SOBRE LA SINTESIS DE SISTEMAS LINEALES PARA LA PREDICCION DE SEÑALES CAOTICAS

Alejandro Medina

Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: 1 de Marzo 1957)

RESUMEN

The method recently developed by M. V. Cerrillo[1], *for synthesis in the time domain using window distributions can be successfully used for transmission and prediction problems involving random functions. In this paper it is shown that for a stationary stochastic process subjected to certain restrictions, an adequate window distribution can be obtained providing an optimum filtering in the sense of the least square error. Two methods for the calculation of the areas of the windows are produced yielding two different types of approximations. In both cases the pertinent areas depend on determinants whose coefficients can be calculated from an appropriate sampling of the correlation functions.*

INTRODUCCION

Recientemente, Cerrillo[1] ha presentado un método de síntesis en el dominio del tiempo que, partiendo de un modelo de kernels singulares, permite encontrar una solución al problema de predicción de señales con características analíticas dadas, dentro de límites preasignados de tolerancia.

Si bien es cierto que el método de Cerrillo presenta varios aspectos de considerable interés, no es menos cierto que en los problemas prácticos ordinarios raras veces se presenta el caso de sintetizar un sistema para la predicción de una señal definida. Usualmente el problema aparece bajo una forma diferente: se desea obtener la función de Green de un sistema que permita predecir, dentro de ciertas tolerancias, no solamente una señal $f(t)$ sino cualquier señal $f(t)$ perteneciente a una clase determinada $\{f(t)\}$. Mas aún, por lo general la señal $f(t)$ contiene componentes que llevan la información deseada impurificadas con otras que se procura eliminar y se clasifican bajo el nombre genérico de "ruido". La tarea del filtro consiste pues en separar la parte deseada de aquella que presenta el ruido y en ejecutar alguna operación definida sobre la parte deseada: transmisión, retraso, predicción, derivación, integración, etc. El filtro, en principio, debe ser capaz de realizar esta función cuando recibe una señal cualquiera perteneciente a una clase determinada. Es por tanto conveniente pensar en filtros que operen sobre clases de funciones mas que sobre señales bien definidas.

Desde luego es intuitivamente obvio que conforme se requiere del filtro la capacidad de operar una clase, la acción del mismo sobre elementos individuales de la clase debe ser mas restringida y esta restricción será tanto mayor cuanto mas extensa sea la clase en cuestión. En otras palabras, puede esperarse que cualquier extensión de la clase se traduzca en una disminución en la efectividad del filtro para realizar su función sobre un individuo particular de la clase. Este es el precio que debe pagarse por la extensión de los servicios del filtro.

En virtud de las consideraciones anteriores resulta evidente el hecho de que es preciso caracterizar la clase $\{f(t)\}$ con suficiente precisión como para tener cierto grado de cortidumbre de que ésta ha sido suficientemente limitada dentro de *las condiciones del problema particular que se desea resolver.*

De otra manera se correría el riesgo de requerir del filtro más de lo necesario, con el consiguiente detrimento en su operación.

Los viejos filtros de paso bajo, paso alto, pasabanda y parabanda son ejemplos sencillos de lo expuesto. En este caso la clase de funciones sobre la que el filtro opera se caracteriza por un intervalo en el eje de las frecuencias reales. En el trabajo aludido de Cerrillo se presenta otro ejemplo de esta naturaleza: en el problema de transmisión pura de una señal, el kernel resulta independiente de la estructura de la misma cuando ésta es de variación lenta respecto al kernel. Un filtro de este tipo transmitiría por tanto, dentro de ciertas tolerancias, la clase entera de funciones de variación lenta que llenaran además los requisitos supuestos.

El objeto de este trabajo es mostrar como es posible extender fácilmente los resultados de Cerrillo al problema de filtración lineal de clases de señales caracterizadas a segundo orden por una distribución probabilística, es decir, a señales consideradas como caóticas. Las limitaciones del método son las ordinarias y provienen no tanto de la síntesis propiamente dicha, como de dos factores importantes: el procedimiento que se emplea para definir la clase y el criterio que se sigue para definir la operación óptima.

I. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA TRANSMISION DE SEÑALES CAOTICAS.

En esta sección revisaremos brevemente el problema de la filtración lineal de señales caóticas según el conocido método de Wiener[2], presentando sin embargo los resultados de una manera adecuada a nuestros propósitos y haciendo ciertas hipótesis que permitan determinar claramente las limitaciones de los mismos.

Considérese (Figs. 1) un filtro o sistema lineal con dos pares de terminales accesibles. $f_1(t)$ es una señal incidente y $f_2(t)$

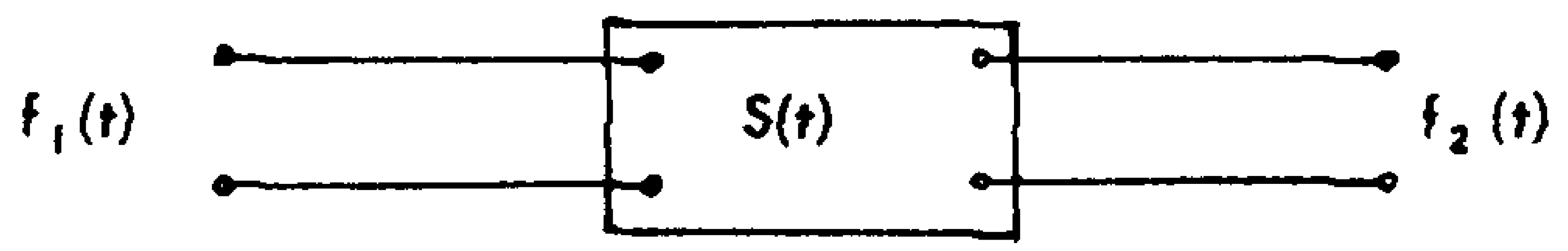

Fig. 1

es la salida cuando el filtro está caracterizado por la función de Green $S(t)$. Sea además $f_0(t)$ la señal deseada. Suponemos que el sistema $S(t)$ se requiere para efectuar la transformación $f_1(t) \to f_0(t)$ pero que produ-e en realidad $f_1(t) \to f_2(t)$ de modo que la diferencia

$$e(t) = f_2(t) - f_0(t) \tag{1}$$

es el error de operación.

$S(t)$ es una función cierta en tanto que $f_1(t)$ se supone ser una función caótica caracterizada por una ley de distribución. Agregaremos además la hipótesis de que $f_1(t)$ es de segundo orden asi que existe la esperanza $E[f_1(t)]$ para todo t y por tanto la covariancia

$$\Gamma_1(t_1, t_2) = E\{f_1(t_1)\, f_1(t_2)\} \tag{2}$$

para todo par (t_1, t_2). Si se supone ahora la existencia de la integral de Riemann

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int S(t-t_1)\, S(t-t_2)\, \Gamma_1(t_1, t_2)\; dt_1\, dt_2 \tag{3}$$

se asegura entonces que la integral estocástica

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\; f_1(t-u)\, du \tag{4}$$

existe en cuadrado medio. Entonces el error podrá expresarse en la forma

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\; f_1(t-u)\, du - f_0(t) \tag{5}$$

Como para cada $f_1(t)$ la señal deseada $f_0(t)$ resulta de la primera por un proceso bien definido, podremos suponer que existe una correspondencia $f_1(t) \to f_0(t)$ y que $f_0(t)$ es una función caótica de segundo orden con covariancia

$$\Gamma_o (t_1, t_2) = E \{ f_o (t_1) \; f_o (t_2) \} \quad . \tag{6}$$

Conviene además considerar una distribución en el espacio producto $f_1 \times f_o$ que permite definir en general las covariancias

$$\Gamma_{ij} (t_1, t_2) = E \{ f_i (t_1) \; f_j (t_2) \} \tag{7}$$
$$(i,j = 0, 1)$$

en donde se escribe por simplicidad $\Gamma_{oo} \equiv \Gamma_o$, $\Gamma_{11} \equiv \Gamma_1$.

El error expresado en (5) es a su vez una función casual de segundo orden. Existe entonces la esperanza $E \{ | e(t) |^2 \}$ que, en general es una funcional de $S(t)$ y una función ordinaria de t. Escribimos pues:

$$E \{ | e(t) |^2 \} = F [S(t); t] =$$

$$= E \{ | \int_{-\infty}^{\infty} S(u) \; f (t-u) \, du - f_o (t) |^2 \} \quad , \tag{8}$$

que por un sencillo cálculo se puede escribir, empleando (7) en la forma

$$E \{ | e(t) |^2 \} = F [S(t); t] =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} S(u_1) \, S(u_2) \; \Gamma_1 (t-u_1, t-u_2) \, du_1 \, du_2 -$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(u) \, \Gamma_{10} (t-u, t) \, du + \Gamma_o (t, t) \quad . \tag{9}$$

Para un proceso estacionario,

$$\Gamma_{ij} (t_1, t_2) = C_{ij} (t_1 - t_2) \quad , \tag{10}$$

no depende mas que de la diferencia $t_1 - t_2$. Las funciones $C_{ij}(t)$ son las funciones de correlación. Además será

$$\frac{\partial F [S(t) ; t]}{\partial t} \equiv 0 \qquad (11)$$

de modo que F es una funcional de $S(t)$ solamente, (9) se reduce a

$$E \{ | e(t) |^2 \} = F [S(t)] =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} S(u_1) S(u_2) C_1 (u_1 - u_2) du_1 du_2 -$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(u) C_{10} (u) du + C_0 (0) \qquad (12)$$

Calcularemos ahora las derivadas funcionales:

$$\frac{\partial F}{\partial S(t)} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} C_1 (t-u) S(u) du - 2 C_{10} (t) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S(t_1) \partial S(t_2)} = 2 C_1 (t_1 - t_2) = 2 \Gamma_1 (t_1, t_2) \quad . \qquad (14)$$

Si requerimos ahora que el error cuadrado medio sea un mímino, $S(t)$ debe anular la derivada (13) y esto requiere que sea solución de la ecuación de Wiener

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1 (t-u) S(u) du = C_{10} (t) \quad . \qquad (15)$$

En efecto, para una función $S(t)$ que satisface (15) y anula (14), la variación δF debida a una variación δS será, en virtud de (14) y (15),

$$\delta F = \int \frac{\partial F}{\partial S(t)} \delta S(t) dt + \frac{1}{2} \int\int \frac{\partial^2 F}{\partial S(t_1) \partial S(t_2)} \delta S(t_1) \delta S(t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \int\int \Gamma_1 (t_1, t_2) \delta S(t_1) \delta S(t_2) dt_1 dt_2 > 0 \quad ,$$

por ser Γ_1 positiva definida.

Substituyendo (15) en (12) y observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1(u_1 - u_2)\, S(u_2)\, du_2 = C_{10}(u_1)$$

cuando S es solución de (15), se ve que la primera integral en (12) se reduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(u_1)\, C_{10}(u_1)\, du_1 \qquad ,$$

de modo que el error cuadrado medio esperado en el caso óptimo es

$$E\{\,|e|^2\}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, C_{10}(u)\, du - 2\int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, C_{10}(u)\, du + C_0(0)$$

$$= C_0(0) - \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, C_{10}(u)\, du =$$

$$= \Gamma_0(t,t) - \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, \Gamma_{10}(t-u,t)\, du =$$

$$= E\{\,|f_0|^2 - \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, f_1(t-u)\, f_0(t)\, du\} = E\{\,|f_0|^2 - f_2 f_0\} =$$

$$= E\{f_0(f_0 - f_2)\} \qquad ,$$

será así:

$$E\{\,|e|^2\}_0 = C_0(0) - \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, C_{10}(u)\, du =$$

$$= E\{f_0(f_0 - f_2)\} \qquad , \qquad (16)$$

el menor error cuadrado medio.

En el caso no estacionario podemos suponer que ya sea la potencia total

$$P_i = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} E\{ f_i(t)^2 \} dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \Gamma_i (t,t)\, dt \qquad (17)$$

$$(i = 0,1)$$

o bien la potencia media

$$\overline{P}_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\{ f_i(t)^2 \} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Gamma_i (t,t)\, dt \qquad (18)$$

existen. En el primer caso existirán las funciones

$$C_{ij}(t) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \Gamma_{ij} (u, u-t)\, du \qquad (17a).$$

asi como la funcional

$$\mathfrak{F}\,[S(t)] = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} F\,[S; t]\, dt =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} S(u_1) S(u_2)\; C_1 (u_1 - u_2)\, du_1\, du_2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, C_{10}(u)\, du + C_o(0). (17b)$$

En el segundo coso existirán las funciones

$$C_{ij}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Gamma_{ij} (u, u-t)\, du \qquad (18a)$$

y la funcional

$$\mathfrak{F}\,[S(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F\,[S; t]\, dt =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} S(u_1)\, S(u_2)\; C_1 (u_1 - u_2)\, du_1\, du_2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, C_{10}(u)\, du + C_o(0)$$

(18b)

de manera que, si el criterio que se sigue para escoger $S(t)$ consiste en hacer mínima en el primer caso la expresión

$$e = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} E\{ e(t)^2 \} dt \qquad , \qquad (17c)$$

y en el segundo

$$e = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\{ e(t)^2 \} dt \qquad . \qquad (18c)$$

El formalismo es el mismo: $S(t)$ debe satisfacer una ecuación de Wienner (15) con las $C_{ij}(t)$ definidas de manera adecuada.

Si se introduce ahora la limitación de que $S(t)$ deba ser físicamente realizable y por tanto sea $S(t) \equiv 0$ para $t < 0$, se encuentra[3] una parte no previsible de la señal.

Es conveniente definir las funciones C_I^- y C_I^+ con la propiedad:

$$\left.\begin{array}{ll} C_I^-(t) \equiv 0 & \text{para } t > 0 \\ C_I^+(t) \equiv 0 & \text{para } t < 0 \\ C_I(t) = C_I^-(t) \star C_I^+(t) & \end{array}\right\} , \qquad (19)$$

en donde el signo $\star$ designa la convolución completa.

Se puede definir además $C(t)$ como solución de la ecuación integral

$$C_I^-(t) \star C(t) = C_{I0}(t) \qquad , \qquad (20)$$

y se descompone además $C(t)$ en sus componentes de tiempo positivo y tiempo negativo:

$$\left.\begin{array}{l} C(t) = C^{(+)}(t) + C^{(-)}(t) \\ C^{(+)}(t) \equiv 0 \ \text{ para } t < 0 \\ C^{(-)}(t) \equiv 0 \ \text{ para } t > 0 \end{array}\right\} . \qquad (21)$$

El sistema $S(t)$ debe transformar, de acuerdo con (15) una señal cierta de la forma $C_1(t)$ en otra de la forma $C_{10}(t)$ Introduciendo en cambio la limitación de causalidad, se sabe [3] que el error disminuye en el caso optimo cuando $S(t)$ transforma $C_1^+(t)$ en $C^{(+)}(t)$ en cuyo caso se anula la parte imprevisible del error. S debe entonces satisfacer la ecuación integral

$$C_1^+(t) \star S(t) = C^{(+)}(t) \tag{22}$$

explícitamente

$$\int_0^t C_1^+(t-u)\, S(u)\, du = C^{(+)}(t) \tag{22a}$$

II INTRODUCCION DE KERNELS SINGULARES

Dentro de las condiciones estipuladas en la sección anterior, el problema se reduce a resolver una ecuación integral de la forma (15) o (22a) Se puede aplicar ahora un argumento eurístico para determinar el tipo de solución que puede esperarse.

Sea T un intervalo finito y hágase una división de T en subintervalos mediante m puntos:

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$$

En cada punto de división t_k se construye un pulso de intensidad α_k Se propone para $S(t)$ una distribución de pulsos

$$S(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, \delta(t - t_k) \tag{23}$$

Se trata pues de un kernel singular de memoria finita T En términos de este kernel la expresión (12) o (17b) o (18b) se escribe:

$$F\,[\,S(t)\,] =$$

$$= \sum_{kh} C_1\,(t_k - t_h)\,\alpha_k\,\alpha_h - 2\sum_k C_{10}\,(t_k)\,\alpha_k + C_o\,(0) = F\,(\alpha)\quad , \qquad (24)$$

es decir, se transforma en una función de las α con coeficientes que, para una estadística dada, dependen de la selección de valores de tiempo. La condición de error mínimo resulta inmediatamente

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = \sum_h C_1\,(t_k - t_h)\,\alpha_h - C_{10}\,(t_k) = 0 \qquad , \qquad (25)$$

que es un sistema de ecuaciónes lineales en las α . Debido al caracter positivo definido de $C_1(t)$, la matriz del sistema (25) es tambien positiva definida y así, este sistema posée solución.

En el caso general, la anulación de la parte imprevisible del error requiere que las α satisfagan la ecuación:

$$\sum_h C_1^{+}\,(t_k - t_h)\,\alpha_h - C^{(+)}\,(t_k) = 0 \qquad . \qquad (26)$$

La solución de este sistema de ecuaciones permite encontrar las intensi - dades de los pulsos del kernel singular.

III. USO DE DISTRIBUCIONES DE VENTANAS

La substitución del kernel singular por una distribución de ventanas puede hacerse, como Cerrillo ha mostrado[1] cuando la función a transformar es de varia - ción lenta respecto al kernel. En nuestro caso, como para una estadística deter - minada las funciones son conocidas, tratándose tan solo de correlaciones, basta escoger T y la subdivisión de una manera adecuada, cuya manera es siempre ob- via cuando se conocen dichas correlaciones, para que la condición se cumpla La síntesis de una distribución de este tipo ya ha sido obtenida[1,4,5].

Mostramos algunos tipos de ecuaciones que se obtienen en casos de interés:

A.- Transmisión pura: $f_o = f_I$, $C_o = C_I = C_{IO}$

$$\sum_h C_I^+ (t_k - t_h)\, \alpha_h = C_I^{(+)} (t_k) \tag{27}$$

B.- Predicción pura: $f_o(t) = f_I(t+\tau)$

$$C_o = C_I \quad C_{IO} = C_I(t+\tau)$$

$$\sum_h C_I^+ (t_k - t_h)\, \alpha_h = C_I^{(+)} (t_k + \tau) \quad . \tag{28}$$

C.- Transformación en presencia de ruido.

Suponemos

$$f_I(t) = f(t) + r(t) \quad , \tag{29}$$

en donde $f(t)$ es la señal y $r(t)$ el ruido. Además

$$f_o(t) = S_o(t) * f(t) \quad , \tag{30}$$

es la señal deseada, es decir, el resultado de una filtración lineal $S_o(t)$ de la señal sola, $f(t)$. Si $C_s(t)$ y $C_r(t)$ representan las autocorrelaciones de la señal y el ruido respectivamente, en tanto que C_{rs} y C_{sr} denotan las intercorrelaciones, se tendrá:

$$C_I = C_s + C_r + C_{rs} + C_{sr} = C_I^+ * C_I^- \tag{31}$$

$$C_{IO} = S_o * (C_s + C_{sr}) = C_I^- * C \quad , \tag{32}$$

de donde se determinan C_I^+ y $C^{(+)}$. La ecuación es ahora del tipo general (26). Este caso, según la forma de $S_o(t)$ contiene como casos particulares la transmisión y predicción en presencia de ruido.

IV. SOLUCION EN SERIE

Una vez que el problema se reduce a resolver una ecuación integral del tipo (22a) por medio de un kernel singular, otras posibilidades se ocurren de inmediato. Si por simplificar la notación hacemos

$$C_i^{+}(t) = x(t) \qquad C^{(+)}(t) = y(t) \tag{32}$$

Substitución directa en (22a) de la expresión

$$\sum_{k=o}^{m} \alpha_k \; \delta\,(t-t_k) = S(t) \tag{33}$$

resulta en una relación del tipo

$$\sum_{k=o}^{m} \alpha_k \; x\,(t-t_k) = g(t) \quad . \tag{34}$$

Por desarrollo en serie

$$x\,(t-t_k) = \sum_{l=o}^{\infty} \frac{x^{(l)}(0)}{l\,!}\,(t-t_k)^l \quad ,$$

y uso del teorema del binomio

$$(t-t_k)^l = \sum_{n=o}^{l} \binom{l}{n} (-t_k)^{l-n}\, t^n$$

se obtiene

$$g(t) = \sum_{k=o}^{m} \sum_{l=o}^{\infty} \sum_{n=o}^{l} \alpha_k \frac{x^{(l)}(0)}{l\,!} \binom{l}{n} (-t_k)^{l-n}\, t^n = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n\,!} t^n ,$$

e igualando el coeficiente de t^n en ambos lados se obtiene

$$\sum_{k=o}^{m} \sum_{l=o}^{\infty} \frac{x^{(l)}(0)}{l\,!} \binom{l}{n} (-t_k)^{l-n}\, \alpha_k = \frac{g^{(n)}(0)}{n\,!} \quad , \tag{35}$$

ecuaciones que son de la forma

$$\sum_k A_{nk}\, \alpha_k = B_n \tag{35a}$$

con

$$\left.\begin{aligned} A_{nk} &= \sum_l \frac{x^{(l)}(0)}{l\,!} \binom{l}{n} (-t_k)^{l-n} \\ B_n &= \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}\right\} \tag{35b}$$

de manera que con una distribución con $m+1$ lóbulos es posible igualar las dos funciones y sus primeras m derivadas en el origen. El sistema, actuando sobre $x(t)$ produce un simil de $y(t)$ que solo empieza a diferir de ésta a partir del término en t^m. Es prácticamente inmediato a que clase de funciones $x(t)$, y $y(t)$ puede aplicarse este procedimiento, si se desea que el sistema produzca verdaderamente un simil dentro de ciertas tolerancias.

REFERENCIAS

1. M. Cerrillo, Rev.Mex. Fis. **4**, 61. (1955).
   ibid. **5**, 71, (1956).
2. N. Wienner, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, New York. 1950.
3. H.W. Bode, C.E. Shannon, Proc. IRE, **38**, 423 (1950).
4. M. Cerrillo, E.F. Bolinder, Res.Lab. of Elect., MIT, Technical Report No.246 (1952).
5. C.A. Stutt, Res.Lab. of Elect. MIT, Technical Report No.182 (1951).