

POLARIZACION DE PARTICULAS DE SPIN 1 EN UNA DISPERSION
ELASTICA A ENERGIAS BAJAS POR NUCLEOS DE SPIN CERO *

Shiguo Watanabe

Departamento de Física da Fac. Filosofia, Ciências e Letras da
Universidade de São Paulo, Brasil

(Recibido: 31 Enero de 1957)

RESUMEN

The polarization of a beam of spin one particles after an elastic scattering by spin zero nuclei at low energy was studied.

The transition matrix $M(\theta, E)$ is determined using Lepore's method, assuming the spin-orbit term in the Hamiltonian, but not the tensor force since the nuclei have spin zero.

The result is that, if the incident beam is polarized the differential cross section of the elastic scattering is a sum of three terms. The first is independent of the incident and outgoing beams; the second term is a scalar product of the polar-

* Este trabajo fué terminado con ayuda del Conselho Nacional de Pesquisas do Brasil, durante el curso de Verano de 1956 en la Universidad Nacional Autónoma de México.

ization vectors of the incident and outgoing beams, and third one is the scalar product of the tensors of polarization of the two beams.

This result suggests two types of double scattering. One is to be carried out in the same scattering plane, and the other in two orthogonal planes i.e. the differential cross section of the second scattering must be measured in the plane perpendicular to the first scattering plane. In the former double scattering we find an azimuthal asymmetry, whereas in the latter one, none.

If we assume that the spin one nuclei namely the deuteron, Li_6 and N_{14} behave as a whole, i.e. that each component of the nuclei do not interact directly with the scatterer, then the treatment developed here must be applicable to the elastic scattering of the spin one nuclei by spin zero nuclei.

1. INTRODUCCION

Un método muy útil para estudiar la polarización de un haz de partículas idénticas con spin diferente de cero, es el formalismo de la matriz de densidad de von Neumann¹.

El estado de polarización de un haz de partículas idénticas de spin s queda completamente determinado cuando se conocen todos los componentes de la matriz densidad ρ de von Neumann. Esta matriz densidad con $(2s + 1)$ columnas y $(2s + 1)$ renglones es una combinación lineal de $(2s + 1)^2$ matrices linealmente independientes, las cuales pueden ser construídas con los componentes del vector spin.

$$\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k} \quad (1)$$

Indicando con ξ_i ($i = 1, 2, \dots, (2s + 1)^2$) las $(2s + 1)^2$ matrices bases, se puede escribir

$$\rho = (2s + 1)^{-1} \sum_{i=1}^{(2s+1)^2} a_i \xi_i \quad (2)$$

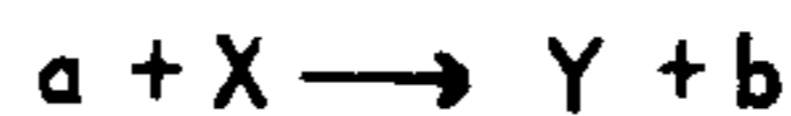
Para un haz totalmente despolarizado

$$\rho = 1/3 \quad \text{y} \quad \text{Tr} \rho = 1 \quad . \quad (3)$$

Si $\text{Tr}(\xi_i \xi_j^\dagger) = (2s + 1) \delta_{ij}$, (4)
 ξ_i y ξ_j son ortogonales; entonces

$$a_i = \text{Tr}(\rho \xi_i) = \langle \xi_i \rangle \quad . \quad (5)$$

Consideremos ahora una dispersión elástica o una reacción del tipo



donde a es la partícula incidente, X el núcleo inicial, Y el núcleo residual y b la partícula emergente.

Siendo ρ_{inc} y ρ_{out} las matrices densidad para los haces incidentes y emergentes respectivamente, y $M(\theta, E)$ la matriz de transición, tenemos

$$\rho_{out} = M \rho_{inc} M^\dagger \quad , \quad (5)$$

y el valor de expectación estadístico de un operador S cualquiera de spin esta dado por

$$\langle S \rangle = \text{Tr}(\rho_{out} S) / \text{Tr} \rho_{out} \quad . \quad (7)$$

Tenemos también

$$\sigma = \text{Tr} \rho_{out} = \text{sección diferencial de colisión,} \quad (8)$$

ya que

$$\text{Tr} \rho_{inc} = 1$$

2. LA EXPRESION EXPLICITA PARA $M(\theta, E)$ EN UNA DISPERSION ELASTICA DE PARTICULA DE SPIN 1 POR NUCLEOS DE SPIN CERO.

Deduciremos ahora la matriz de transición M con el uso del método de

Lepore². Sean \vec{k}_0 y \vec{k} las direcciones de los haces incidentes y emergentes, respectivamente.

La onda incidente puede ser escrita

$$\psi_{inc} = \exp i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \eta \log 2kr) \chi_a \quad (9)$$

donde χ_a es la función de spin de la partícula incidente y

$$\eta = \frac{Z Z' e^2 \mu}{k \hbar^2} \quad (10)$$

La forma asintótica de la solución de la ecuación de Schrodinger es

$$\psi \sim \psi_{inc} + \frac{\exp i(kr - \eta \log 2kr)}{r} M(\theta, E) \chi_a \quad (11)$$

y θ es el ángulo formado por \vec{k}_0 y \vec{k} .

Vamos a descomponer la onda incidente en sus componentes de momentos angulares orbitales (método de ondas parciales)

$$\psi_{inc} \sim \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^{1/2} i^l \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}l\pi - \eta \log 2kr)}{kr} Y_l^0(\cos \theta) \chi_a \quad (12)$$

Deseamos incluir en la Hamiltoniana el término de spin-órbita para obtener la polarización de las partículas emergentes. Con esto \vec{L} deja de ser una constante del movimiento, y en lugar de \vec{L} tenemos

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$$

como una constante del movimiento.

En la región de energías bajas donde la mezcla de $l = J-1$ y $l = J+1$ puede ser despreciada, no necesitamos considerar las fuerzas tensoriales*. \vec{L}^2

* En el caso que estamos considerando, donde los núcleos tienen spin cero, no hay necesidad de tener en cuenta la fuerza tensorial pero, no debemos olvidar la posibilidad de interacción tensorial entre cada partícula de los núcleos incidentes y cada partícula de los núcleos dispersores.

y \vec{s}^2 conmutan entonces con la Hamiltoniana y tenemos como el conjunto de constantes del movimiento

$$\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2 \text{ y la paridad} \quad (13)$$

Con el propósito de escribir la función arriba indicada ψ_{inc} en términos de las funciones propias de (13) introduciremos los siguientes operadores de proyección:

$$\pi_l^+ = (l+1)^{-1} (2l+1)^{-1} (1 + \vec{s} \cdot \vec{L}) (l+1 + \vec{s} \cdot \vec{L}) \quad (14a)$$

$$\pi_l^0 = l^{-1} (l+1)^{-1} (l - \vec{s} \cdot \vec{L}) (l+1 + \vec{s} \cdot \vec{L}) \quad (14b)$$

$$\pi_l^- = -l^{-1} (2l+1)^{-1} (l - \vec{s} \cdot \vec{L}) (1 + \vec{s} \cdot \vec{L}) \quad (14c)$$

El operador π_l^+ cuando es aplicado a la función de la forma $Y_l^0 \chi_a$ destruye los estados con $J = l$ y $J = l - 1$, seleccionando solamente los estados con $J = l + 1$. Los otros operadores tienen un significado semejante. Naturalmente

$$\sum_{i=-1}^1 \pi_l^i = 1 \quad (15)$$

Vamos ahora buscar una solución ψ de nuestro problema de la forma,

$$\psi \sim \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^{1/2} i^l \left(\sum_{i=-1}^1 A_l^i \pi_l^i \frac{u_l^i(kr)}{kr} \right) Y_l^0 \chi_a, \quad (16)$$

donde

$$u_l^i(kr) = \text{sen} \left(kr - \frac{1}{2} l \pi - \eta \log 2kr + \delta_l^i \right), \quad (17)$$

y δ_l^i es el defasamiento que describe la dispersión coulombiana, potencial y de resonancia, y puede ser escrito

$$\delta_l^i = \alpha_l^i + \beta_l^i + \gamma_l^i. \quad (18)$$

Suponiendo que los términos coulombianos y de potencial son independientes del spin:

$$\alpha_l = \arg \Gamma (l + 1 + i \eta) \quad (19)$$

$$\beta_l = \tan^{-1} (F_l / G_l) \quad (20)$$

$$\gamma_l^i = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} \Gamma^i}{E_l^i - E} \quad (21)$$

Los coeficientes A_l^i serán determinados suponiendo que (16) tenga la forma (11).

Se puede mostrar que

$$A_l^i = \exp (i \delta_l^i) \quad (22)$$

Con el uso de la relación

$$\vec{s} \cdot \vec{L} Y_l^0 = -i (\text{sen } \theta \frac{\partial}{\partial (\cos \theta)} Y_l^0) \vec{s} \cdot \vec{n},$$

donde

$$[\vec{k} \times \vec{k}_0] = \vec{n} k^2 \text{sen } \theta \quad (23)$$

y por la sustitución de (14a), (14b), (14c), (17) y (22) en (15) obtendremos

$$\begin{aligned} \psi \sim \psi_{\text{inc}} + r^{-1} \exp i(kr - \eta \log 2kr) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \{ A_l(\theta) + B_l(\theta) \vec{s} \cdot \vec{n} + \\ + C_l(\theta) (\vec{s} \cdot \vec{n})^2 + D_l(\theta) (\vec{s} \cdot \vec{k}_0/k) (\vec{s} \cdot \vec{k}/k) \}, \quad (24) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} kA_l(\theta) = (2l+1)^{1/2} \{ \exp(i \delta_l^+) \text{sen } \delta_l^+ + (2l+1) \exp(i \delta_l^0) \text{sen } \delta_l^0 - \exp(i \delta_l^-) \text{sen } \delta_l^- \} Y \\ + 2l^{-1} (l+1)^{-1} (2l+1)^{-1/2} \{ l \exp(i \delta_l^+) \text{sen } \delta_l^+ - (2l+1) \exp(i \delta_l^0) \text{sen } \delta_l^0 + \\ + (l+1) \exp(i \delta_l^-) \text{sen } \delta_l^- \} \cdot \cos \theta \frac{\partial Y_l^0}{\partial (\cos \theta)} \quad (25) \end{aligned}$$

$$k B_l(\theta) = -i [l(l+1)(2l+1)^{1/2}]^{-1} [l(l+2) \exp(i\delta_l^+) \text{sen } \delta_l^+ - (2l+1) \exp(i\delta_l^0) \text{sen } \delta_l^0 + (l^2-1) \exp(i\delta_l^-) \text{sen } \delta_l^-] \cdot \text{sen } \theta \frac{\partial Y_l^0}{\partial(\cos \theta)} \quad (26)$$

$$k C_l(\theta) = - [l(l+1)(2l+1)^{1/2}]^{-1} [l \exp(i\delta_l^+) \text{sen } \delta_l^+ - (2l+1) \exp(i\delta_l^0) \text{sen } \delta_l^0 + (l+1) \exp(i\delta_l^-) \text{sen } \delta_l^-] \cdot \text{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 Y_l^0}{\partial(\cos \theta)^2} \quad (27)$$

$$k D_l(\theta) = - [l(l+1)(2l+1)^{1/2}]^{-1} [l \exp(i\delta_l^+) \text{sen } \delta_l^+ - (2l+1) \exp(i\delta_l^0) \text{sen } \delta_l^0 + (l+1) \exp(i\delta_l^-) \text{sen } \delta_l^-] \cdot \frac{\partial Y_l^0}{\partial(\cos \theta)} \quad (28)$$

De (24) y (11) se puede concluir que

$$M(\theta, E) = A(\theta, E) + B(\theta, E)(\vec{s} \cdot \vec{n}) + C(\theta, E)(\vec{s} \cdot \vec{n})^2 + D(\theta, E)(\vec{s} \cdot \vec{k}_0/k)(\vec{s} \cdot \vec{k}/k), \quad (29)$$

con $A(\theta, E) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(\theta, E)$, etc.

3. SECCION DIFERENCIAL DE COLISION Y POLARIZACION DEL HAZ EMERGENTE.

a) Supongamos un haz incidente no polarizado (3) es válido y la sección de colisión diferencial está dada por (8)

$$\sigma_0(\theta, E) = AA^* + \frac{2}{3} \{ BB^* + CC^* + A^*C + AC^* + (A^*D + AD^*) \cos \theta + \frac{1}{2}(BD^* - B^*D) \text{sen } \theta + \frac{1}{2}(C^*D + CD^*) \cos \theta + \frac{1}{2}DD^* (1 + \cos^2 \theta) \} \quad (30)$$

b) Si el haz incidente está polarizado, se puede mostrar que

$$\sigma(\theta, E, \varphi) = \sigma_0(\theta, E) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \vec{P}_{inc} \cdot \vec{P}_{out} + 3 \tau_{inc} \tau_{out} \right\}, \quad (31)$$

donde

$$\vec{P} = \text{Tr}(MM^\dagger \vec{s}) / \sigma_0 = P \vec{n} \quad (32)$$

es el vector de polarización para el haz incidente no polarizado. \vec{P}_{out} en (31) está dado por (32) también cuando el haz incidente esté polarizado. Se debe notar que \vec{P}_{out} no es exactamente el vector de polarización del haz emergente, el cual está dado por

$$\vec{P}'_{out} = \text{Tr}(\rho_{out} \vec{s}) / \text{Tr} \rho_{out}$$

φ es el ángulo entre \vec{P}_{inc} y \vec{P}_{out} ; y

$$P = (3\sigma_0)^{-1} \left\{ 2(A^*B + AB^* + C^*B + CB^*) + (B^*D + 3D^*) \cos \theta + i(CD^* - C^*D + AD^* - A^*D) \sin \theta \right\} \quad (33)$$

$$\tau = \text{Tr}(MM^\dagger T) / \sigma_0 \quad (34)$$

donde T es un tensor simétrico de segundo orden, y en notación diádica puede ser escrito

$$T = \frac{1}{2}(s_x^2 - s_y^2)(\vec{i}\vec{i} - \vec{j}\vec{j}) + \frac{1}{2}s_{yx}^{xy}(\vec{i}\vec{j} + \vec{j}\vec{i}) + \frac{1}{2}s_{zx}^{xz}(\vec{i}\vec{j} + \vec{k}\vec{i}) + \frac{1}{2}s_{zy}^{yz}(\vec{j}\vec{k} + \vec{k}\vec{j}) + 6^{-1/2}(3s_z^2 - 2)\vec{k}\vec{k} \quad (35)$$

con $s_{yx}^{xy} = s_x s_y + s_y s_x$, etc.

Poniendo $\vec{a}_0 = k^{-1} \vec{k}_0$ y $\vec{m} = [\vec{a}_0 \times \vec{n}]$, puede mostrarse que

$$\tau = \sigma_0^{-1} \text{Tr}(MM^* T) = \tau_{11} (\vec{n} \vec{n} - \vec{m} \vec{m}) + \tau_{23} (\vec{m} \vec{a}_0 + \vec{a}_0 \vec{m}) + \tau_{33} \vec{a}_0 \vec{a}_0 \quad (36)$$

donde

$$\tau_{11} = (6\sigma_0)^{-1} [BB^* + CC^* + DD^* \sin^2 \theta + (i \sin \theta BD^* + CD^* \cos \theta + \text{c.c.})], \quad (37a)$$

$$\tau_{23} = (6\sigma_0)^{-1} [AD^* \cos \theta + CD^* \cos \theta - iBD^* \cos \theta + \text{c. c.}], \quad (37b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{33} = (3\sqrt{6}\sigma_0)^{-1} [2(AD^* + CD^* + \text{c.c.}) \cos \theta + i \sin \theta (BD^* - B^* D) + \\ + DD^* (1 + \cos^2 \theta) - BB^* - CC^* - (AC^* + A^* C)] \end{aligned} \quad (37c)$$

Por la ecuación (36) se puede ver que el tensor τ tiene \vec{n} como uno de los ejes principales.

La dependencia con φ de la sección diferencial de colisión se obtiene desarrollando los productos escalares indicados en (31):

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, E, \varphi) = \sigma_0(\theta, E) \{ 1 + 3 [-\tau_{33}^{\text{inc}} \tau_{11}^{\text{out}} \sin^2 \theta + \tau_{33}^{\text{inc}} \tau_{23}^{\text{out}} \sin 2\theta + \\ + \tau_{33}^{\text{inc}} \tau_{23}^{\text{out}} \cos^2 \theta] + 3 [\frac{1}{2} \vec{P}_{\text{inc}} \cdot \vec{P}_{\text{out}} - \tau_{23}^{\text{inc}} \tau_{11}^{\text{out}} \sin 2\theta + \\ + 2 \tau_{23}^{\text{inc}} \tau_{23}^{\text{out}} \cos 2\theta - \tau_{23}^{\text{inc}} \tau_{33}^{\text{out}} \sin 2\theta] \cos \varphi + \\ + 3 [\tau_{11}^{\text{inc}} \tau_{11}^{\text{out}} (1 + \cos^2 \theta) + \tau_{11}^{\text{inc}} \tau_{23}^{\text{out}} \sin 2\theta - \\ - \tau_{11}^{\text{inc}} \tau_{33}^{\text{out}} \sin^2 \theta] \cos 2\varphi \} \quad (38a) \end{aligned}$$

i. e. la dependencia con φ de σ es de la forma

$$\sigma = a + b \cos \varphi + c \cos 2\varphi \quad (38b)$$

Lakin¹ obtuvo también este resultado.

4. DOBLE DISPERSION

a) a) Consideremos 2 dispersiones sucesivas en las cuales \vec{k}'_0, \vec{k}_0 y \vec{k} se encuentran en el mismo plano. Además supondremos que los ángulos de dispersión son iguales. Tenemos que considerar dos casos:

$$1) \quad \vec{n} = \vec{n}' \quad ; \quad \varphi = 0$$

$$\vec{P}_{inc} \cdot \vec{P}_{out} = P^2(\theta) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tau_{inc} \cdot \tau_{out} = & \tau_{11}^2 (1 + \cos^2 \theta) - 2 \tau_{11} \tau_{33} \sin^2 \theta + \tau_{33}^2 \cos^2 \theta + \\ & + 2 \tau_{23}^2 \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$2) \quad \vec{n}' = -\vec{n} \quad ; \quad \varphi = 180^\circ$$

$$\vec{P}_{inc} \cdot \vec{P}_{out} = -P^2(\theta) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \tau_{inc} \cdot \tau_{out} = & \tau_{11}^2 (1 + \cos^2 \theta) - 2 \tau_{11} \tau_{33} \sin^2 \theta + \tau_{33}^2 \cos^2 \theta - \\ & - 2 \tau_{23}^2 \cos 2\theta + 2 \tau_{11} \tau_{23} \sin 2\theta + 2 \tau_{23} \tau_{33} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Vamos a indicar con σ^+ y σ^- respectivamente las secciones diferenciales de colisión en el caso 1) y 2) Es costumbre medir el grado de la polarización por la razón de asimetría azimutal:

$$R_1 = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} =$$

$$= \frac{P^2 + 2 \tau_{23}^2 \cos 2\theta - \tau_{23} \tau_{33} \sin 2\theta - \tau_{23} \tau_{11} \sin 2\theta}{1 + \tau_{11}^2 (1 + \cos^2 \theta) - 2 \tau_{11} \tau_{33} \sin^2 \theta + \tau_{33}^2 \cos^2 \theta + (\tau_{11} \tau_{23} + \tau_{23} \tau_{33}) \sin 2\theta}$$

(41)

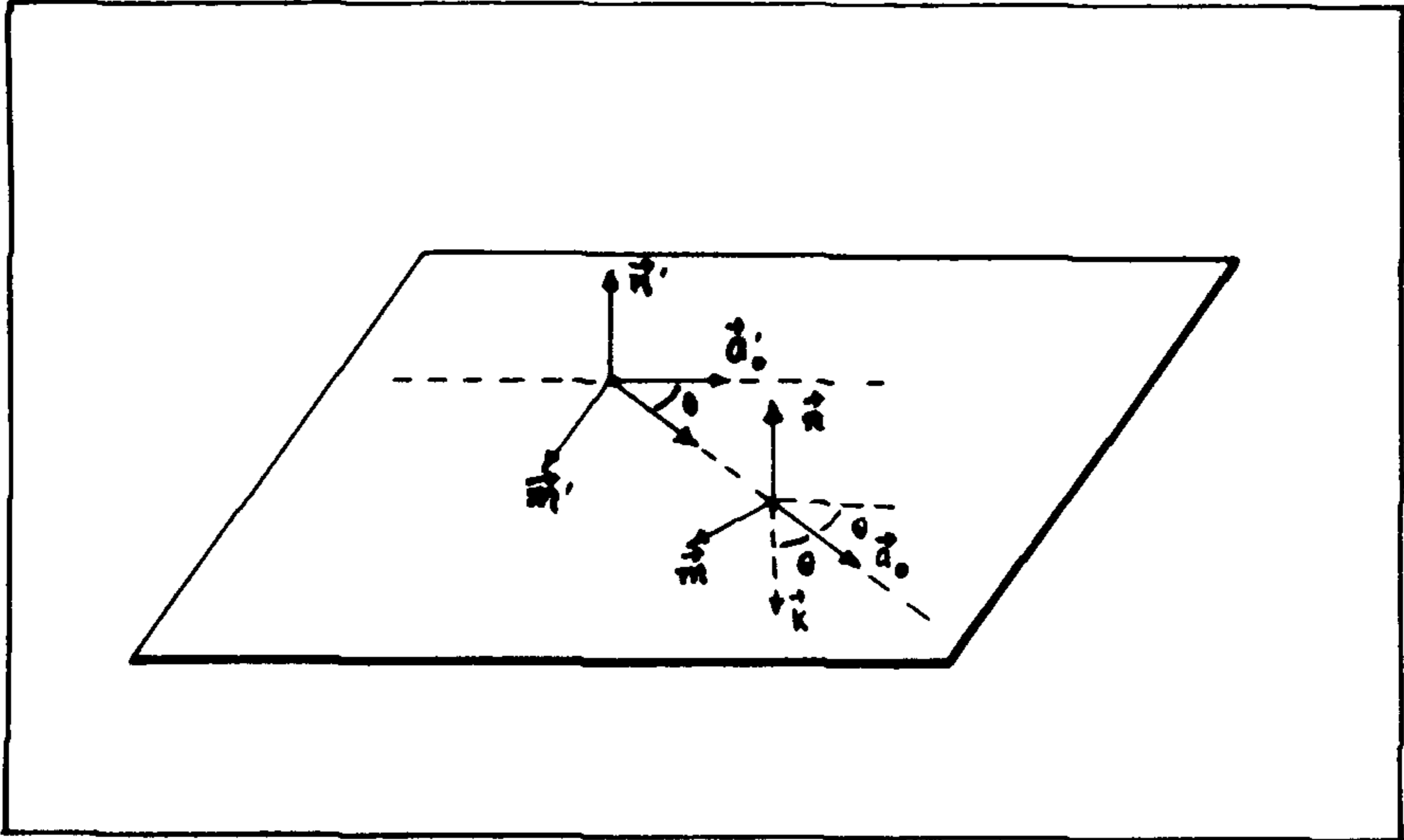


Fig. 1 Doble dispersión en la cual los planos (\vec{a}'_0, \vec{a}_0) y (\vec{a}_0, \vec{k}) coinciden.

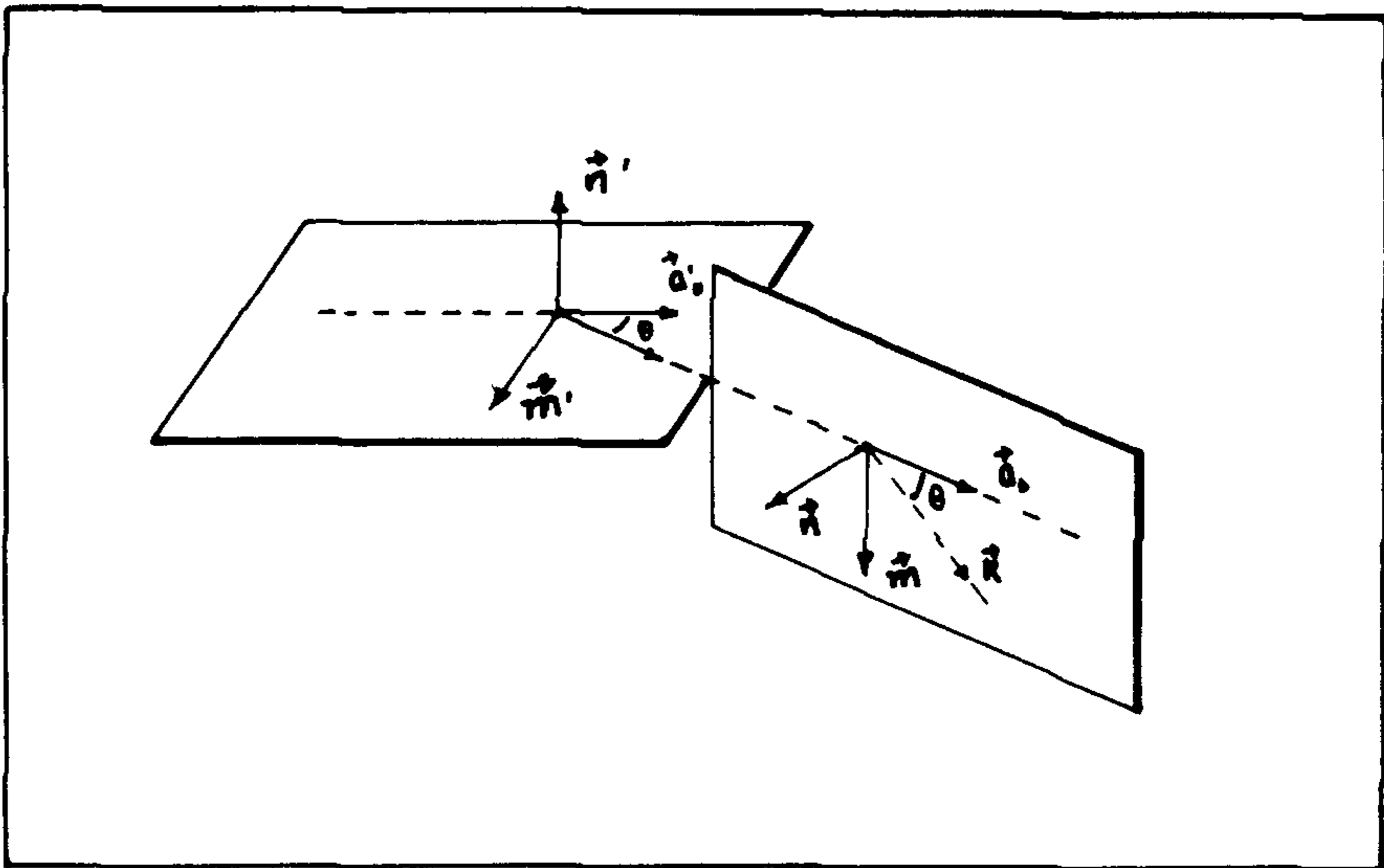


Fig. 2 Doble dispersión en la cual los planos (\vec{a}'_0, \vec{a}_0) y (\vec{a}_0, \vec{k}) son perpendiculares.

b) Hemos visto que la polarización debe ser caracterizada por dos parámetros, más la primera sección diferencial. El segundo parámetro puede ser obtenido de la siguiente doble dispersión en la cual el plano (\vec{k}'_o, \vec{k}_o) es perpendicular al plano (\vec{k}, \vec{k}_o) . Luego se tiene

$$\vec{P}_{inc} \cdot \vec{P}_{out} = 0$$

Además $\sigma(\theta, E, \varphi)$ tiene el mismo valor para $\varphi = 90^\circ$ y $\varphi = -90^\circ$ y está dado por

$$\frac{\sigma^\perp}{\sigma_o} = 1 - \tau_{11}^2 (1 + \cos^2 \theta) - (\tau_{11} \tau_{23} - \tau_{23} \tau_{33}) \sin 2\theta + \tau_{33}^2 \cos^2 \theta \quad (42)$$

donde σ^\perp indica el valor de $\sigma(\theta, E, 90^\circ)$.

Esta segunda doble dispersión no tiene asimetría derecha izquierda como en el caso anterior.

5. CONCLUSIONES

Suponiéndose que en las energías bajas, la contribución de la fuerza tensorial es pequeña comparada con la interacción spin-orbita, hemos obtenido en la sección 2 la matriz de transición M cuya forma es invariante con la rotación. Esta forma había sido predicha por Dalitz¹.

En la caracterización del estado de polarización del haz emergente, entran una magnitud vectorial y otra tensorial. La dirección del vector de polarización es de la normal al plano de dispersión; esta dirección es también la de uno de los ejes principales del tensor. No es posible obtener de las medidas de doble dispersión estas dos cantidades separadamente como se puede ver de las expresiones de σ^+, σ^- y σ^\perp .

La ecuación (31) nos sugiere dos diferentes dobles dispersiones para estudiar la polarización del haz; uno en el mismo plano, el otro en dos planos, uno perpendicular al otro. Las medidas de σ^+ y σ^- nos dan la razón de asimetría azimutal en el primer caso. La segunda doble dispersión no presenta asimetría derecha-izquierda.

La consideración del deuterón como una partícula es muy peligrosa. Es muy probable que otros procesos tipo stripping estén presentes. Sin embargo, el análisis de la dispersión elástica $\text{He}^4(d,d)\text{He}^4$ por Lauritsen et.al.⁴ y Galonsky y McEllistren⁵ confirma la validez del modelo aquí empleado, por lo menos en la región de bajas energías.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Prof. Mario Schonberg por discusiones sobre las propiedades de la matriz densidad de von Neumann.

REFERENCIAS

1. Dalitz, R.H.- Proc.Roy.Soc. A 65, 175 1952; Lakin, W.- Phys.Rev. 98, 138, 1955; Oehme, R.- Phys.Rev. 98, 147, 1955; McDowell, S.W.- Notas de Física Vol. II No. 9, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1955; Simon, A.- Phys.Rev. 92, 1050, 1953.
2. Lepore, J.- Phys.Rev. 79, 137, 1950.
3. Rose, M.E.- Multipole fields, Wiley, Nueva York, 1955.
4. Lauritsen, T. Huus, T., y Nilsson, S.G.- Phys.Rev. 92, 1501, 1953.
5. Galonsky, A. y McEllistren, M.T.- Phys.Rev. 98, 590, 1955.

Esta página está intencionalmente en blanco