulares contenidas en $\varphi(t)$. Es decir, $\varphi_s(t)$ está formada por los impulsos, dobletes etc. de $\varphi(t)$.

3.01 El estudio de convergencia que ahora nos proponemos investigar se describe así: Consideremos el problema general de síntesis de determinar un arreglo de ventanas $S_c(t)$, arreglo que representa a la función del sistema, tal que transforme la excitación $\varphi(t)$ en una respuesta de la forma $\gamma^*(t)$, la que es una función símil a $\gamma(t)$.

Supongamos ahora que se toma la componente $\varphi_1(t)$ de clase C^0 asociada a $\varphi(t)$. Con esta componente determinamos las medidas a_0, a_1, \dots, a_m de la distribución de ventanas, tal como se hizo en la sección 2.22 del capítulo anterior. Ahora nos proponemos investigar cual es la respuesta de un sistema lineal de cuatro terminales representado por la distribución así calculada a las excitaciones componentes $\varphi_2(t)$ y $\varphi_3(t)$.

El estudio correspondiente se ordenará como sigue:

- a.- Respuesta del sistema en la vecindad de un impulso aislado de $\varphi(t)$.
- b.- Respuesta del sistema en la vecindad de un salto aislado de $\varphi(t)$.
- c.- Respuesta del sistema a la excitación $\varphi(t)$ en el intervalo $0 \leq t < t_l$; siendo t_l la duración o vida de la distribución de ventanas.

Las respuestas del sistema relativas a los casos a, b, c, constituyen un comportamiento anómalo del sistema. En estos casos se producen fenómenos de convergencia, durante los cuales las gráficas de respuesta pueden sobrepasar a las tolerancias prescritas por el conjunto $[\epsilon_i]$ mencionado en los capítulos anteriores.

El resultado de este estudio demostrará que cada apertura a_k , del set $[a_k]$, está centrada sobre los puntos que forman los conjuntos donde $\varphi(t)$ es discontinua sobre singularidades. El intervalo $0 \leq t < t_l$, también pertenece al set $[a_k]$.

Se demostrará que la mínima apertura es necesariamente igual a t_l , $t_l =$ vida de la distribución.

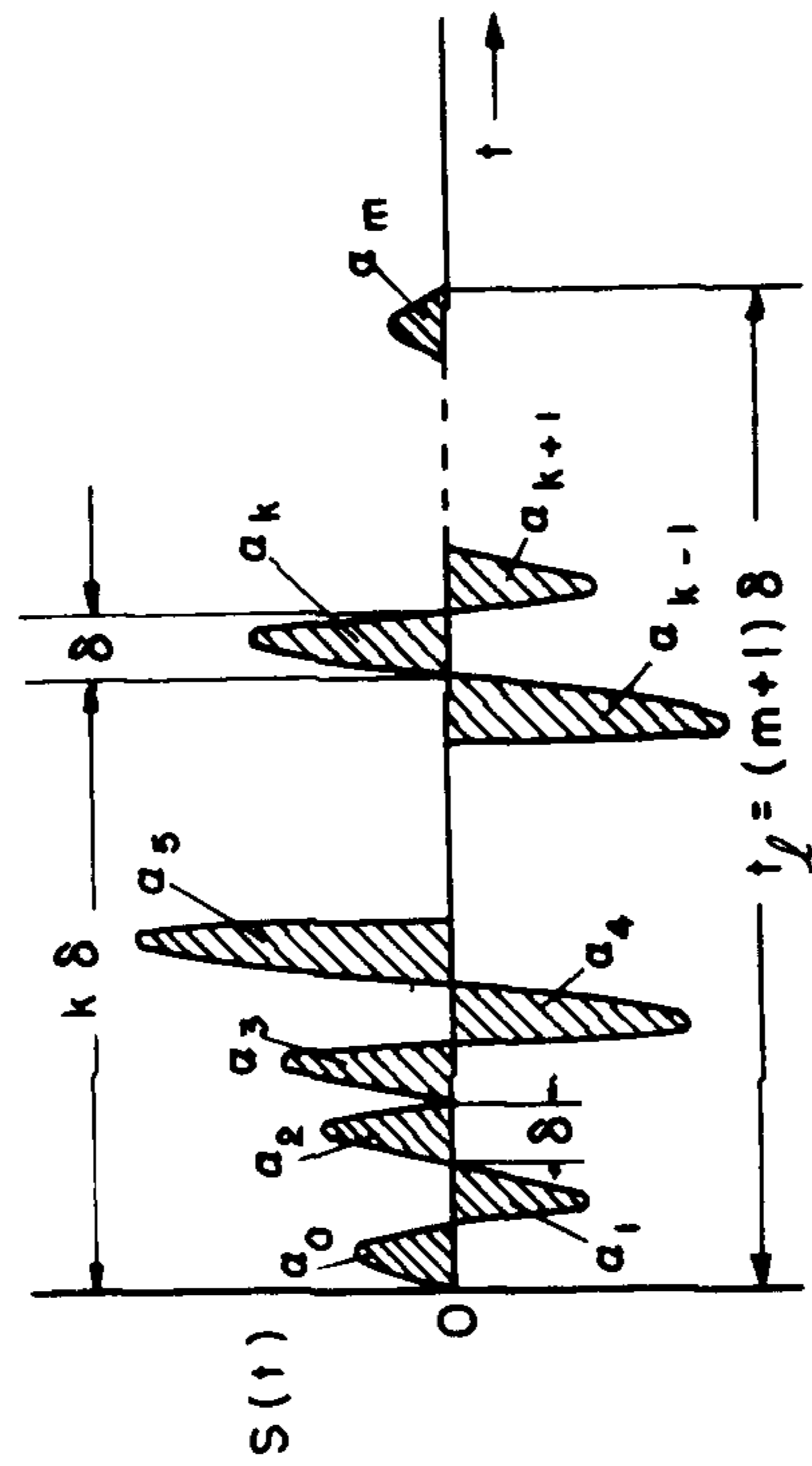


Fig. 1, (III-3.01). Dispersión de la distribución de impulsos correspondiente a la figura 1, (II-2.1).

3.02 En un sistema finito, principalmente con elementos concentrados, la propagación de un impulso se verifica con dispersión. El impulso se transforma en un pulso de abertura "a" diferente de cero y puede tener oscilaciones laterales. Por esta razón, una función de sistema $S_c(t)$ no se forma por la distribución ideal de un número de impulsos de duración cero. El tipo de funciones de sistema que ahora estudiaremos está ilustrado en la figura 1,(5 - 1.4), sección 1.4.

Nos proponemos estudiar en este capítulo la cuestión siguiente:

Supongamos ahora que la función $S_c(t)$ no está formada por impulsos distribuidos sobre un conjunto de medidas cero, sino que cada impulso constituyente se dispersa en un pulso de apertura δ , conteniendo respectivamente un área igual a la medida α_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$ o del impulso correspondiente. La figura 1, (III - 3.01) muestra la dispersión de la distribución de impulsos, correspondientes a la figura 1, (II - 2.1).

Es necesario investigar cuales son las modificaciones o interpretaciones que se debe dar a la expresión 2, (II - 2.22) que determina las medidas α_n , $n = 0, 1, \dots, m$ de una distribución de ventanas en la solución de un problema dado cuando se considera la dispersión.

Se demostrará que las expresiones 2, (II - 2.22) también producen las áreas respectivas de las ventanas en el kernel disperso, con la condición adicional que el módulo de oscilación de la componente continua $\varphi_1(t)$ de $\varphi(t)$ sea pequeño en el intervalo t_j de vida de la distribución $S_c(t)$.

3.1 Respuesta de la vecindad de un impulso aislado de $\varphi(t)$.

Consideremos el i -ésimo impulso de la componente $\varphi_3(t)$ asociada a $\varphi(t)$. Sea p_i la medida de este impulso. La función de distribución $\beta_i(t)$ asociada a este impulso es un escalón en el tiempo t_i , de altura p_i . La respuesta del sistema caracterizado por la distribución $S_c(t)$ será dado por una integral de convolución. Por integración por partes esta respuesta, llamémosla $r_i(t)$, será dada por:

$$r_{(i)}(t) = \int_0^t S_c(t-\tau) d\beta_{(i)}(\tau) = p_i S_c(t-t_i); \quad 1, (III - 3.1)$$

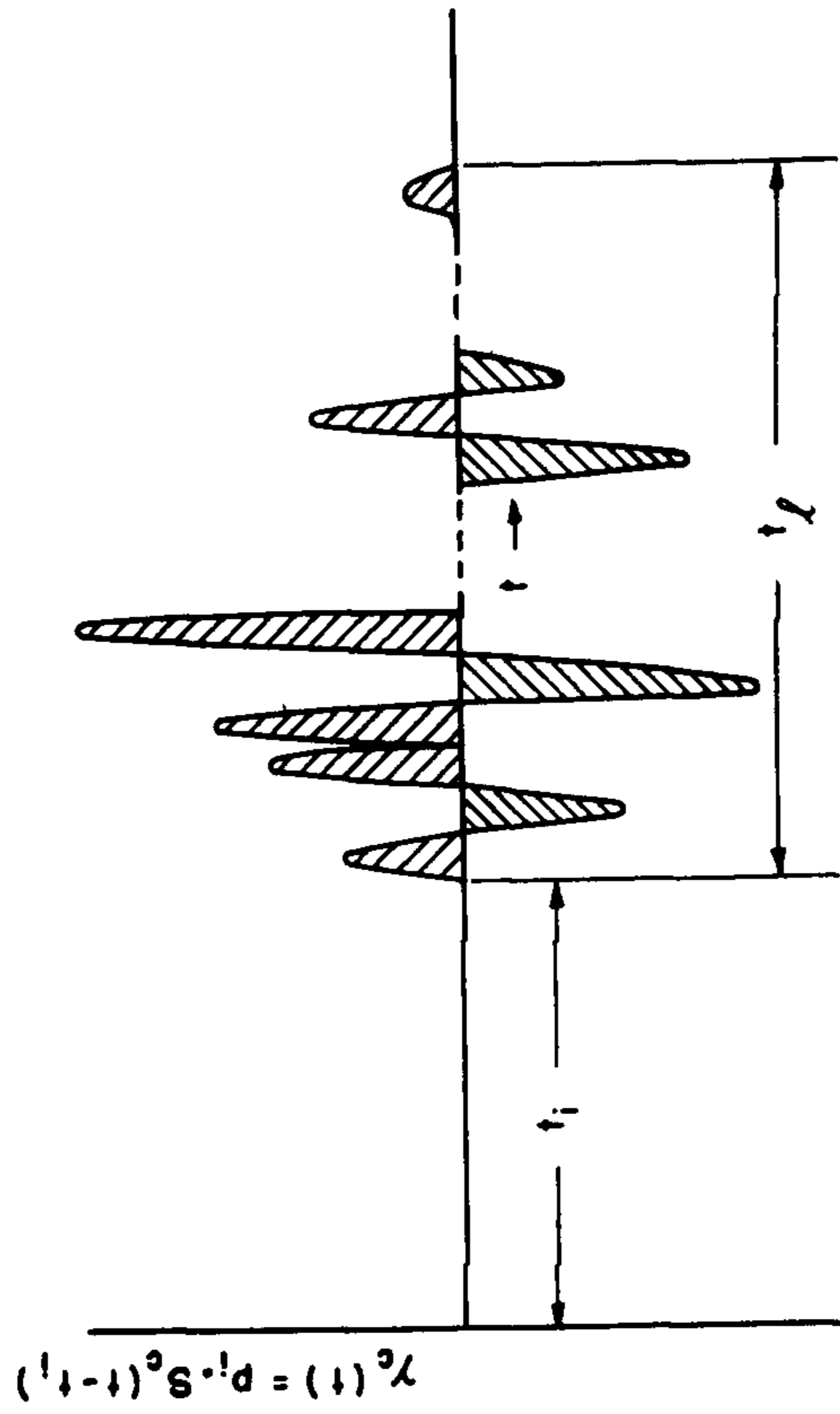


Fig. 1, (III-3.1). Respuesta del sistema a un impulso de medida p_i actuando en $t = t_i$.

La respuesta es pues la función de sistema misma desplazada un tiempo t_i , del origen, y ampliada p_i unidades. La duración de la respuesta será evidentemente t_l unidades de tiempo.

En virtud del carácter singular del impulso de excitación, el resultado anterior es igualmente correcto cuando $S_c(t)$ está formada por impulsos dispersos. La figura 1, (III-3.1) muestra un esquema, no a escala, de esta último tipo de respuesta.

Sean t_i y t_{i+1} los tiempos en que aparecen dos impulsos sucesivos de $\varphi_3(t)$. Si $t_{i+1} - t_i \geq t_l$, entonces las respuestas de cada impulso no se superponen. Para $t_{i+1} - t_i < t_l$ entonces la respuesta se obtiene por superposición de cada una.

3.2 Respuesta en la vecindad de salto aislado de $\varphi_2(t)$.

La respuesta del sistema cuando el kernel $S_c(t)$ es de carácter singular o no singular son diferentes pero parecidas. Ver figuras 1, (II-2.1) y 1, (III-3.01). Aplicando la integral de convolución se obtienen inmediatamente las respuestas en ambos casos. Sea J_k la medida del salto de la función $\varphi_2(t)$ ocurrido en el tiempo t_k .

$$R_k(t) = \int_0^t \varphi_2(t-\tau) d\alpha(\tau) = J_k \int_0^{t_l} d\alpha(\tau)$$

Recordando que $\varphi_2(t) = 0$ para $t < t_k$ $\varphi_2(t) = J_k$ para $t > t_k$. La figura 1, (III-3.2) muestra ambas respuestas. La respuesta en escalera corresponde al kernel singular. La respuesta con kernel continuo es también continua, y ella se apoya sobre los peldaños de la función de escalera que corresponde a la respuesta en el caso singular. Nótese que estas respuestas comienzan en cero para $t < t_k$ y fluctúan durante el intervalo t_k y $t_k + t_l$, quedando constantes para $t \geq t_k + t_l$.

La respuesta correspondiente a cada salto debe sumarse considerando su desplazamiento en tiempo. Cuando dos saltos sucesivos de $\varphi_2(t)$ ocurren con una diferencia de tiempo mayor que t_l , entonces las fluctuaciones causadas por el primer salto no interfieren con los del segundo, excepto por un valor constante.

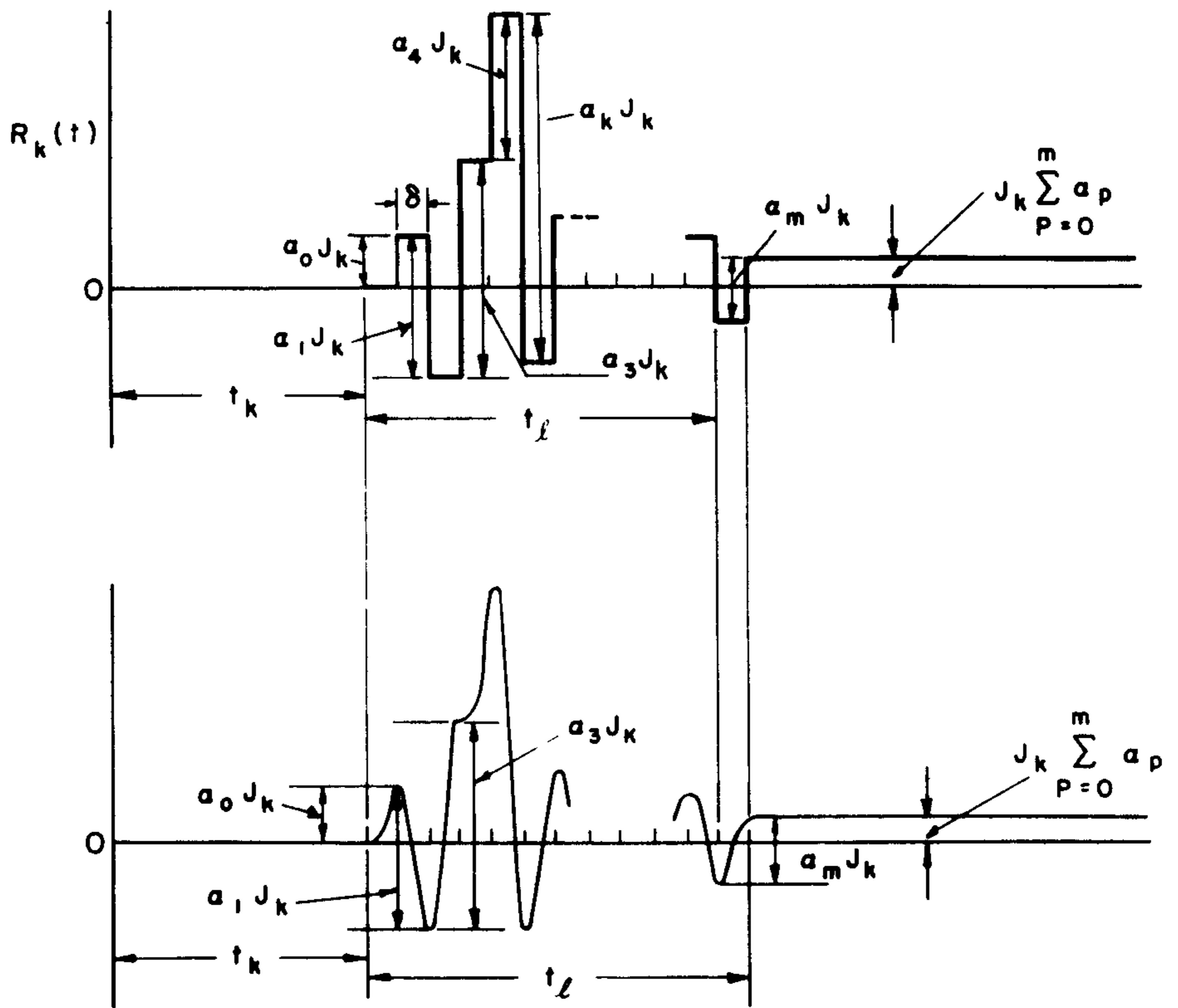


Fig. 1, (III-3.2). Respuesta de la distribución $S_k(t)$ a un salto aislado de la función $\phi_2(t)$, de altura J_k y ocurrido en $t = t_k$.

3.3 Evaluación de las medidas de las ventanas con distribuciones de apertura no nula.

Nos proponemos evaluar las medidas $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ de una distribución de ventanas en caso de que cada ventana cubra una apertura $\delta > 0$.

Se probará: Las expresiones 2, (II-2.22) permanecen iguales, en el caso de dispersión cuando se satisface la condición siguiente: El módulo de oscilación $\Omega(\delta)$ de $\varphi(t)$ debe ser pequeño comparado con la variación de $S_c(t)$ en el mismo intervalo.

En rigor, existe otra condición necesaria, la cual no se menciona explícitamente por haber sido incluida en el enunciado del problema de síntesis formulado en la sección 0.6. Tal condición consiste en admitir como solución de la respuesta a una función $\gamma^*(t)$, la cual es un símil de $\gamma(t)$. Se ve con facilidad que en estas condiciones la substitución de $\gamma(t)$ por $\gamma^*(t)$ es justificada. Se mostrará ahora que las medidas de ventanas en caso de impulsos, son iguales a las medidas de ventanas obtenidas en el caso de pulsos de apertura no nula.

Las fórmulas 2, (II-2.22) son soluciones para $t \geq t_l$. Aquí se considerarán las situaciones: 1o. Evaluación de las α 's para $t \geq t_l$, 2o. Efecto del kernel así encontrado en el tiempo $0 \leq t < t_l$. Esto último cubre el aspecto C de la sección 3.01 anterior. Se usará aquí una ilustración gráfica del proceso de evaluación que muestra claramente, en forma además sencilla, el mecanismo de formación de la función $\gamma^*(t)$, extraída de la componente $\varphi_1(t)$ continua de $\varphi(t)$.

3.31 Usaremos la integral de convolución nuevamente. Como tanto $\varphi_1(t)$ y la función $S_c(t)$ son por hipótesis, ahora continuas, entonces la integral de convolución existe en el sentido de Riemann. Comenzaremos primero por indicar el proceso gráfico de operación de la integral de convolución, proceso que es conocido.

Sea $\varphi_1(t)$ de clase C^0 . Supongamos de momento que la función $S_c(t)$ es una distribución conocida de ventanas con vida finita $= t_l$.

Consideremos los casos siguientes:

- 1° $t < 0$
- 2° $0 < t < t_l$
- 3° $t_l < t$

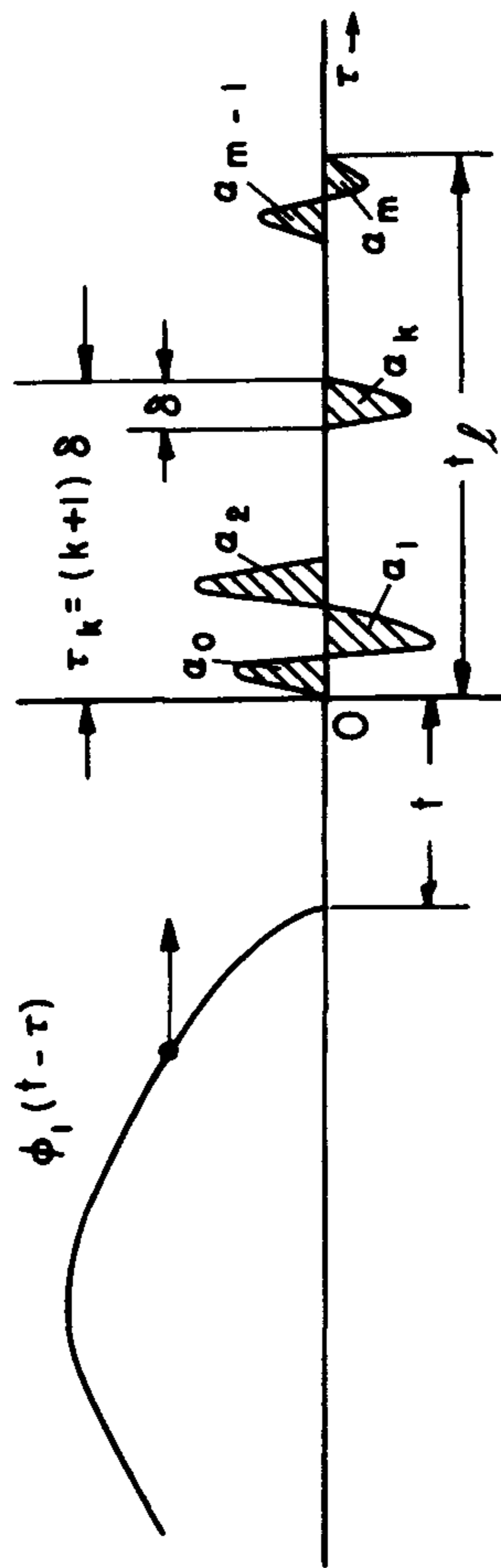


Fig. 1, (III-3.31). Gráfica del integrando de la expresión 1, (III-3.31) para $t < 0$.

para indicar el mecanismo de la formación de la integral:

$$\gamma(t) = \int_0^t \varphi_1(t-\tau) S_c(\tau) d\tau \quad 1, (\text{III}-3.31)$$

La figura 1, (III-3.31) muestra la situación de los elementos del integrando para $t < 0$. Claro es que $\gamma(t)$ es necesariamente nula en este intervalo. La hipótesis de oscilación lenta de $\varphi_1(t)$ en el intervalo δ , se expresa gráficamente por la curva abierta en dicha figura.

La figura 2, (III-3.31) muestra la situación para $t = 0$. El valor de $\gamma(t)$ es todavía nulo.

La figura 3, (III-3.31) muestra la situación de las funciones del integrando por el intervalo $0 < t < t_l$. Hay ya contribución a $\gamma(t)$, pero no todas las ventanas de $S_c(t)$ contribuyen en el valor de $\gamma(t)$.

La figura 4, (III-3.31) muestra la situación de las funciones del integrando para el intervalo $t_l < t$. Todas las ventanas de $S_c(t)$ contribuyen ahora en la formación de la integral. De aquí en adelante, todas las ventanas producen contribución. La contribución proviene solamente la parte de $\varphi(t-\tau)$, que queda sobre $S_c(\tau)$.

3.32 Evaluación de las medidas α 's para $t_l < t$.

La hipótesis de variación lenta de $\varphi_1(t)$, permite suponer que $\varphi_1(t)$ se mantiene constante en cada intervalo δ : Esto equivale a substituir $\varphi_1(t)$ por una función en escalera, como se indica en la figura 1, (III-3.32). La hipótesis de substitución de $\gamma(t)$ por $\gamma^*(t)$ permite esta aproximación siempre y cuando no se excedan las tolerancias respectivas del conjunto $[\epsilon_j]$ dadas como dato de síntesis. Es fácil ver que esto es siempre posible tomando δ suficientemente pequeño.

El valor de la integral 1, (III-3.31) se obtiene de inmediato usando la función escalonada que se apoya sobre $\varphi_1(t-\delta)$. Llamemos $\gamma^*(t)$ el valor de la integral de convolución obtenida con esta substitución. Se tiene:

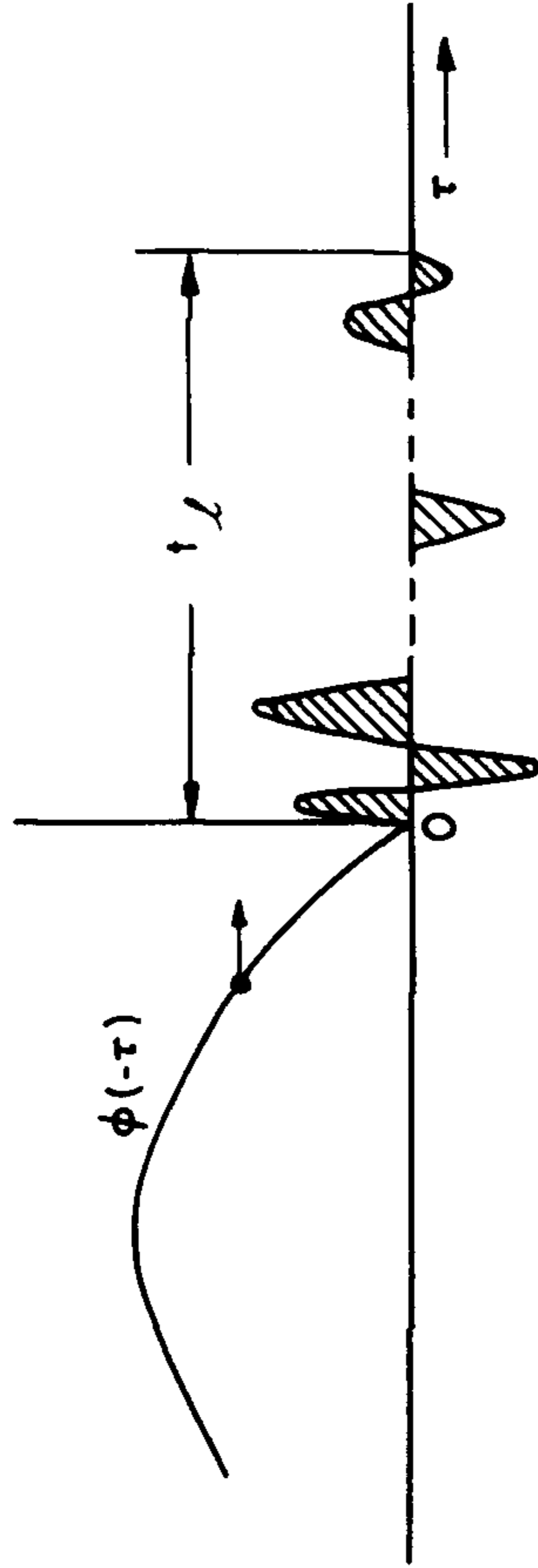


Fig. 2, (III-3.31). Gráfica del integrando de la expresión
 1(III-3.31) para $t = 0$.

$$\begin{aligned} \gamma^*(t) &= \sum_{k=0}^m \varphi_1(t - \delta_k) \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} S_c(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_1[t - (k+1)\delta] ; t_j < t \quad 1, \text{(III-3.32)} \end{aligned}$$

Se ve de inmediato que la solución aproximada 1, (III-3.32) que suministra $\gamma^*(t)$, es igual a la expresión que produce el kernel singular formado por una distribución de impulsos de apertura nula. Véase la expresión 2, (II-2.1).

Ahora bien, expandiendo la función $\varphi_1(t - (k+1)\delta)$, considerada ahora como de clase C^m , y formando la función $\gamma^*(t)$ asociada a 1, (III-3.32) se ve que esta función es idéntica a la función $\gamma^*(t)$ extraída como se hizo en la expresión 3, (II-2.11). Esto demuestra la equivalencia entre un kernel impulsivo y un kernel continuo en el sentido de la formulación del problema de síntesis dado en la sección 0.6.

Condensando estos resultados se concluye que la fórmula 2, (II-2.22) que determina la medida de las ventanas de $S_c(t)$ es igualmente aplicable al kernel continuo, con la condición de variación lenta de $\varphi_1(t)$ en el intervalo δ .

3.4 Respuesta del sistema determinado por las α 's en el intervalo $0 < t < t_j$

Esta respuesta es fácil calcularse en un comportamiento básico numérico, despreciando términos de estructura fina. La figura 3, (III-3.31) permite hacer inmediatamente esta evaluación sustituyendo $\varphi(t - \tau)$ por una función de escalera.

Se tiene :

$$\gamma^*(t) = \sum_{k=0}^{k=q} \alpha_k \varphi(t - (k+1)\delta) \quad 1, \text{(III-3.4)}$$

$0 < t < t_q$

Una expansión similar a la hecha en la sección 2.11 producirá ahora la expresión.

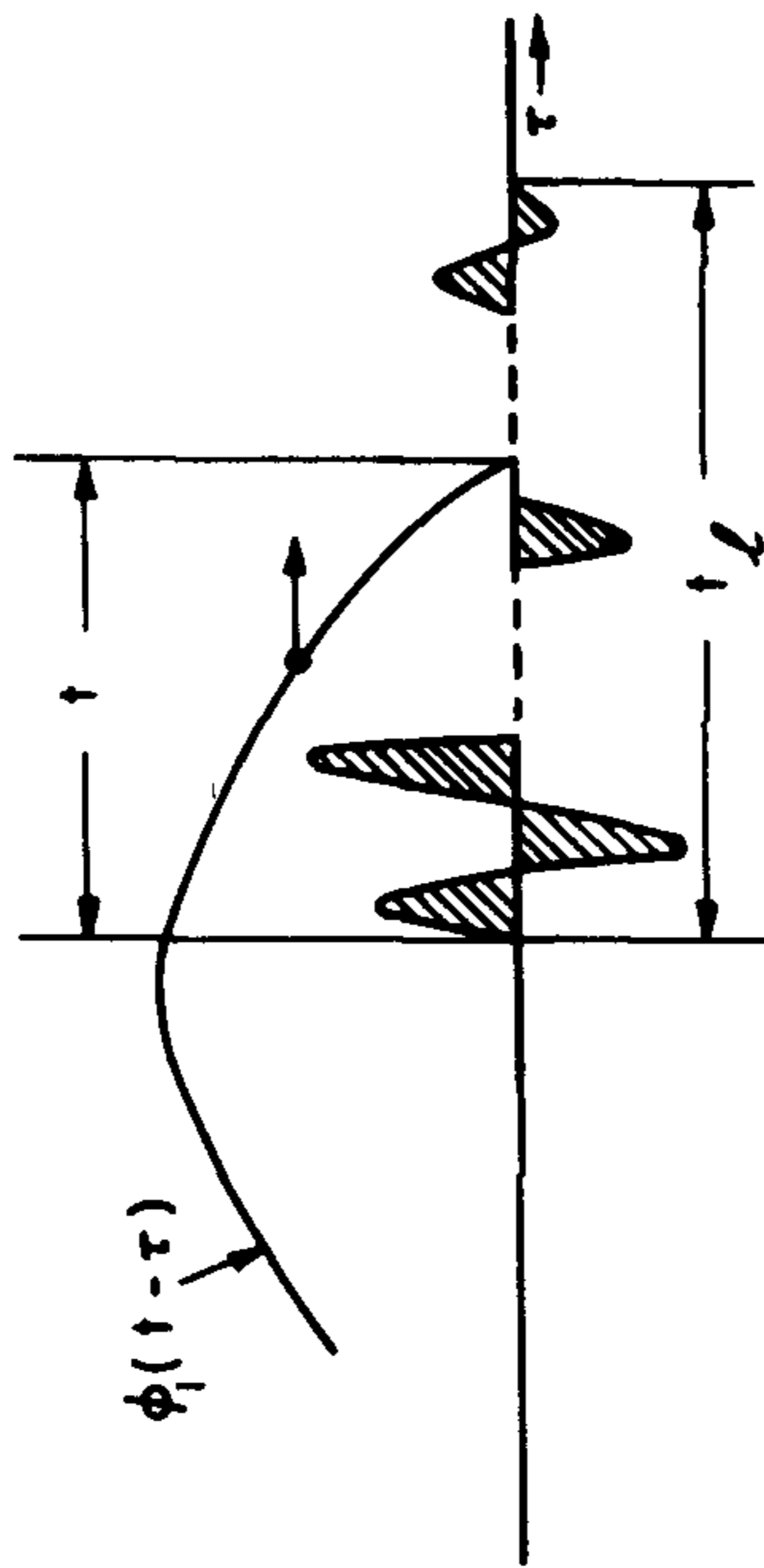


Fig. 3, (III-3.31). Gráfica del integrando de la expresión 1, (III-3.31) para $0 < t < t_l$.

$$\begin{aligned} \gamma^+(t) \approx & \varphi(t) \sum_{k=0}^q a_k \varphi^{(1)}(t) \sum_{k=0}^q \mu_k a_k + \frac{\varphi^{(2)}(t)}{2!} \sum_{k=0}^q \mu_k^2 a_k + \\ & + (-1)^m \frac{\varphi^{(m)}(t)}{m!} \sum_{k=0}^q \mu_k^m a_k + \dots \dots \dots \quad 2, \text{ (III-3.4)} \end{aligned}$$

para $0 < t \leq t_q \leq t_l$.

Es claro que esta solución no coincide con la 2, (II-2.11). Coincidirá para que $t_q > t_l$. Luego: en el intervalo $0 < t < t_l$, la función de sistema $S_c(t)$ determinada por la expresión 2, (II-2.22) no reproduce necesariamente a la función de respuesta $\gamma^*(t)$. Esto implica que el intervalo $0 < t < t_l$ pertenece en general, al conjunto de aperturas $[a_j]$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

3.5 Otros intervalos de no representación.

Se ha indicado que una vecindad de anchura t_l centrada en los puntos de salto, o de comportamiento impulsivo de $\varphi(t)$, así como el intervalo inicial $0 < t < t_l$, pertenecen al conjunto de aperturas $[a_j]$ de no representación.

Existen, además, otros intervalos de no representación. Entre ellos se encuentran los dos siguientes:

1o. Supongamos que $\varphi(t)$ es idénticamente nula en un conjunto de intervalos disconexos, separando entre sí distancias mayores que t_l . Entonces, el principio y fin de estos intervalos pertenecen al conjunto $[a_j]$.

2o. Supongamos que $\varphi(t)$ tenga intervalos del orden de magnitud δ donde $\varphi(t)$ muestra una variación rápida comparable a $S_c(t)$. Entonces estos intervalos pueden pertenecer al conjunto $[a_j]^{(1)}$.

Hasta ahora hemos hablado de variación "lenta" y rápida de $\varphi(t)$. Un criterio de medida que cuantifique estas variaciones será producida en un capítulo posterior.

(1) Las variaciones muy rápidas de $\varphi(t)$ pueden compararse a saltos, impulsos, etc., y de aquí esta afirmación.

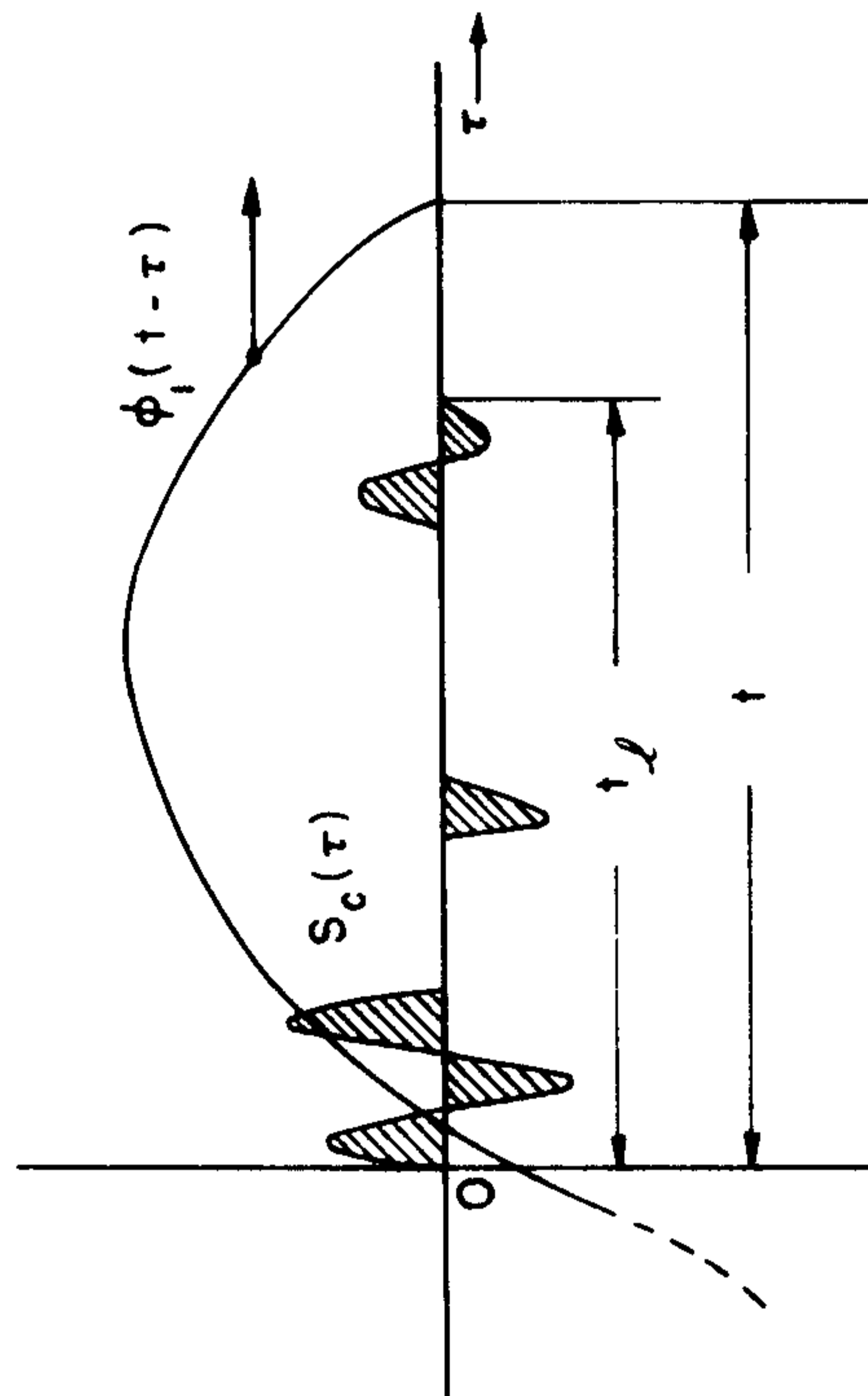


Fig. 4, (III-3.31). Gráfica del integrando de la expresión 1, (III 3.31) para $t_l < t < \infty$.

IV. TEOREMA DE CONSERVACION DE CLASE CON KERNELS DEGENERADOS Y VIDA FINITA.

4.0 Objetivo del Capítulo.- Una cuestión básica para resolver en el problema de síntesis formulado en la sección 0.6, consiste en indagar las posibles conexiones de clase que pueden existir entre la función de excitación y de respuesta de un sistema finito, lineal y pasivo de cuatro terminales. De hecho, el entendimiento básico del problema de síntesis propuesto radica fundamentalmente en la determinación de estas conexiones entre las clases de funciones de excitación y respuesta. Por ejemplo, en el problema de transmisión es necesario conservar la clase de funciones así como la función misma.

El estudio de esta determinación de clase es bien difícil, cuando menos para el autor. El empleo de distribuciones singulares del tipo impulsivo permite visualizar un poco dentro de esta situación. Por ejemplo, usando kernels de vida finita, la expresión 2, (II-2.1) que es válida para $t > t_1$ sugiere fuertemente que el sistema lineal finito y pasivo de cuatro terminales conserva la clase de funciones, puesto que la respuesta se expresa por una combinación lineal y finita de funciones de la clase de la excitación. Esta inferencia, sin embargo, no es del todo correcta en virtud de la existencia de un conjunto de aperturas $[a_i]$, $i = 0, 1, \dots$, donde el comportamiento de $\gamma(t)$ no está necesariamente representado por dicha expresión 2, (II-2.1).

En algunos casos particulares, principalmente en kernels del tipo degenerado y de vida finita, es posible establecer la conservación de clases entre las funciones de excitación y de respuesta cuando la primera es de carácter continuo. El objetivo de este capítulo es dar ciertos resultados que tienden a aclarar la situación de clase.

4.2 Kernel degenerado continuo. Vida finita.

Consideremos la integral convolución:

$$\gamma(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau) S_c(t) d\tau \quad 1, (IV-4.1)$$

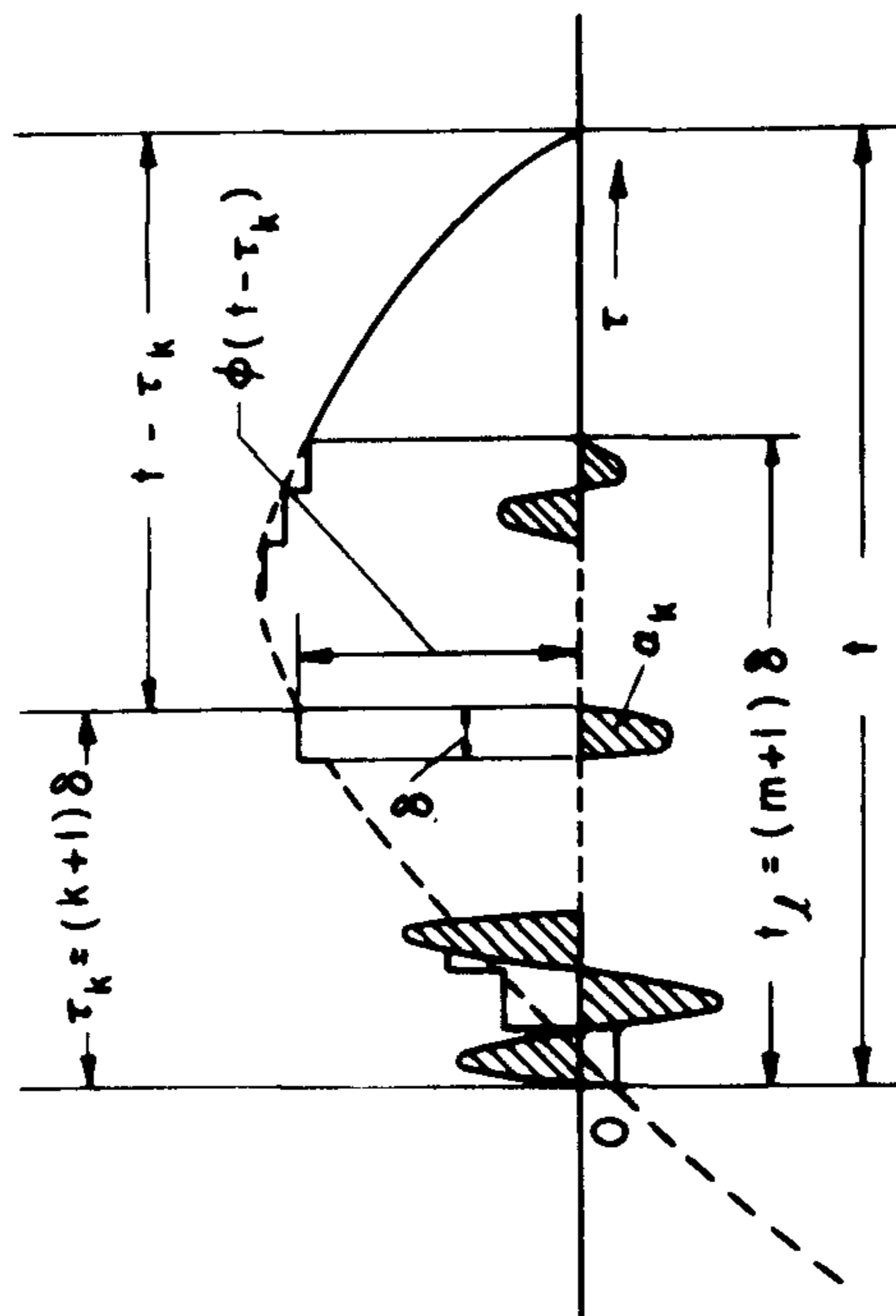


Fig. 1, (III-3.32). Substitución de $\phi_1(t)$ por una función en escalera.

y supondremos que tanto el kernel $\varphi(t-\tau)$, formado por la excitación, así como la función de sistema $S_c(\tau)$ son continuos en el intervalo $0 < t < \infty$. Además $S_c(\tau)$ se supondrá como una distribución finita de ventanas de duración t_f .

La hipótesis de kernel degenerado permite escribir:

$$\varphi(t-\tau) = \sum_1^n A_p \beta_p(\tau) \lambda_p(t) \quad n < \infty \quad 2, (IV-4.1)$$

La excitación inicial se obtiene para $\tau = 0$. Luego:

$$\varphi(t) = \sum_1^n A_p \beta_p(0) \lambda_p(t)$$

Como la excitación inicial no es cero, se sigue que no todos los productos $A_p \beta_p(0)$ son nulos.

Kernels degenerados aparecen en muchos casos prácticos e importantes de excitación. Por ejemplo, excitaciones formadas por funciones exponenciales:

$$\varphi(t) = \sum_{p=0}^n A_p e^{\phi_p t}$$

Donde A_p y ϕ_p son constantes reales o complejas. Substituyendo la expresión 2, (IV-4.1) en la integral 1, (IV-4.1) resulta:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(t) &= \sum_{p=0}^n A_p \lambda_p(t)' h_p(t) \\ \text{donde } h_p(t) &= \int_0^t S_c(\tau) \beta_p(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} 3, (IV-4.1)$$

Introduzcamos ahora la condición de vida finita de la distribución $S_c(t)$.

Es decir:

$$S_c(t) = \begin{cases} \equiv 0 & t < 0 \\ \neq 0 & 0 < t < t_l \\ \equiv 0 & t_l < t < \infty \end{cases}$$

Entonces:

$$h_p(t) = \begin{cases} \equiv 0 & t < 0 \\ \neq 0 \text{ (variable)} & 0 < t < t_l \\ \equiv h_p(t_l) = \text{const} & t_l < t < \infty. \end{cases}$$

Se concluye que:

$\gamma(t)$ es de la clase de $\varphi(t)$ para $0 < t_l < t$
 $\gamma(t)$ no es necesariamente de la clase $\varphi(t)$ para $0 < t < t_l$
 puesto que $h_p(t)$ es una función del tiempo.

4.2 Extensión al kernel degenerado. Vida finita.

El resultado anterior se puede extender al caso de una función de sistema formado por una distribución de ventanas con vida infinita cuando se verifiquen condiciones adicionales expresadas adelante. Consideremos también aquí que $n < \infty$. Las expresiones del caso anterior son válidas haciendo $t_l \rightarrow \infty$. Bajo las condiciones de que :

$$h_p(t_l) \rightarrow C_p < \infty \\ t_l \rightarrow \infty$$

entonces:

$$\gamma(t) = \sum_{p=1}^n A_p C_p \lambda_p(t)$$

y existe también conservación de clase. Véase también las soluciones de la forma 1, (III-3.32).

4.3 Soluciones del problema de síntesis propuesto cuando se estipula conservación de clase. Vida finita.

Se indicará aquí una solución formal del problema de síntesis propuesta en la sección 0.6, cuando se estipula la conservación de clase entre la función de excitación y respuesta, supuestas aquí continuas en un sistema lineal, pasivo y finito de cuatro terminales.

Escribamos como antes:

$$\varphi(t-\tau) = \sum_1^n A_p \beta_p(\tau) \lambda_p(t) \quad \text{Kernel}$$

$$\varphi(t) = \sum_1^n A_p \beta_p(0) \lambda_p(t) \quad \text{excitación.}$$

La respuesta puede ser dada por:

$$\gamma(t) = \sum_1^n \beta_p \lambda_p(t)$$

en virtud de la conservación de clase. Basta poner:

$$A_p h_p(t_l) = B_p$$

y para simplificar se escribirá:

$$h_p(t_l) = \text{const} = C_p < \infty$$

Luego, el problema se reduce a determinar la función $S_c(u)$ tal que:

$$C_p = \int_0^{t_l} S_c(\tau) \beta_p(\tau) d\tau$$

Basta pues formar la función $S_c(t)$ como una expansión ortogonal de funciones $\beta_p(t)$ en el intervalo $0-t_f$. Por un bien conocido teorema se tiene como solución:

$$S_c(t) = \sum_{p=1}^n C_p \beta_p(t)$$

Una discusión de este tipo de solución queda fuera de las limitaciones que se establecieron en este artículo. Por esto solamente se presenta aquí como una solución formal.

V. TRANSMISION SIN RETRASO.

5.0 Objetivo del capítulo.

Nos proponemos estudiar con algún detalle las soluciones de la función del sistema $S_c(t)$ ya obtenidas para la transmisión sin retraso de una señal $\varphi(t)$. Se construirán distribuciones de ventanas de apertura no nula, puesto que ellas representan las soluciones de sistemas lineales, pasivos y finitos.

Por solución de la transmisión no retrasada entenderemos una respuesta de la forma $\varphi^*(t)$ debido a una excitación $\varphi(t)$, cuando la función de sistema $S_c(t)$ se evalúa de la parte continua de $\varphi(t)$.

5.1 Fórmula general.

Por conveniencia repetiremos la fórmula que produce las medidas a 's de una distribución de ventanas dadas ya en la sección 2.3.

Ellas son:

$$a_i = (-1)^m \frac{\prod_{p=0}^m \mu_p}{\prod_{p=0}^m (\mu_i - \mu_p)} ; i = 0, 1, \dots, m \quad 1, (V-5.1)$$

En esta fórmula μ_j representa la distancia desde el origen hasta el fin de la j -ésima ventana. Aunque esta fórmula se obtuvo directamente en el caso de que las aperturas de cada ventana fueran iguales entre sí, es fácil ver que son igualmente válidas cuando las ventanas no son de igual anchura, interpretando μ_j como la distancia del origen al final de la j -ésima ventana. El ancho de esta ventana será $\mu_{j-1} - \mu_j = a_j$.

El caso de ventanas de apertura constante $= \delta$ es fácilmente sintetizable por el dispositivo indicado en la sección 1.41. Por ese motivo discutiremos aquí distribuciones con ventanas de apertura constante.

5.2 Distribuciones de ventanas de apertura constante $= \delta$.

En este caso:

$$\mu_k = (k + 1) \delta; \quad k = 0, 1, \dots, m \quad 1, (V-5.2)$$

substituyendo estos valores en la expresión 1, (IV-5.1), y recordando la notación simbólica de los coeficientes del binomio de Newton, se tiene:

$$\alpha_j = (-1)^j \frac{(m+1)!}{(j+1)! (m-j)!} = (-1)^j \binom{m+1}{j+1}; \quad 2, (V-5.2)$$

Consideremos aquí ventanas con apertura $\delta > 0$. Entonces $\alpha_j, j = 0, 1, \dots, m$ representan las áreas de los pulsos representativos de cada ventana. En virtud de tener los pulsos aperturas iguales, las áreas son entonces proporcionales a la altura de las ventanas, cuando se supone que estas tienen una forma semejante.

Como ha podido verse, la distribución de ventanas que forman la función del sistema, está definida por las áreas de las ventanas únicamente y no por su forma específica. Nosotros usaremos una forma convencional de ventana en su representación. Como se mostrará en este capítulo, el efecto mayor de las ventanas es debido a su área. La forma especial solamente tiene influencia en la estructura fina de la función de respuesta.

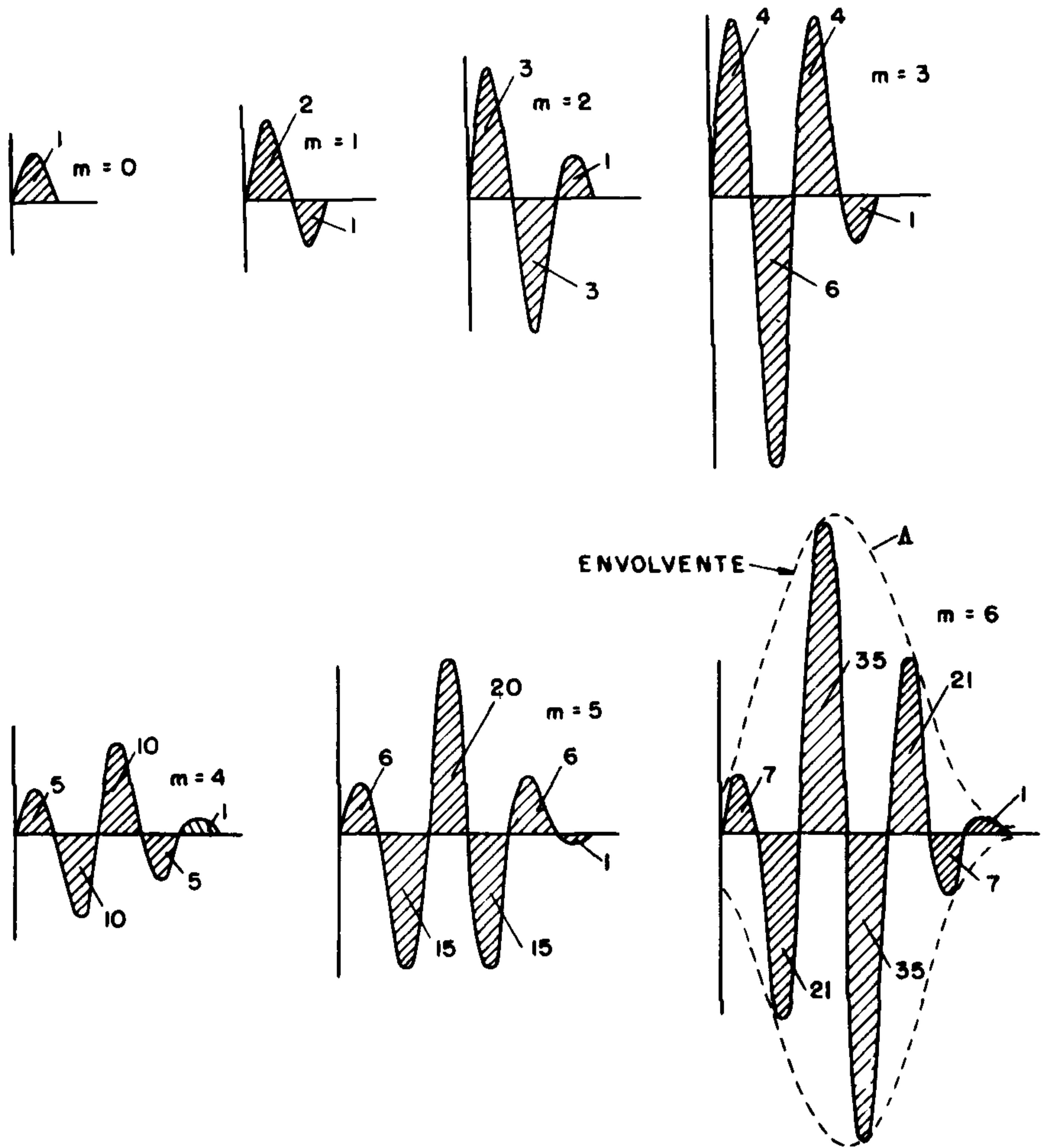


Fig. 1, (V-5.3). Distribuciones correspondientes al problema de transmisión sin retraso.

5.3 Distribuciones correspondientes a m variable. Envolvente.

Se calcularán aquí las distribuciones de ventanas para diferentes valores de m . Estas distribuciones están indicadas en la figura 1, (V-5.3). La anchura δ es de momento inmaterial. Las ventanas están representadas en forma esquemática y no necesariamente a escala.

Puede notarse que la distribución se forma según la tabla:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 2-1 \\
 3-3+1 \\
 4-6+4-1 \\
 5-10+10-5+1 \\
 6-15+20-15+6-1 \\
 7-21+35-35+21-7+1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1 \\ 2-1 \\ 3-3+1 \\ 4-6+4-1 \\ 5-10+10-5+1 \\ 6-15+20-15+6-1 \\ 7-21+35-35+21-7+1 \end{array}} \right\} 1, (V-5.3)$$

faltando siempre el término 1 inicial de los coeficientes del binomio. La supresión de este término es importante, puesto que si se agrega a la tabla anterior, se forma un sistema de aniquilación que rechaza la señal $\varphi(t)$ en lugar de transmitirla. Estos kernels se tratarán después.

Finalmente se dará la expresión de la función envolvente de las puntas de la distribución. Es fácil probar que esta envolvente está expresada por:

$$\Lambda(x) = \pm \frac{m-x+1}{\beta(m-x, x)} ; 0 < x < m \quad 2, (V-5.3)$$

siendo $\beta(m-x, x)$ la función de Beta, normalizada a la apertura $\delta = 1$.

5.4 Interpretación de estos resultados.

Nos proponemos interpretar estas distribuciones en términos del mecanismo de su operación para producir la transmisión de una función $\varphi(t)$.

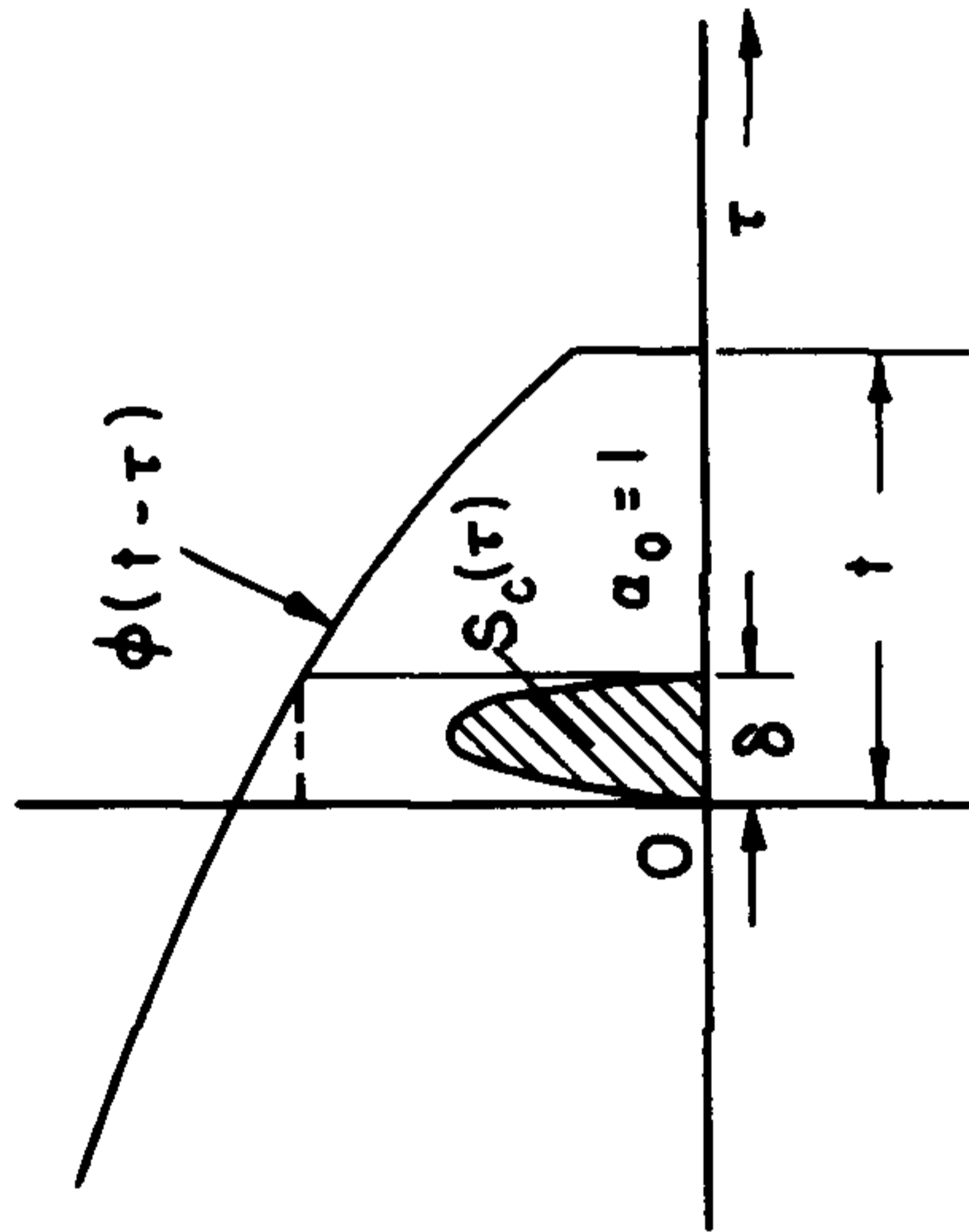


Fig. 1, (V-5.4). Operación ejecutada por $S_c(t)$ para $m = 0$.

El método gráfico es simple y claro.

Tomemos $m = 0$. La distribución consiste de una ventana de área igual a 1, apertura δ y colocada en el origen. La figura 1, (V-5.4) muestra las funciones del integrando de la integral de convolución.

Nótese en la figura que la condición de variación lenta de $\varphi(t)$ en el intervalo δ está satisfecha.

Es claro que:

$$\gamma(t) = \int_0^{\delta} \varphi(t-\tau) S_c(\tau) d\tau:$$

y

1, (V-5.4)

$$\gamma^*(t) = \varphi(t-\delta) \int_0^{\delta} S_c(\tau) d\alpha = \varphi(t-\delta)$$

cuando se toma el escalón indicado en la figura.

Se ve que:

- 1o. $\gamma^*(t)$ representa un retraso δ con relación a $\varphi(t)$.
- 2o. Haciendo la apertura cada vez más pequeña $\gamma^*(t) \rightarrow \varphi(t)$ y será el límite alcanzado en caso de que $S_c(t)$ sea un impulso en el origen.

La situación indicada cuando $m = 0$, representa la solución clásica del problema de transmisión bien conocida. La transmisión para $m > 0$ constituye la generalización introducida en este artículo.

5.41 La adopción del término "ventana" puede justificarse mediante el efecto del lóbulo de $S_c(t)$ en la figura 1, (V-5.4), puesto que equivale a tomar el valor de $\varphi(t-\delta)$ de la función de $\varphi(t)$ "visto" a través de la "ventana" del kernel. En la literatura americana la función $S_c(t)$ se conoce también con el nombre de "Scanning function" debido a su efecto de "barrido" sobre $\varphi(t)$.

5.42 Para interpretar el mecanismo de estas distribuciones cuando $m > 1$, es conveniente estudiar primero el efecto aislado de una ventana de esta distribución, diremos la k -ésima, que se encuentra desplazada $k\delta$ unidades del origen. La

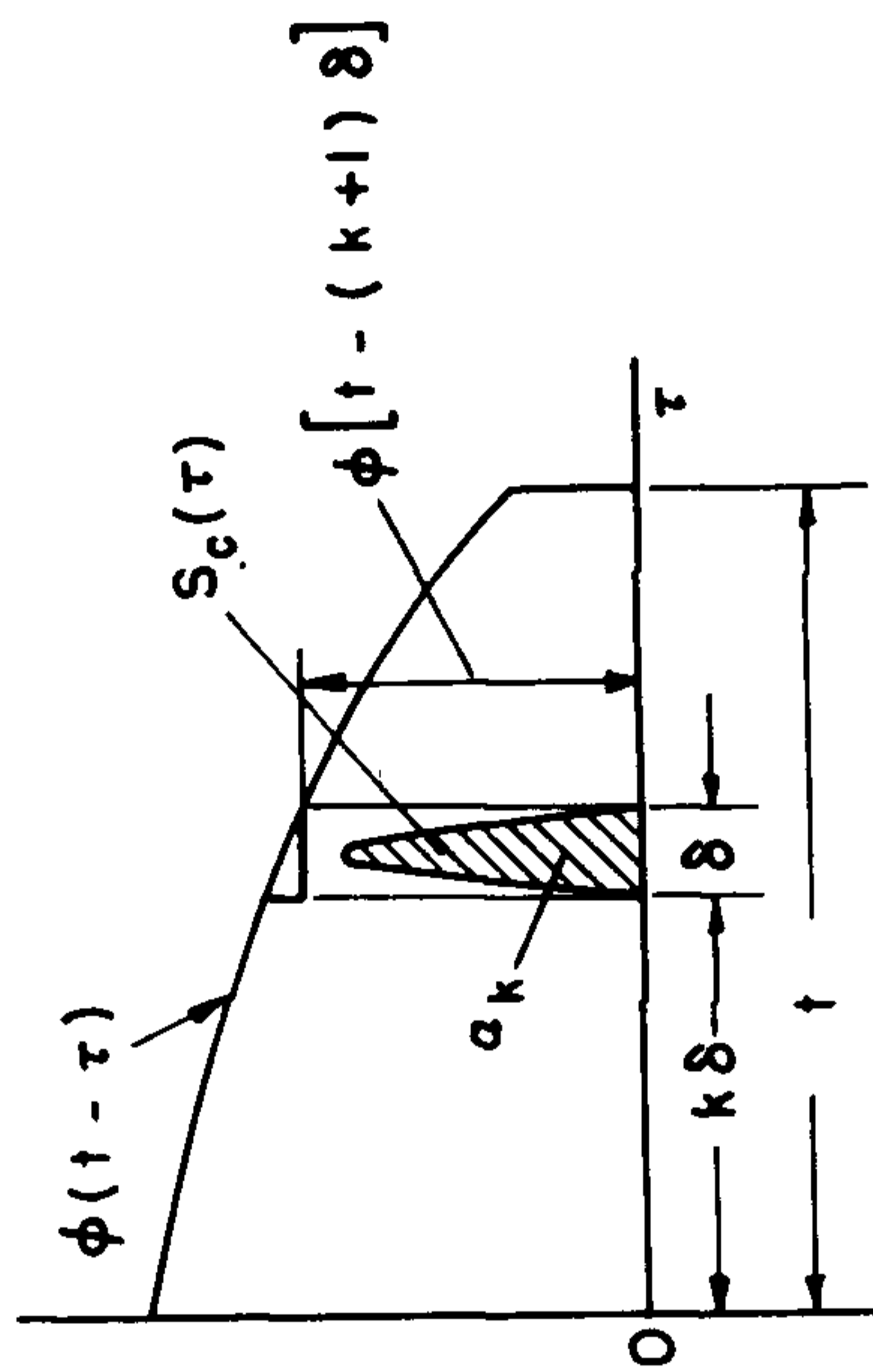


Fig. 1, (V-5.42). Operación ejecutada por el pulso colocado a $\tau = k\delta$.

figura 1, (V-5.42) muestra la situación del integrando para producir la contribución a $\gamma^*(t)$ de esta k -ésima ventana.

Siguiendo un razonamiento análogo, se encuentra que la contribución de la k -ésima ventana es:

$$\gamma_k^*(t) = \alpha_k \varphi [t - (k + 1) \delta] ; \quad 1, (V-5.42)$$

Se deduce de aquí, que cada ventana del kernel produce la función de excitación retrasada $(k + 1) \delta$ unidades, y ampliada α_k veces.

5.43 Podemos ya escribir de inmediato el efecto de la distribución completa de ventanas que corresponde al caso general $m > 0$.

$$\gamma^*(t) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi [t - (k + 1) \delta] \quad 1, (V-5.43)$$

Esto indica que la función $\gamma^*(t)$ de respuesta del sistema está constituida por la adición del muestreo ponderado, con pesos $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ de la función $\varphi(t)$.

Conviene interpretar la expresión 1, (V-5.43) desde otro punto de vista, el cual es muy sugerente en la teoría de la predicción lineal. Formemos la siguiente asociación:

A la transmisión pura, sin retardo asociemos la idea "presente".

A la transmisión retrasada se asocia la idea de "pasado".

A la transmisión adelantada se asocia la idea de "futuro".

En este sentido, la expresión 1, (V-5.43) que produce la transmisión pura, se le interpreta diciendo que tal expresión produce un "presente" que se forma mediante el muestreo ponderado del "pasado" y de un término del presente.

5.44 Para cerrar esta sección comparemos las distribuciones correspondientes a $m = 0$ y $m > 0$ desde el punto de vista del párrafo 5.43.

La idea expresada ahora se vuelve precisa si la distribución de ventanas se toma como una distribución de impulsos.

En el caso $m = 0$ la distribución contiene solamente un impulso de medida no cero en el origen. La función de respuesta $\gamma(t) = \varphi(t)$ se obtiene simplemente considerando la función $\varphi(t)$ solamente en el preciso instante t .

Cuando $m > 0$, la distribución contiene también un impulso de medida α_0 y otros desplazados del origen. El lóbulo o ventana correspondiente α_0 produce una contribución del presente de $\varphi(t)$ en el instante t . Por las razones anteriores se puede interpretar la transmisión pura como un "presente intrínseco" caso $m = 0$ y presente con "experiencia" $m > 0$. De acuerdo con esto, m es una medida de la "experiencia" en el sentido aquí usado.

Cuando la distribución de ventanas no está constituida por impulso, entonces la primera ventana en α_0 produce una respuesta retrasada δ unidades. Véase ecuación 1, (V-5.4). Es decir, $\varphi(t)$ en el tiempo t , se observa por el valor de la función en el intervalo $t - \delta, t$ y t . Esto se interpreta diciendo que la "percepción" no es instantánea. δ se le puede llamar tiempo mínimo de percepción.

5.5 Convergencia hacia $\varphi(t)$.

Consideremos ahora la convergencia de la función $\gamma^*(t)$ hacia $\varphi(t)$ en el caso particular de transmisión pura.

La discusión y resultados del capítulo III se transplantan sin dificultad al caso de transmisión pura por lo que no se hará aquí un estudio extenso. Lo importante aquí es más bien observar los modos de convergencias hacia $\varphi(t)$ de soluciones con distribución de ventanas para $m = 0$ y para $m > 0$. Una simple ilustración gráfica es suficiente para apreciar esta situación. Tomaremos por ejemplo $m = 0$ y $m = 3$. La extensión a otros valores de m es obvia. Tomaremos también como una función típica de excitación, la indicada en la figura 1, (V-5.5) que contiene una parte continua, un salto y un pulso dentro del plano de la figura.

Los resultados de este estudio quedan claramente expresados en esta figura. Esta figura es solamente un esquema ilustrativo y no un dibujo a escala.

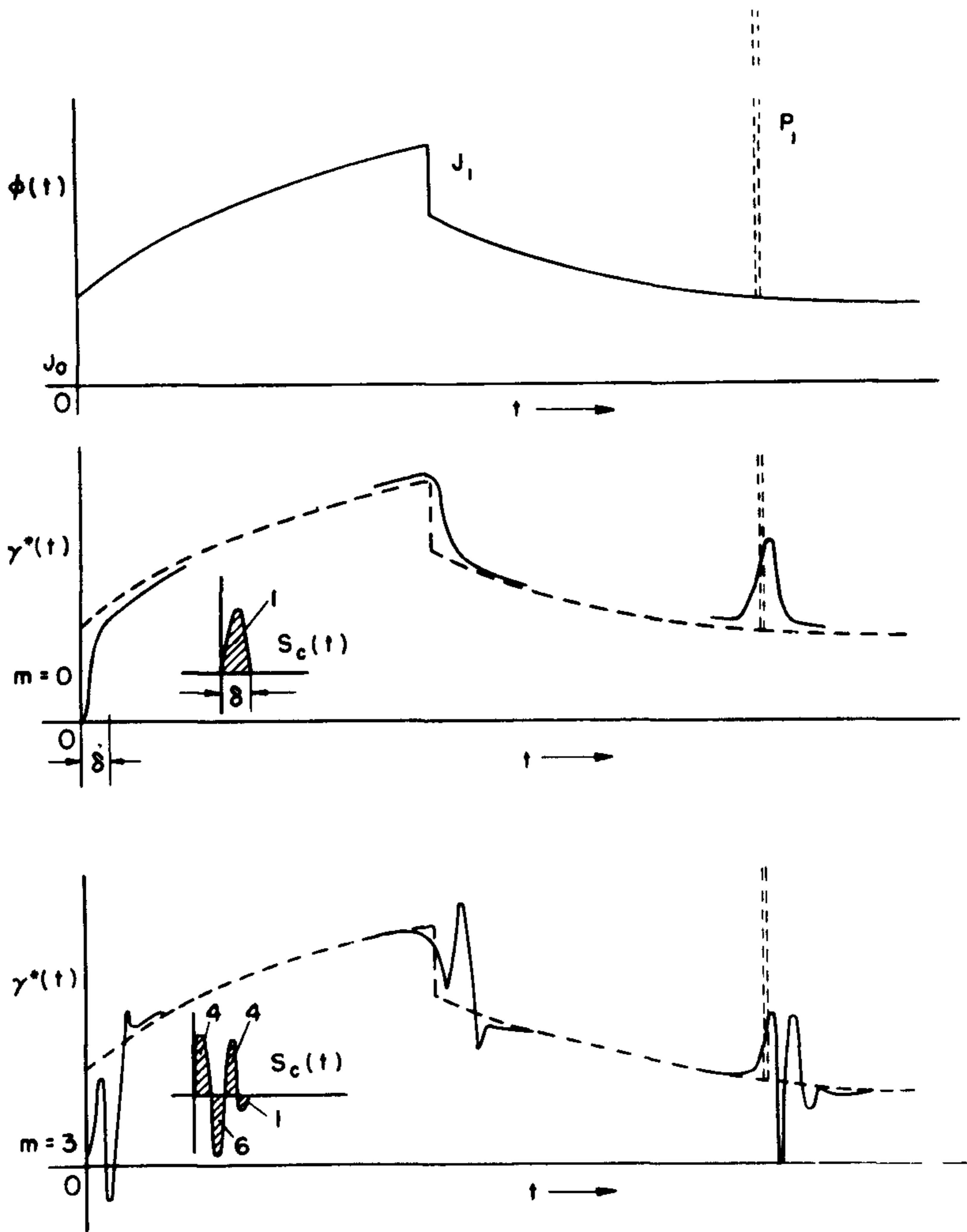


Fig. 1, (V-5.5). Ejemplos de convergencia al ocurrir saltos e in pulsos en el caso de transmisión pura; $m = 0$ y $m = 3$.

La vida de las funciones $\xi_c(t)$ usadas en la figura 1, (V-5.5) no son iguales. A igualdad de vida de las distribuciones, se producen transiciones que duran muy aproximadamente la misma duración cuando $\varphi(t)$ tiene como componente una función continua de oscilación lenta relativa a la percepción δ . Para $m > 0$ hay siempre oscilaciones en los intervalos que forman el conjunto de aperturas $[a_i]$.

Por limitaciones de espacio, no se ilustran las transiciones en el caso de que $\varphi(t)$ tenga dobletes, tripletes, etc., como componentes singulares. En caso de un doblete, se demuestra con facilidad que la gráfica del fenómeno transitorio es la primera derivada de la distribución $S_c(t)$ dividida por la anchura del doblete. En general la transición producida por un emipleto de anchura pequeña igual a Δl , está dada aproximadamente por la función:

$$\text{Respuesta} \approx \frac{\frac{d^n}{dt^n} S_c(t)}{(\Delta l)^n} \quad 1, (V-5.5)$$

Debido al pequeño valor de Δl y de la variación rápida de $S_c(t)$ estas respuestas representan oscilaciones de gran amplitud.

5.6 Evaluación del error cometido.

Consideremos la expresión del error dada por la fórmula 1, (II-2.8), capítulo II. Nos bastará calcular el valor de los términos bajo el signo Σ cuando la distribución de ventanas producen transmisión pura. Considerando la fórmula 2, (V-5.2) así como una propiedad conocida de los coeficientes del binomio de Newton se llega inmediatamente al resultado:

$$\sum_{p=0}^{p=m} (p+1)^{m+1} \alpha_p = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p (p+1)^{m+1} \binom{m+1}{p+1} = (-1)^m (m+1)! ; \quad 1, (V-5.6)$$

por lo tanto,

$$\xi_{(m),k} = \Omega_k^m (\delta) \delta^m \quad 2, (V-5.6)$$

que da el error cometido en función del orden m de la distribución de ventanas, la apertura δ de una ventana y el módulo de oscilación de la m -ésima derivada de la excitación en el k -ésimo intervalo de la continuidad aludido en la expresión 1, (II-2.8).

La fórmula 2, (V-5.6) indica que el error disminuye muy rápidamente cuando m aumenta y cuando δ disminuye en tamaño.

La transmisión intrínseca, $m = 0$ está asociada al error.

$$\xi_{(0),k} = \Omega_k^{(0)}(\delta)$$

Una aplicación de esta fórmula se tratará en la sección futura relativa al diseño del sistema lineal correspondiente.

Cerraremos este párrafo mostrando unas propiedades conocidas importantes de los binomios de Newton, propiedades que son consecuencia inmediata de los resultados de este capítulo. Debido a que la transmisión pura está caracterizada por los valores:

$$y_p = \begin{cases} \neq 1 & p = 0 \\ = 0 & p = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k (k+1)^g \binom{m+1}{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } g = 0 \\ 0 & \text{cuando } g = 1, 2, \dots, m \\ (-1)(m+1)! & g = m+1 \end{cases}$$

5.7 Transformación de Laplace de la función $S_c(t)$ en caso de transmisión pura.

Se calcularán las transformadas de Laplace en el caso de que las gráficas

de las ventanas sean curvas semejantes.

Consideremos una ventana de medida unidad y de forma dada colocada en el origen. Representemos esta función por $h(t)$. Llamemos $H(s)$ la transformada de Laplacé correspondiente.

Consideremos ahora una función $S_c(t)$ formada por una distribución de ventanas semejantes y de medidas $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ respectivamente.

Sea:

$$\mathcal{L} S_c(t) = \phi_c(s), \quad s = \text{variable compleja}$$

Entonces:

$$\phi_c(s) = H(s) \sum_{p=0}^m \alpha_p e^{-p \delta s} \quad ; \quad 1, (V-5.7)$$

Para el caso de transmisión pura considerado se tiene, usando la fórmula 2, (V-5.2):

$$\phi_c(s) = H(s) \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m+1}{p+1} e^{-p \delta s} \quad 2, (V-5.7)$$

Para sumar esta expresión, basta transformarla como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_c(s) &= -H(s) e^{\delta s} \sum_{p=0}^m (-1)^{p+1} \binom{m+1}{p+1} e^{-(p+1) \delta s} = \\ &= -H(s) e^{\delta s} \{ -1 + (1 - e^{-\delta s})^{m+1} \} = \\ &= H(s) e^{\delta s} \{ 1 - (1 - e^{-\delta s})^{m+1} \} = \\ &= H(s) e^{\delta s} \left\{ 1 - 2^{m+1} e^{-\frac{m+1}{2} \delta s} \operatorname{sen} h^{m+1} \frac{\delta s}{2} \right\} \end{aligned}$$

3, (V-5.7)

La expresión anterior toma un aspecto simple cuando la función $S_c(t)$

está formada por impulsos con una distribución indicada en la figura 1, (II-2.1) Cap. II.

En este caso:
$$H(s) = e^{-s \delta}$$

y

$$\phi_c(s) = 1 - 2^{-(m+1)} e^{-\frac{m+1}{2} \delta s} \operatorname{sen} h^{(m+1)} \frac{\delta s}{2} \quad 4, (V-5.7)$$

Esta última expresión es muy útil para ilustrar el mecanismo de la transmisión pura en el dominio de la frecuencia ¹.

5.8 Espectro de frecuencia en la transmisión pura.

Comenzaremos encontrando este espectro asociado con la expresión 4, (V-5.7)

Se tiene haciendo $s = i \omega$

$$\phi_c(\omega) = 1 - 2^{-(m+1)} \operatorname{sen}^{(m+1)} \frac{\delta \omega}{2} e^{-\frac{i}{2} (m+1) [\delta \omega - \pi]} \quad 1, (V-5.8)$$

Se ve de inmediato que el término constante igual a 1 es el responsable de la transmisión pura, sin ningún retraso. El término variable aparece por efecto de la substitución de $\gamma^*(t)$ por $\gamma(t)$.

Las componentes del espectro anterior son:

$$\begin{aligned} \phi_c(\omega) = & \left\{ 1 - 2^{m+1} \operatorname{sen}^{m+1} \frac{\delta \omega}{2} \cos \left[\left(\frac{m+1}{2} \right) (\delta \omega - \pi) \right] + \right. \\ & \left. + i 2^{m+1} \operatorname{sen}^{m+1} \frac{\delta \omega}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{(m+1)}{2} (\delta \omega - \pi) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$|\phi_c(\omega)| = \left\{ \left(1 + \left(2^{m+1} \operatorname{sen}^{m+1} \frac{\delta \omega}{2} \right)^2 - 2^{m+2} \operatorname{sen}^{m+1} \frac{\delta \omega}{2} \cos \left[\frac{m+1}{2} (\delta \omega - \pi) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

¹ Otra fórmula se dará en la sección 6.4 Cap. VI.

$$\operatorname{tag} \psi_c(\omega) = \frac{2^{m+1} \operatorname{sen}^{m+1} \frac{\delta\omega}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{(m+1)}{2} (\delta\omega - \pi) \right]}{1 - 2^{m+1} \operatorname{sen}^{m+1} \frac{\delta\omega}{2} \cos \left[\frac{(m+1)}{2} (\delta\omega - \pi) \right]}; \quad 2, (V-5.8)$$

donde $\psi_c(\omega)$ es el ángulo de fase respectivo.

5.9 Filtro de paso bajo sin retardo.

Las expresiones anteriores que suministran el espectro de frecuencia $\delta_c(s)$ son complicadas para discutir las fácilmente. Se puede, sin embargo, ver que para valores $\omega\delta$ relativamente pequeños, la función $\delta_c(\omega)$ es prácticamente constante y real, pasando señales cuyas frecuencias están contenidas en el rango $0 < \omega\delta < .1$, y casi sin dilación. La figura 1, (V-5.9) muestra la forma típica y fundamental, no a escala, de las funciones $|\delta_c(\omega)|$ y $\psi_c(\omega)$. Se nota inmediatamente que un sistema lineal pasivo que transmite sin dilación en el sentido de este capítulo se comporta fundamentalmente como un "filtro de banda baja ω_0 ", donde se verifica la transmisión sin cambio apreciable de fase.

Un filtro de esta naturaleza es muy fácil de sintetizar mediante el esquema básico antes indicado, figura 2, (I-1.41). Bastará ajustar los amplificadores y los inversores de manera de tener una distribución de ventanas cuya medida esté dada por fórmula 2, (V-5.2). La expresión que fija la banda ω_0 se verá adelante.

5.10 Filtro Complementario.

Formemos ahora una distribución de $m+2$ ventanas usando las $m+1$ medidas en signo contrario,

$$a_i = (-1)^i \binom{m+1}{i+1}$$

que dan las ventanas de transmisión pura, y aumentemos la ventana de medida $+1$

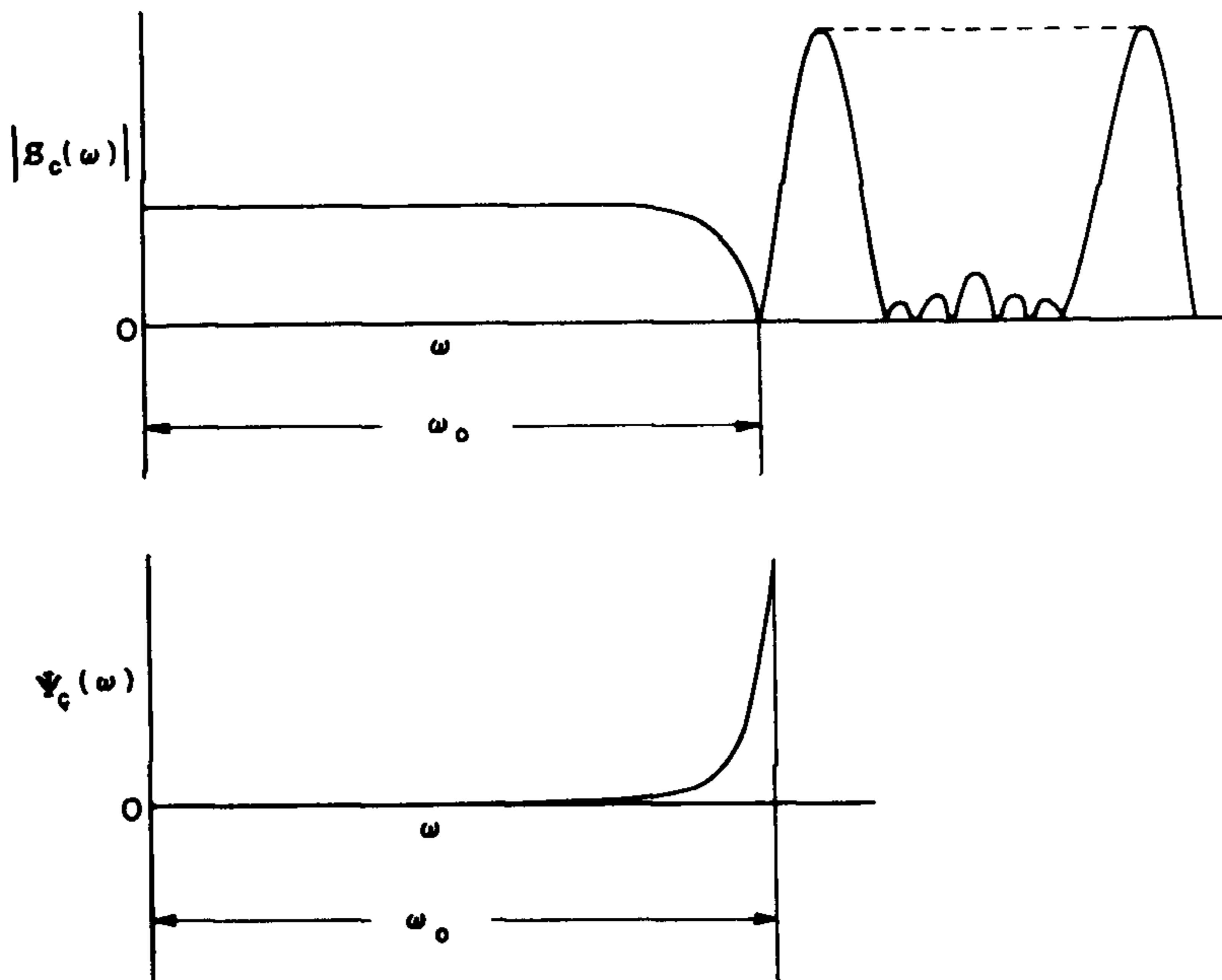


Fig. 1, (V-5.9). Aspecto típico de las funciones $S(\omega)$, amplitud, y $\psi_c(\omega)$, fase, correspondiente a un sistema lineal que transmite sin retardo en el sentido de este capítulo. Nótese el efecto parcial de filtro de banda baja.

como ventana inicial. Este esquema se representa por la tabla:

$$\begin{array}{r}
 +1 - 1 \\
 +1 - 2 + 1 \\
 +1 - 3 + 3 - 1 \\
 -1 - 4 + 6 - 4 + 1
 \end{array}
 \quad 1, (V-5.10)$$

Llamemos β_g , $g = 0, 1, \dots, m+1$ las medidas de la nueva distribución ahora definida.

Se tiene:

$$\sum_{g=0}^{m+1} \beta_g = +1 - \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m+1}{p+1} = 0 \quad 2, (V-5.10)$$

en virtud de una propiedad conocida de los coeficientes de binomio. Este resultado muestra de inmediato que un sistema caracterizado por esa distribución, no puede transmitir puesto que equivale a poner:

$$y_0 = \sum_{g=0}^{m+1} \beta_g = 0$$

En virtud de la propiedad:

$$y_p = \sum_{g=0}^{m+1} (g+1)^p \beta_g = 0 \quad p = 0, 1, \dots, m-1$$

$$y_m \neq \sum_{g=0}^{m+1} (g+1)^m \beta_g \neq 0$$

Se ve que este sistema tampoco transmite las $m-1$ primeras derivadas, y comenzará a transmitir la m -ésima en adelante.

Nos proponemos demostrar que un sistema lineal así caracterizado constituye el filtro complementario del formado por el sistema indicado en la sección 5.9.

Bastará construir el espectro de frecuencias.

La transformada de Laplace de la distribución 2, (V-5.10) es :

$$G_c(s) + H(s) e^{sp} (1 - e^{-s\delta})^{m+1}$$

$$F(s) = +H(s) e^{sp} 2^{m+1} \operatorname{senh}^{m+1} \frac{s\delta}{2} e^{-i \frac{m+1}{2} \delta s} ; \quad 3, (V-5.10)$$

donde

$$F(s) = \int \sum_{g=0}^{m+1} \beta_p$$

En el caso de una distribución singular como lo indicado en la figura 1, (II-2.1), se tiene:

$$H(s) e^{sp} = 1$$

luego,

$$F(s) = 2^{m+1} \operatorname{senh}^{m+1} \left(\frac{s\delta}{2} \right) e^{-i \frac{m+1}{2} \delta s} ; \quad 4, (V-5.10)$$

Sumando las ecuaciones 4, (V-5.10) y 4, (V-5.7) se obtiene:

$$S'_c(s) + F_1(s) = 1 \quad 5, (V-5.10)$$

lo que demuestra que los filtros asociados en las distribuciones de ventanas dados por 2, (V-5.10) y 2, (V-5.2) son complementarios. El filtro complementario rechaza en la banda ω_0 que es transmitida por el filtro original. Desde el punto de vista del dominio de la frecuencia, el filtro complementario indicado es un filtro de "paso de banda alta".

5.11 Ejemplo ilustrativo a la transmisión de una onda periódica.

El ejemplo propuesto tiende a ilustrar con sencillez los distintos aspectos del problema de transmisión sin retardo, y aclara muchos de los conceptos aquí establecidos. Desde el punto de vista práctico, el ejemplo aquí presentado tiene relativa importancia.

Supongamos que se trata de transmitir sin retraso una onda periódica, y se desea una buena transmisión de sus armónicas hasta el de orden n . El error de la transmisión debe ser menor que la cantidad fija ϵ dada de antemano. Por sencillez consideremos que la onda por transmitir es continua.

Sea:

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \text{ sen } [\nu \omega_0 t + \phi_{\nu}] \quad 1, (V-5.11)$$

Consideremos la transmisión de la ν -ésima armonía $\varphi_{\nu}(t) = A_{\nu} \text{ sen } [\nu \omega_0 t + \phi_{\nu}]$

Consideremos la ν -ésima derivada de esta armónica. Su módulo de oscilación máximo es evidentemente:

$$\Omega^{(m)}(t) = 2A_{\nu} (\nu \omega_0)^m \quad 3, (V-5.11)$$

Entonces debemos elegir los números m y δ , tal que se verifique la condición:

$$2A_{\nu} (\nu \omega_0)^m \delta^m < \epsilon \quad 4, (V-5.11)$$

El límite superior será pues:

$$\left. \begin{aligned} (\nu \omega_0 \delta)^m &= \frac{\epsilon}{2A_{\nu}} \\ (\delta f_{\nu})^m &= \frac{\epsilon}{2^{m+1} \pi A_{\nu}} \end{aligned} \right\} \quad 5, (V-5.11)$$

siendo f_ν la frecuencia máxima por transmitirse. La tolerancia ϵ se expresa naturalmente como una fracción de la amplitud de la onda transmitida. Es decir:

$$\epsilon = k A_\nu \quad \text{luego,}$$

$$(\delta f_\nu)^m = \frac{k}{2^{m+1} \pi} \quad 6, (V-5.11)$$

Sea T_ν el período $\frac{1}{f_\nu}$ de la ν -ésima armónica.

Para asegurar la banda de transmisión, es fácil ver que:

$$T_\nu \geq 4 \delta \quad 7, (V-5.11)$$

El límite inferior da:

$$1/4 = \delta f_\nu \quad 8, (V-5.11)$$

$$\delta = \frac{1}{4f_\nu}$$

Luego:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{k}{2\pi}$$

$$\therefore m = -\frac{\log \frac{k}{2\pi}}{\log 2} \quad 9, (V-5.11)$$

Como un ejemplo numérico, supongamos $k = .01$ y $f_\nu = 10^4$ ciclos por segundo.

Entonces:

$$\delta = \frac{1}{4000} \text{ seg}$$

$$m \approx 9$$

Las fórmulas:

$$8, (V-5.11)$$

$$9, (V-5.11)$$

y

$$2, (V-5.2)$$

determinan aquí completamente la distribución de ventanas capaz de hacer la transmisión de la onda considerada. El circuito lineal correspondiente se obtiene ajustando los amplificadores e inversivos de la figura 2, (I-1.41).

VI TRANSMISION RETRASADA.

6.0 Objetivo del capítulo.

Nos proponemos ahora dar condensadamente algunos resultados asociados a la transmisión retardada de una señal $\varphi(t)$. Esta solución está representada por la expresión:

$$\gamma(t) = \varphi(t - T_0)$$

siendo T_0 el tiempo de retardo.

Las medidas de las ventanas que forman la distribución de ventanas están dadas por la expresión 4, (II-2.5), la que se repite por comodidad:

$$a_i = \frac{\prod_{p=0}^m (T_0 - \mu_p)}{\prod_{p=0}^m (\mu_i - \mu_p)} \quad 1, (VI-6.0)$$

Por comodidad en el uso de la fórmula anterior, se medirán los retardos tomando como unidad de tiempo la apertura δ de una ventana. Pondremos entonces:

$$T_0 = \tau_0 \delta \quad 2, (VI-6.0)$$

Cuando la distribución de ventanas tiene una apertura constante, se tiene:

$$\mu_p = (p + 1) \delta; \quad p = 0, 1, \dots, m$$

Luego,

$$\alpha_i = \frac{\prod_{p=0}^m (\tau_o - p - 1)}{\prod_{p=0}^m (j - p)} \quad 3, (VI-6.0)$$

6.1 Retardo intrínseco.

En la transmisión de señales con retardo, consideramos dos casos:

- a. Transmisión intrínseca.
- b. Transmisión ponderada.

Nos referiremos en esta sección a la transmisión intrínseca. Para simplificar la discusión, reproduciremos nuevamente el polinomio $G_{(j)}(\mu)$ definido en la ecuación 1, (II-2.22) del capítulo segundo, y recordaremos su propiedad básica:

$$G_{(j)}(\mu_p) = \begin{cases} = 0 & p = 0, 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m \\ \neq 0 & p = j \end{cases}$$

La expresión 1, (VI-6.0) se puede escribir inmediatamente en términos de este polinomio como sigue:

$$\alpha_i = \frac{G_{(j)}(\tau_o)}{G_{(j)}(\mu_j)} \quad 2, (VI-6.1)$$

Expuesto esto, podemos definir el retardo intrínseco como aquel en donde τ_o es igual a uno de los valores μ . Digamos:

$$\tau_o = \mu_j \quad 3, (VI-6.1)$$

Introduciendo esta condición en 2, (VI-6.1), se tiene:

$$\alpha_k = \begin{cases} = 0 & k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m \\ = 1 & k = j \end{cases}$$

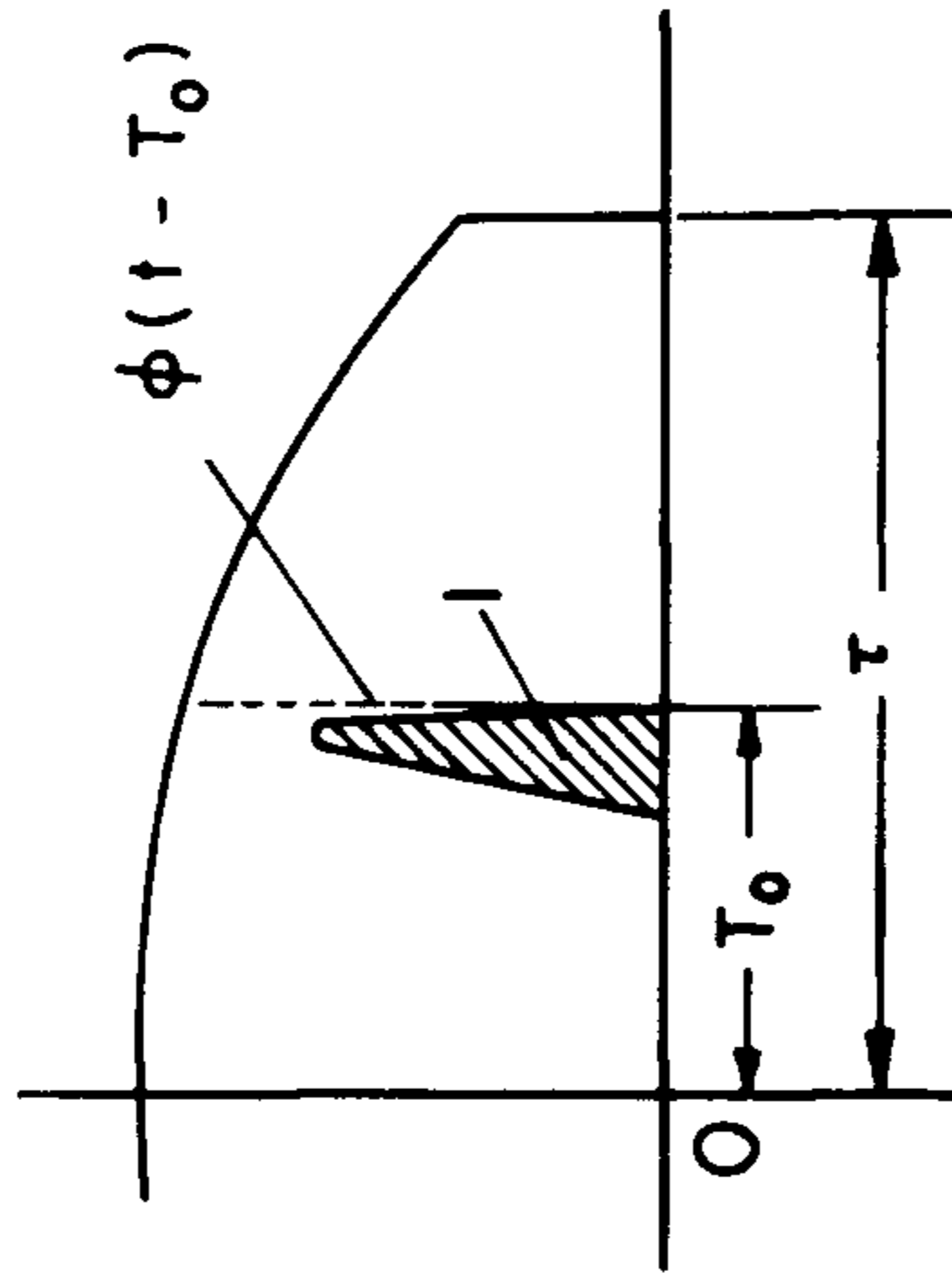


Fig. 1, (VI-6.1). Situación clásica en la transmisión intrínseca retardada.

lo que indica que la distribución de ventanas contiene solamente la j -ésima ventana independiente del número m . La figura 1, (VI-6.1) muestra gráficamente la situación creada en la interpretación de la integral de convolución. Se ve que la contribución a la respuesta proviene de una sola ventana operando al tiempo $t = T_0 = \mu_j$. Esto justifica el uso de la palabra "intrínseco".

El sistema lineal se comporta como un sistema simple de retardo formándose la señal de salida precisamente del valor de la finita al tiempo $t - T_0$.

Conviene hacer aquí una interpretación de este resultado en conexión con las ideas de presente, pasado y predicción ya antes expuestas. Comparando a un mismo tiempo la excitación $\varphi(t)$ y la respuesta $\varphi(t - T_0)$, equivale a pensar que la excitación del sistema por la excitación al tiempo t , excita el "recuerdo" del sistema sobre un pasado $\varphi(t - T_0)$ verificado T_0 unidades de tiempo antes. Este recuerdo se forma por el comportamiento de la función de excitación en el preciso instante $t - T_0$, cuando la transmisión es intrínseca. Tal "recuerdo" se denomina también "intrínseco".

6.2 Transmisión Ponderada.

Cuando $T_0 \neq \mu_j$ $j = 0, 1, \dots, m$, existen entonces las $m + 1$ medidas $\alpha_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. La respuesta es:

$$\gamma(t) = \varphi(t - T_0) = \sum_{p=0}^m \alpha_p \varphi(t - \mu_p); \quad 1, (VI-6.2)$$

la cual se forma por el muestreo ponderado de la función $\varphi(t)$ no solamente al tiempo $\varphi(t - T_0)$ sino a los tiempos $\varphi(t - \mu_p)$. Comparando las funciones $\varphi(t)$ y $\varphi(t - T_0)$, se ve que ahora el sistema produce un "recuerdo ponderado".

6.2 Valores de las medidas para $m = 1, 2, 3, 4$.

El uso de la fórmula 3, (VI-6.0) produce los resultados:

	m = 0	m = 1	m = 2
a_0		$-(\tau_0 - 2)$	$+\frac{\tau_0^2 - 5\tau_0 + 6}{2}$
a_1		$\tau_0 - 1$	$+(\tau_0^2 - 4\tau_0 + 3)$
a_2			$+\frac{\tau_0^2 - 3\tau_0 + 2}{2}$
	m = 3		m = 4
a_0	$-\frac{\tau_0^3 - 9\tau_0^2 + 26\tau_0 - 24}{6}$		$+\frac{\tau_0^4 - 14\tau_0^3 + 71\tau_0^2 - 154\tau_0 + 120}{24}$
a_1	$+\frac{\tau_0^3 - 8\tau_0^2 + 19\tau_0 - 12}{2}$		$-\frac{\tau_0^4 - 13\tau_0^3 + 59\tau_0^2 - 107\tau_0 + 60}{6}$
a_2	$-\frac{\tau_0^3 - 7\tau_0^2 + 14\tau_0 - 8}{2}$		$+\frac{\tau_0^4 - 12\tau_0^3 + 49\tau_0^2 - 78\tau_0 + 40}{4}$
a_3	$+\frac{\tau_0^3 - 6\tau_0^2 + 11\tau_0 - 6}{6}$		$-\frac{\tau_0^4 - 11\tau_0^3 + 41\tau_0^2 - 61\tau_0 + 30}{6}$
a_4			$+\frac{\tau_0^4 - 10\tau_0^3 + 35\tau_0^2 - 50\tau_0 + 24}{24}$

Como ejemplo numérico se dan las distribuciones correspondientes a los casos $\tau_0 = 10$, $\tau_0 = 20$, $m = 3$. Ver la figura 1, (VI-6.2).

El dibujo es una representación esquemática, no a escala. Nótese el crecimiento tan fuerte de las medidas al pasar de $\tau_0 = 1$, $\tau_0 = 10$, $\tau_0 = 20$.

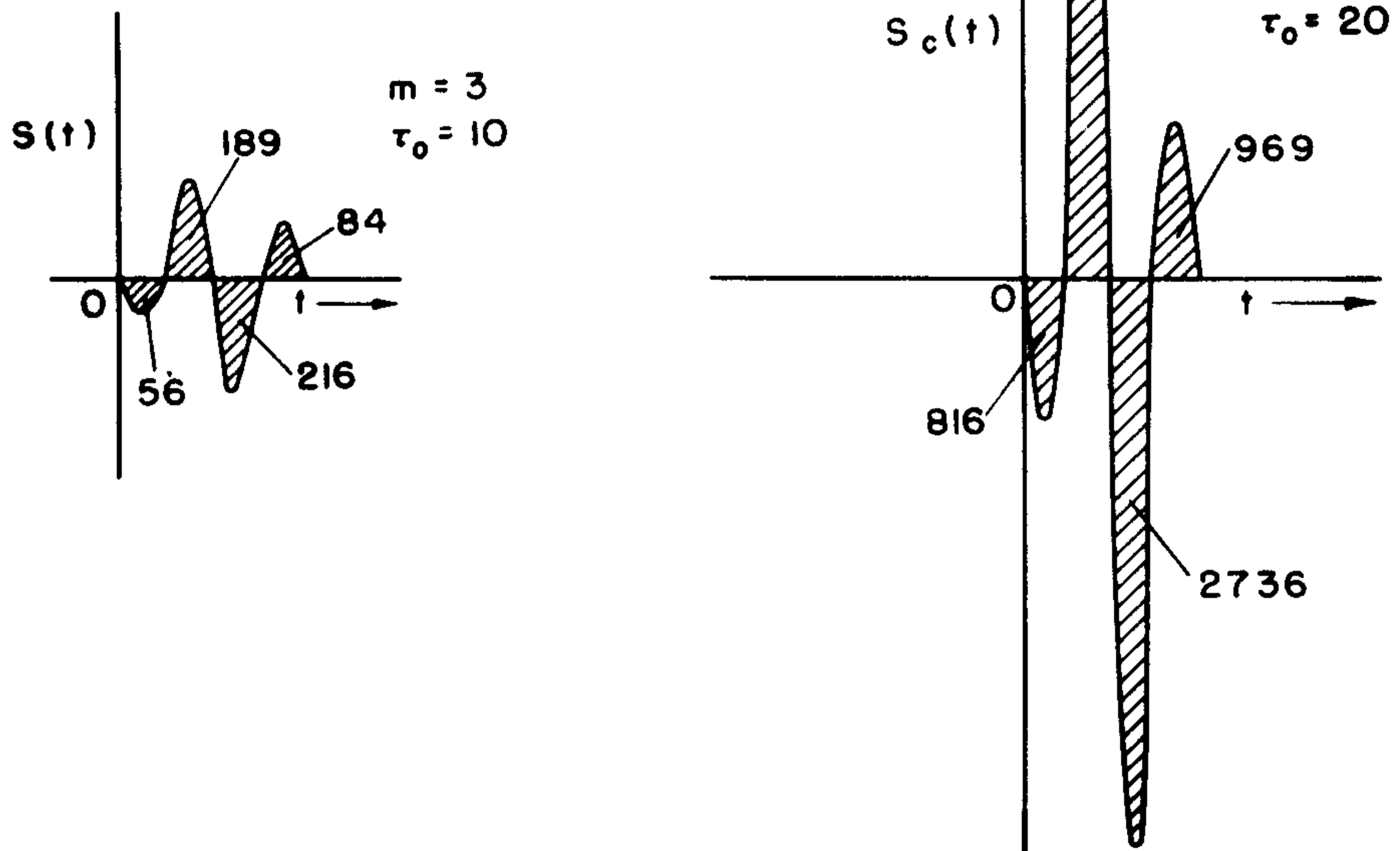


Fig. 1, (VI-6.2). Distribuciones correspondientes a la transmisión retrasada; $m = 3$, $\tau_0 = 10$, $\tau_0 = 20$.

En el caso de transmisión atrasada las medidas α 's tienen una propiedad importante que se sigue de la expresión 3, (V-2.4). Esta es:

$$\sum_{p=0}^m (p+1)^k \alpha_p = \tau_o^k \quad k = 0, 1, \dots, m \quad 1, (VI-6.2)$$

6.3 Valuación del error cometido.

Comenzaremos por indicar que el error cometido en la representación de $\gamma(t)$ mediante $\gamma^*(t)$, tiende hacia cero cuando $m \rightarrow \infty$ siempre que las derivadas sucesivas de $\varphi(t)$ son acotadas.

La fórmula 5, (II-2.7), capítulo II, que da el valor del error cometido, es en rigor, el valor del residuo de la serie de Taylor después del m -ésimo término. La fórmula es:

$$\begin{aligned} \xi_{(m)} &= \varphi^{m+1}(t + \kappa\lambda) \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{p=0}^m (p+1)^{m+1} \alpha_p = \\ &= \varphi^{m+1}(t + \kappa\lambda) \frac{\delta^{m+1} \tau_o^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned}$$

Consideremos ahora el k -ésimo intervalo de continuidad de la función $\varphi(t)$. Si sus derivados son acotados para t en dicho intervalo, podemos substituir en la serie:

$$\sum_{m+1}^{\infty} \varphi^{(k)}(t) \frac{\delta^k \tau_o^k}{k!}$$

por $\varphi^{(k)}(t)$ para $k = m+1$, etc., su mayor valor tomado ahí. Este será designado por A_k .

Entonces:

$$\xi_{(m),k} \approx A_k \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\delta^k \tau_o^k}{k!}$$

Correspondiendo la serie al residuo de la función $e^{\delta \tau_0}$ cuyas propiedades son conocidas. En la práctica, gran número de funciones de excitación gozan de esta propiedad.

Para el uso de la fórmula del error, conviene ponerla en función del módulo de oscilación de la m derivada de $\varphi(t)$:

$$\xi_{(m)} \approx \Omega^{(m)}(\delta) \frac{\delta^m \tau_0^{m+1}}{(m+1)!}$$

Usando la fórmula conocida:

$$|e^x - p_m(x)| \leq \frac{|x|^{2m} e^{|x|}}{2^m}$$

donde $p_m(x) = \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!}$. Podemos dar una valuación de la tolerancia como en el k -ésimo intervalo de continuidad como:

$$\epsilon_{(k)} = \frac{|T_0|^{2m} e^{|T_0|}}{2^m} \Omega^{(m)}(\delta), \quad 1, (VI-6.3)$$

que es una de las fórmulas que se emplea para calcular el valor de m , cuando se conoce $\epsilon_{(k)}$, T_0 y el módulo de oscilación de la $m+1$ derivada. Como ejemplo usemos la onda senoidal:

$$\varphi(t) = A \operatorname{sen} \omega t$$

El módulo de oscilación de la m derivada es del orden:

$$2 A \omega^m$$

Sea, como en el ejemplo de la sección:

$$\epsilon = K A$$

∴ K es pequeño:

$$K = 2\omega^m \frac{|T_o|^2 e^{|T_o|}}{2m}$$

de la cual se determina el valor de m. La determinación de δ se puede sacar de:

$$\delta f = \frac{1}{4}; \quad \omega = 2\pi f,$$

como antes.

6.4 Función transferente asociada al caso de transmisión retrasada.

Tomando en cuenta la expresión 1, (V-5.7), que se repite aquí por conveniencia, tenemos en general:

$$\mathcal{L}(S_c(t)) = H(s) e^{s\delta} \sum_{p=0}^m \alpha_p e^{-p\delta s}, \quad 1, (VI-6.4)$$

y para la transmisión retrasada se tiene:

$$\mathcal{L}(S_c(t)) = H(s) e^{s\delta} \sum_{p=0}^m \frac{\prod_{j=0}^m (\tau_o - p - j)}{(j-p)} e^{-p\delta s}; \quad 2, (VI-6.4)$$

Esta última fórmula es difícil de discutir e interpretar, y en uso directo es prácticamente inútil. Para aclarar un poco la situación, se procede como sigue: Tomemos la fórmula general 1, (VI-6.4) y escribamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[S_c(t)] &= H(s) e^{s\delta} \sum_{p=0}^m \alpha_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (p+1)^k \delta^k s^k = \\ &= H(s) e^{s\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \delta^k s^k \sum_{p=0}^m \alpha_p (p+1)^k \quad 3, (VI-6.4) \end{aligned}$$

Consideremos la transmisión atrasada que se caracteriza por la relación 3, (II-2.4) Cap. II, tendremos:

$$\mathcal{L} [S_c(t)] = H(s) e^{\delta s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \delta^k s^k \tau_0^k = \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 4, (VI-6.4)$$

$$= H(s) e^{\delta s} e^{-s\delta\tau_0}$$

Es decir, la función transferente toma la forma esperada. Por ejemplo, para distribución $S_c(t)$ singular se tiene $H(s) e^{\delta s} = 1$, véase sección 5.7 cap. IV. Así se tendría el caso ideal:

$$\mathcal{L} [S_c(t)] = e^{-sT_0} \quad 5, (VI-6.4)$$

Cuando se substituye la función $\gamma(t)$ por $\gamma^*(t)$ equivale a usar solamente los m primeros términos de la serie de Taylor de la expansión de $\varphi [t - (k+1)\delta]$ La relación:

$$\sum_{p=0}^m (p+1)^k a_p = \tau_0^k$$

se sostiene únicamente para los valores $k = 0, 1, \dots, m$ pero no para el $m+1$ en adelante. De consiguiente, la expresión 4, (VI-6.4) no se sigue exactamente de 3, (VI-6.4); no representan la función transferente formada con m ventanas; excepto cuando $m \rightarrow \infty$. Para hacer una apreciación de la función transferente asociada a m ventanas, escribiremos:

$$\sum_{p=0}^m (p+1)^k a_p = \tau_0^k (1 - \beta_k); \quad k = m+1, \dots, \quad 6, (VI-6.4)$$

quedando β_k definida por esta ecuación. Substituyendo esta expresión en 3, (VI-6.4), se obtiene finalmente:

$$\mathcal{L} [S_c(t)] = H(s) e^{\delta s} \left[e^{-s T_0} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (s \delta \tau_0)^k \beta_k \right] \quad 7, (VI-6.4)$$

que es la fórmula buscada. La fórmula anterior da inmediatamente el filtro complementario.

La función transferente del filtro complementario es:

$$F(s) = H(s) e^{\delta s} \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (s \delta \tau_0)^k \beta_k \right\} \quad 8, (VI-6.4)$$

Para una distribución singular:

$$F(s) = \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (s \delta \tau_0)^k \beta_k \right\} \quad 9, (VI-6.4)$$

Para finalizar, consideremos la forma análoga a la 9, (IV-6.4) para obtener el filtro complementario en el caso de transmisión pura.

Consideremos la fórmula general 3, (VI-6.4). El caso de transmisión pura se caracteriza por la condición:

$$\sum_{p=0}^m (p+1)^k \alpha_p = \begin{cases} = 1 & k = 0 \\ = 0 & k = 1, 2, \dots, m \end{cases} .$$

Entonces, la función transferente asociada a las transmisiones sin retardo será:

$$\mathcal{L} [S_c(t)] = H(s) e^{s \delta} \left[1 - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\delta s)^k \lambda_k \right] \quad 10, (VI-6.4)$$

donde,

$$-\lambda_k = \sum_{p=0}^m (p+1)^k \alpha_p ; \quad k = m+1, \dots, \infty ,$$

y el filtro complementario para la función transferente:

$$F(s) = H(s) e^{s\delta} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \delta^k s^k \lambda_k \quad 11, (VI-6.4)$$

VII. TRANSMISION ADELANTADA - PREDICCIÓN LINEAL.

7.0 Objetivo del Capítulo.

Se darán en forma condensada algunos resultados asociados a la transmisión adelantada de una señal $\varphi(t)$, excepto en algunos puntos que son importantes, en los cuales se hacen las aclaraciones pertinentes. La similitud matemática de los resultados entre la transmisión atrasada y adelantada, es obvio puesto que basta reemplazar T_0 por $-T_0$.

En virtud de que un efecto no puede adelantarse a la causa en los sistemas físicos, la solución del problema del adelanto no existe en un sentido absoluto. Soluciones de un carácter relativo sí pueden producirse. Se explicará esta situación.

Sea T_l la vida de la distribución de un arreglo de ventanas $S_c(t)$. Supongamos primero que la excitación $\varphi(t)$ es continua, y posee la suficiente continuidad para hacer válidas los métodos usados para la determinación de las medidas α 's, de la distribución de ventanas dadas por la expresión fundamental 2, (II-2.2) cap. II. La determinación de todas estas medidas no pueden hacerse antes de que pase un tiempo t_l , como se aprecia desde luego en la sección 3.3, Cap. II. Consideremos dos cosas:

- 1o. $-\infty < t < t_l$; $0 < t_l = \text{const}$
- 2o. $t_l < t < \infty$ $0 < t_l = \text{const.}$

En el primer caso, la respuesta del sistema $\gamma^*(t)$ no representa a la función $\gamma(t)$, por ser un intervalo perteneciente al conjunto de aperturas $[a_i]$.

En el segundo caso el estado de transmisión ha pasado. En este último caso la distribución de ventanas produce un muestreo ponderado de la función $\varphi(t)$, tomando elementos en el intervalo $t-t_l, t$. La respuesta se expresa mediante la expresión 1, (III-3.32) como sigue:

$$\varphi(t+T_o) = \sum_{p=0}^m \alpha_k \varphi[t-(k+1)\delta] ; t_l > t,$$

que indica que la función producida se forma mediante un muestreo del presente, correspondiendo a la ventana α_0 , y de un muestreo ponderado del pasado de $\varphi(t)$ en el intervalo $t-t_l+\delta, t$. Este es el sentido relativo en que se interpreta la predicción así presentada.

7.1 Medidas de las ventanas.

El problema de transmisión adelantada se caracteriza por las expresiones:

$$\begin{aligned}
 \gamma^*(t) &= \varphi(t+T_o) \quad t_l < t. \\
 \gamma_k &= \sum_{p=0}^m (p+1)^k \alpha_p = T_o^k ; k = 0, 1, \dots, m \\
 \alpha_i &= (-1)^m \frac{\prod_{p=0}^m (T_o + \mu_p)}{\prod_{p=0}^m (\mu_i - \mu_p)} = \\
 &= \frac{G(-T_o)}{G(\mu_i)}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \gamma^*(t) \\ \gamma_k \\ \alpha_i \end{aligned}} \right\} 1, (VII-7.1)$$

tomadas de la sección 2.5, cap. II.

Agregaremos aquí, por conveniencia futura, la expresión:

$$\sum_{p=0}^m (p+1)^k \alpha_p = T_o^k - \beta_k, \quad k = m = 1, \dots \quad 2, (VII-7.1)$$

similar a la ecuación 6, (VI-6.4) de la transmisión atrasada.

La última expresión que da α_j en la expresión 1, (VII-7.1), indica que no hay un "futuro" intrínseco puesto que todas las medidas α_p , $p = 0, 1, 2, \dots, m$ existen y no son nulas para todos los valores de T_o, α_j .

7.2 Expresión explícita de las α 's para $m = 1, 2, 3, 4$.

Para ventanas igualmente abiertas y midiendo el tiempo adelante en unidades δ , se tienen las expresiones:

$$\alpha_j = (-1)^m \frac{\prod_{p=0}^m (\tau_o + p + 1)}{\prod_{p=0}^m (j - p)}$$

las α 's calculadas para $m = 1, 2, 3, 4$, suministran los valores:

α_s	$m = 1$	$m = 2$
α_0 ,	$\tau_o + 2$	$+\frac{\tau_o^2 + 5\tau_o + 6}{2}$
α_1 ,	$-1 - \tau_o$	$-\frac{\tau_o^2 + 4\tau_o + 3}{1}$
α_2		$+\frac{\tau_o^2 + 3\tau_o + 2}{2}$
	$m = 3$	$m = 4$
α_0	$+\frac{\tau_o^3 + 9\tau_o^2 + 26\tau_o + 24}{6}$	$+\frac{\tau_o^4 + 14\tau_o^3 + 71\tau_o^2 + 154\tau_o + 120}{24}$
α_1	$-\frac{\tau_o^3 + 8\tau_o^2 + 19\tau_o + 12}{2}$	$-\frac{\tau_o^4 + 13\tau_o^3 + 59\tau_o^2 + 107\tau_o + 60}{6}$
α_2	$+\frac{\tau_o^3 + 7\tau_o^2 + 14\tau_o + 8}{2}$	$+\frac{\tau_o^4 + 12\tau_o^3 + 49\tau_o^2 + 78\tau_o + 40}{4}$

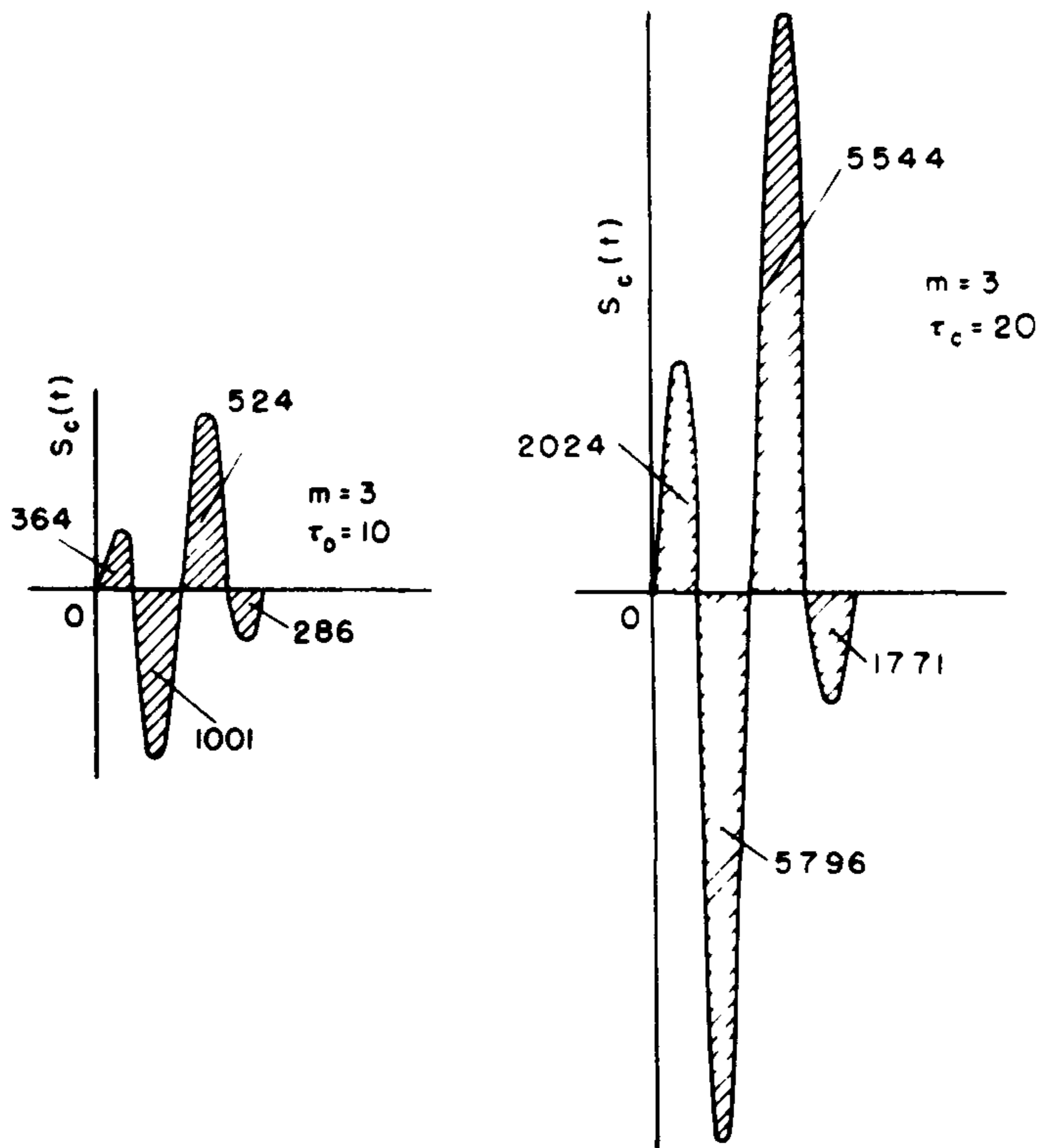


Fig. 1(VII-7.2). Función de distribución de ventanas, $m = 3$, correspondiente a los adelantos $\tau_0 = 10$ y $\tau_0 = 20$.

$$\begin{array}{r}
 m = 3 \\
 a_3 = - \frac{\tau_0^3 + 6\tau_0^2 + 11\tau_0 + 6}{6} \\
 \\
 m = 4 \\
 a_4 = - \frac{\tau_0^4 + 11\tau_0^3 + 41\tau_0^2 + 61\tau_0 + 30}{6} \\
 + \frac{\tau_0^4 + 10\tau_0^3 + 35\tau_0^2 + 50\tau_0 + 24}{24}
 \end{array}$$

Nótese el rapidísimo incremento de las medidas a 's cuando τ_0 crece. Por ese motivo es necesario emplear amplificadores lineales adicionales. Por ejemplo, la disposición práctica de sintetizar el circuito correspondiente a $m = 3$, $\tau_0 = 20$, está esquemáticamente representado en la figura 2, (VII-7.2). Los números indican el factor de amplificador correspondiente a cada amplificador.

7.3 Evolución del error.

Es semejante al caso de predicción atrasada cambiando T_0 por $-T_0$. La fórmula de tolerancia 1, (VI-6.3) es aquí también válida. Se repite por conveniencia:

$$\epsilon_{(k)} = \frac{|T_0|^2 \epsilon |T_0|}{2^m}$$

7.4 Función transferente asociada.

Los resultados son:

$$\mathcal{L} [(S_c(t))] = H(s) e^{2\delta} \left[e^{sT_0} - \sum_{m+1}^{\infty} \frac{(s\delta\tau_0)^k}{k!} \beta_k \right] \quad 1, (VII-7.4)$$

Si la distribución es singular $H(s) e^{s\delta} = 1$.

7.5 Función y filtro complementario.

La función transferente del filtro complementario es:

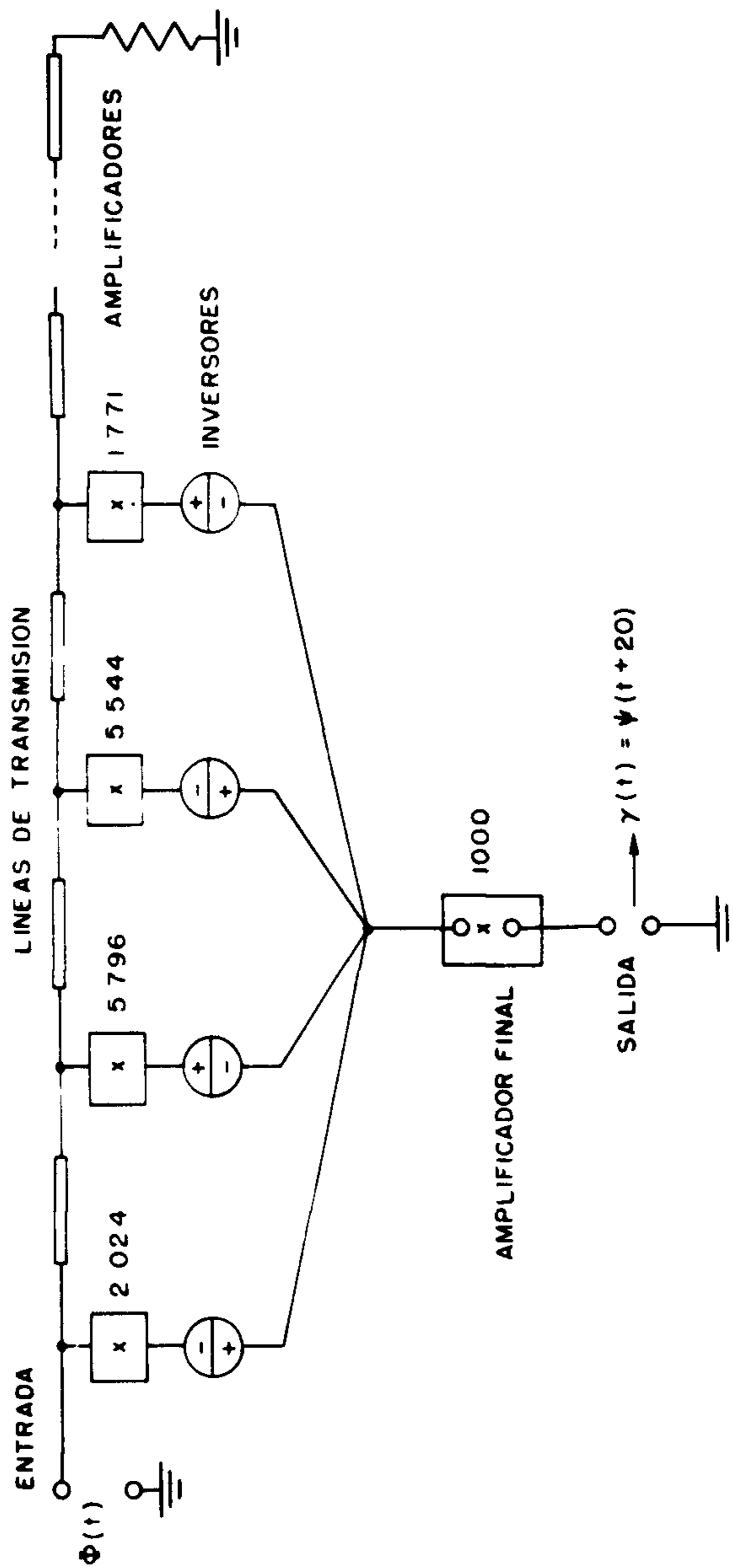


Fig. 2. (VII-7.2). Síntesis de un predictor lineal; $m = 3$, $\tau_0 = 20$.

$$F(s) = H(s) e^{\delta s} \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(s \delta \tau_0)^k}{k!} \beta_k \right\} \quad 2, (\text{VII}-7.4)$$

con $H(s) e^{\delta s}$, si la distribución es singular.

VIII. DIFERENCIACION DE SEÑALES. FILTROS COMPLEMENTARIOS.

8.0 Objetivo del capítulo.

La teoría expuesta en este artículo permite obtener con facilidad, un sistema de cuatro terminales cuya respuesta es la k -ésima derivada de la excitación $\varphi(t)$ caso de que $\varphi(t)$ sea así derivable.

Nos limitaremos aquí a 2 cosas:

- 1o. Producir las medidas α 's que caracterizan las distribuciones correspondientes a esas operaciones de derivación.
- 2o. Su aplicación a los filtros complementarios.

8.1 Medidas α 's de las distribuciones.

El problema de diferenciación se expresa por:


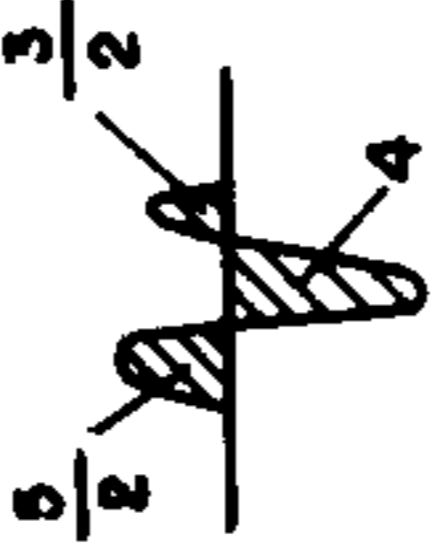
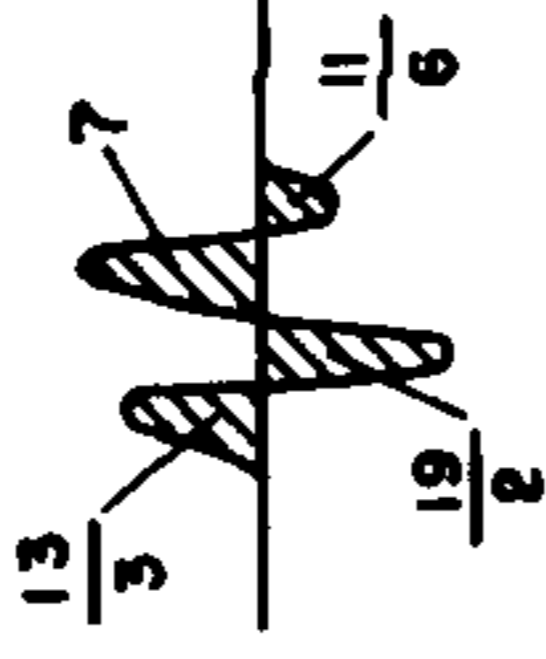
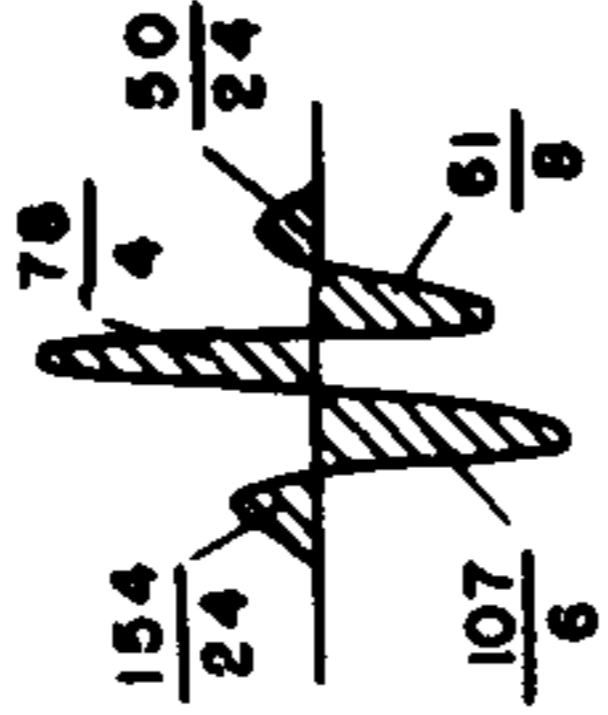
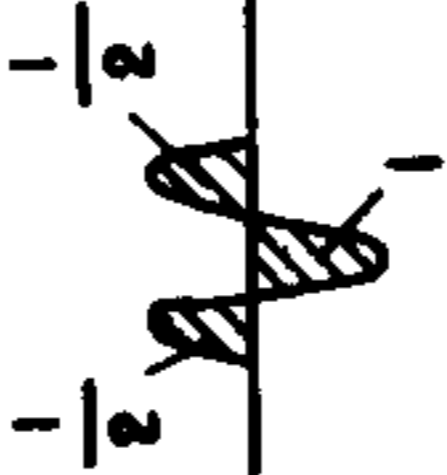
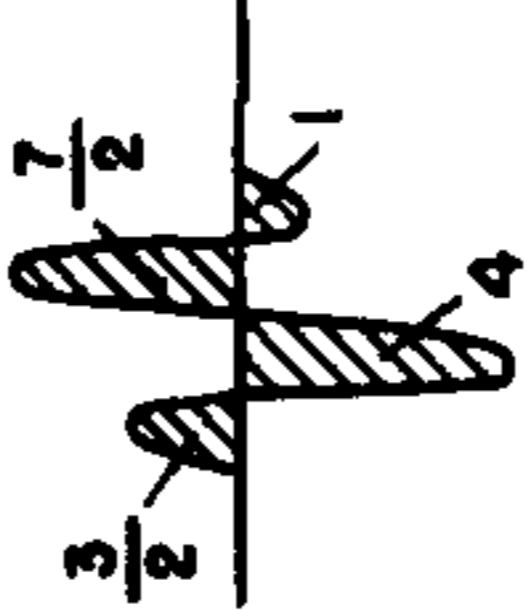
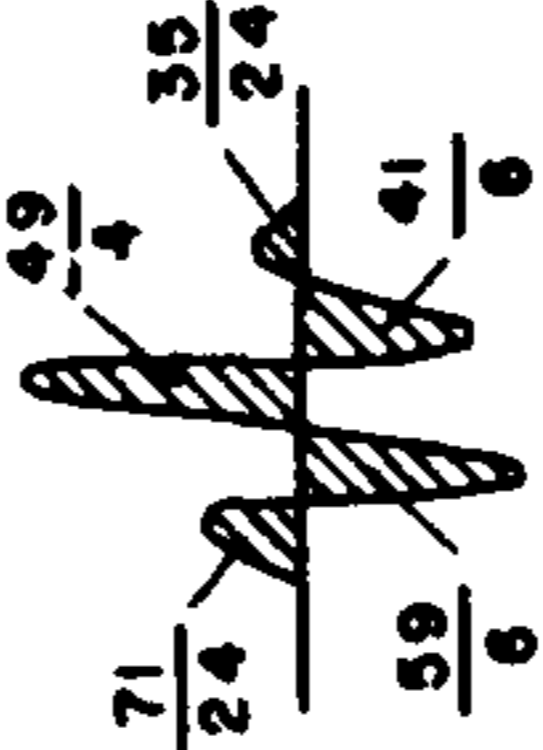
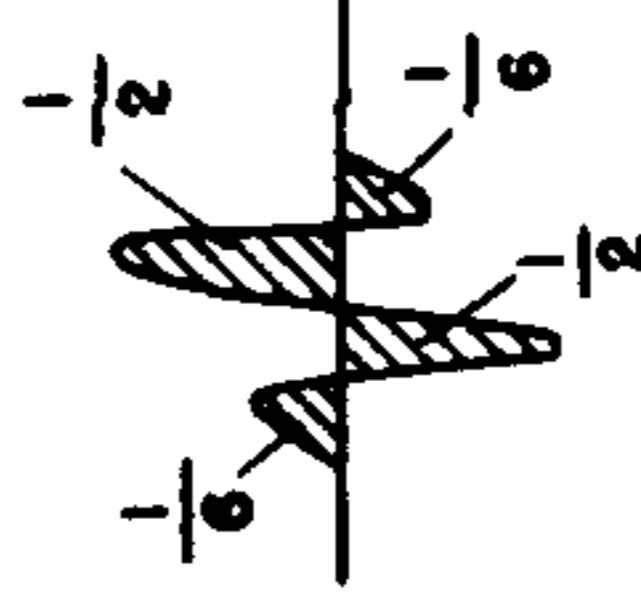
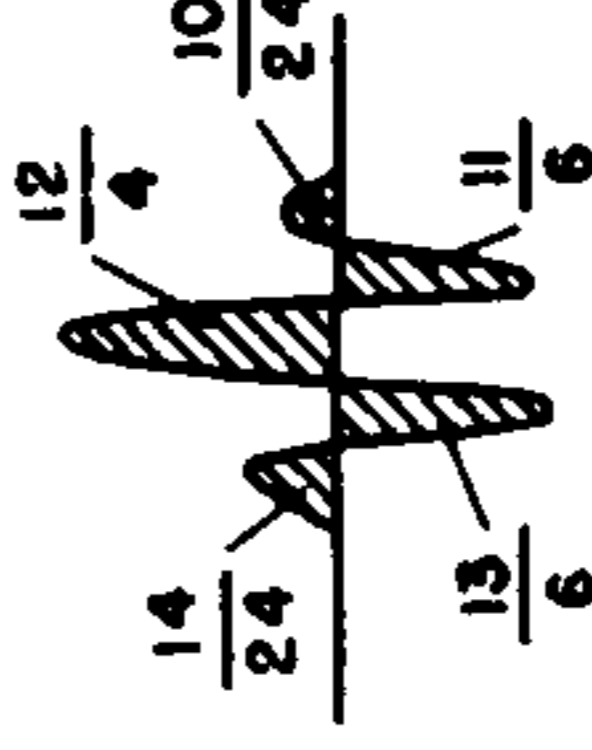
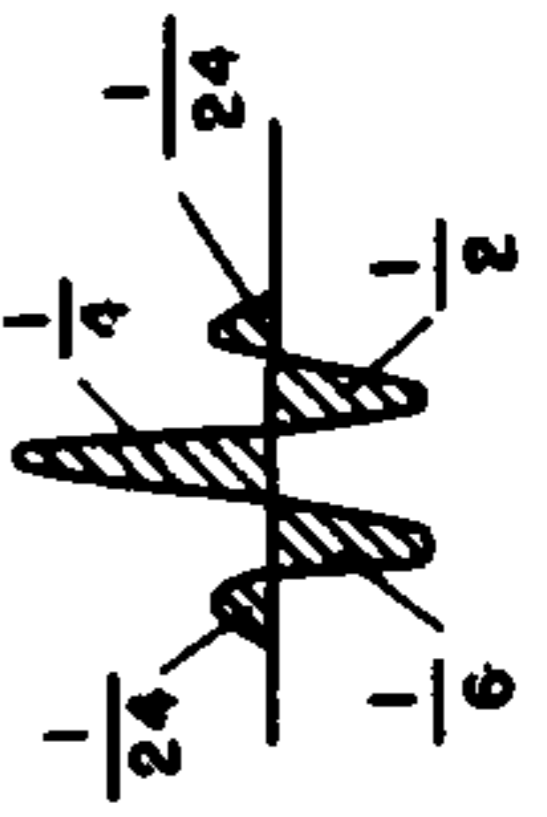
$$\gamma^*(t) = \frac{d^k}{dt^k} \varphi(t) \quad 1, (\text{VIII}-8.2)$$

La fórmula 2, (II-2.6) suministra las α 's. Se repite por conveniencia:

$$\alpha_i = \frac{(-1)^k y_k s_k^{(i)}}{\prod_{p=0}^m (\mu_i - \mu_p)} \quad 2, (\text{VIII}-8.2)$$

La tabla 1 muestra las distribuciones respectivas para $m = 1, 2, 3, 4$, para las primeras 4 derivadas.

TABLA I, (VIII - 8.1)

$S_c(t)$				
DERIVADA	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1				
2	—			
3	—	—		
4	—	—	—	

Nota: Diagramas no a escala.

8.2 Aplicación a la síntesis de filtros complementarios de transmisión aquí estudiadas.

Las ecuaciones que producen las funciones transferentes de los filtros complementarios, en los tres casos de transmisión aquí estudiados, se pueden escribir:

$$\text{Transmisión pura} \quad F(s) = S^{m+1} \{ H(s) e^{s\delta} M_p(s) \}$$

$$\text{Transmisión retrasada} \quad F(s) = S^{m+1} \{ H(s) e^{s\delta} M_r(s) \} \quad 1, (\text{VIII}-8.2)$$

$$\text{Transmisión adelantada} \quad F(s) = S^{m+1} \{ H(s) e^{s\delta} M_a(s) \}$$

En la que:

$$M_p(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1+i}}{(m+1+i)!} \delta^{(m+1+i)} \lambda_{(m+1+i)} s^i$$

$$M_r(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1+i}}{(m+1+i)!} (\delta\tau_o)^{m+1+i} \beta_{(m+1+i)} s^i$$

$$M_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\delta\tau_o)^{m+1+i}}{(m+1+i)!} \beta_{(m+1+i)} s^i$$

Nos proponemos sintetizar, en forma esquemática, los sistemas cuyas funciones transferentes son dadas en 1, (VIII-8.2). En virtud de la semejanza analítica de las funciones $M_p(s)$, $M_r(s)$, $M_a(s)$, nos limitaremos a considerar uno cualquiera de ellos como tipo. En los filtros complementarios $H(s) e^{s\delta}$ puede considerarse casi igual a 1. Si no, expandiendo $H(s) e^{s\delta}$ en serie de potencias de s y formando los productos con la serie M_p , M_r , M_a , se construye una nueva serie de potencias. El procedimiento de síntesis de estas nuevas series es similar al procedimiento usado para M_p , M_r , M_a , el cual se da a continuación.

El problema se divide en dos partes:

- 1o. Se sintetiza el sistema de 4 terminales correspondiente a las series de potencias.

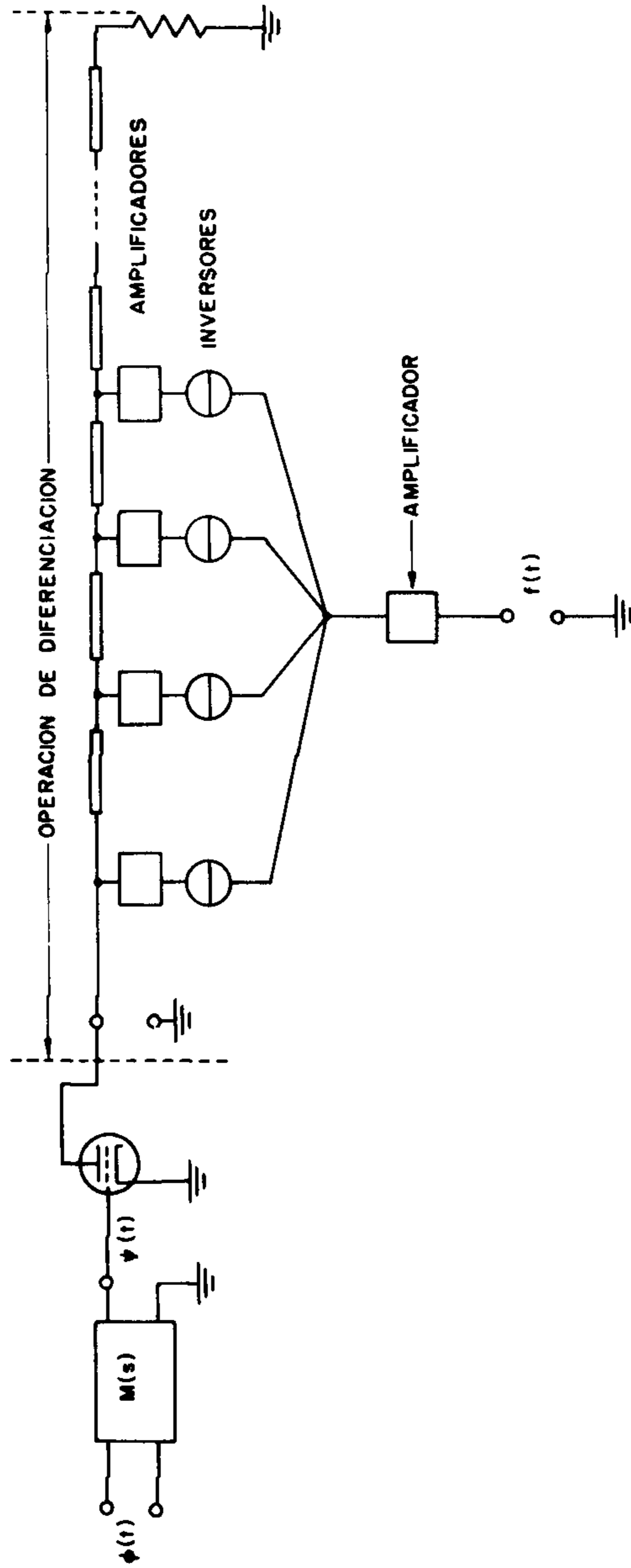


Fig. 1. (VIII-8.2). Método de síntesis del filtro complementario.

Por tal motivo suponemos conocido el sistema correspondiente a una de la serie de potencias. La red correspondiente se indica en la figura 1, (VIII-8.2) con la letra $M(s)$.

2o. Sea:

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1} M(s)$$

y

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} F(s)$$

Suponiendo suficiente continuidad a $\psi(t)$, se tiene:

$$f(t) = \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \psi(t)$$

Esta última operación se verifica mediante el uso del dispositivo de la figura 2, (I-1.41). El esquema del método de síntesis de los filtros complementarios queda indicado en la figura 1, (VIII-8.2). La operación de derivación se hace usando las distribuciones cuyas medidas están dadas por la expresión 1, (VIII-8.1).

8.9 Nota.

Los filtros de transmisión descritos aquí son fundamentalmente análogos a los de paso de banda baja. Sus complementarios son de paso alto en la banda complementaria. En el dominio de la frecuencia sus espectros son complementarios. En dominio del tiempo, el primero actúa como transmisor de funciones que poseen módulos de oscilación pequeños en el intervalo δ . El filtro complementario actúa como un aniquilador de tal función.

Una aplicación de los filtros complementarios se encuentra en la disminución del nivel de ruido asociado a las señales de excitación. Este aspecto del problema queda fuera de la demarcación delineada en el presente artículo.

Estos métodos de síntesis son conocidos. Por ejemplo véase "On basic existence theorems in network synthesis. IV TRANSMISSION OF PULSES" M. V. Cerrillo y E. F. Bolinder. Technical Report No. 246 Aug. 15, 1952 R.L.E. Mass. Inst. of Tech. U.S.A., donde se encuentran todos los detalles de esta síntesis.

AGRADECIMIENTO

El autor hace patente su especial agradecimiento al Instituto Nacional de la Investigación Científica y al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, por haber auspiciado este trabajo.

En lo particular a los Sres. Drs. Manuel Sandoval Vallarta, Alfonso Nápoles Gándara, así como a los miembros del seminario de Física del I.N.I.C., y a sus distinguidos colegas investigadores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Manuel Cerrillo

Esta página está intencionalmente
en blanco