SOBRE EL USO DE DISTRIBUCIONES DE VENTANAS PARA LA TRANSFORMACION DE SEÑALES ESTOCASTICAS

Alejandro Medina

Instituto Nacional de la Investigacón Científica

(Recibido: 15 de Marzo 1957)

RESUMEN

In a previous paper[1]*, Cerrillo's method of synthesis using window distributions was applied to the filtering problem of a stochastic second order process, having a covariance Riemman integrable with respect to the impulse function (Green's function) of the system. In this work the foregoing results have been extended to a more general class of processes, namely those representing functions whose changes can be assumed to be a second order process. As is well, known such procesess determine a measure in general, singular. Under the assumption that the Green's function of the system is integrable with respect to this measure in the Stieltjes sense, a window distribution can be found providing an optimun filtering. A difficulty arises in case the measure produces impulses, since then the assumption that the correlation* *functions are of slow variation with respect to the kernel cannot obviously be maintained. However, considering that such processes are mathematical idealizations that one could not expect to appear as such in actual experience, a simple method whereby the above mentioned difficulty can be circumvected is proposed. The result is that as long as it is possible to realize windows whose aperture can be considered as small relative to the correlation range of the actual physical process, such windows should operate successfully.*

En un trabajo anterior[1] se mostró de qué manera las distribuciones de ventanas propuestas por Cerrillo[2] pueden usarse en la síntesis de filtros para transformar señales estocásticas que cumplen ciertas condiciones. Las restricciones impuestas sobre la señal incidente $f_1(t)$ fueron esencialmente las siguientes:

a. $f_1(t)$ es un proceso de segundo orden

b. existe la integral de Riemann

$$\mathfrak{J} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S(t-u)\, S(t-v)\, \Gamma_1(u,v)\, du\, dv \qquad , \qquad (1)$$

en donde $S(t)$ es la función del sistema y $\Gamma_1(u,v)$ la covariancia del proceso.

Nos proponemos extender ahora los anteriores resultados con el objeto de mostrar que las distribuciones de ventanas pueden usarse con señales caóticas mas generales, es decir, que con modificaciones pertinentes, es posible extender el método para cubrir procesos menos restringidos.

Con este propósito, designaremos nuevamente por $f_1(t)$ la señal que llega al filtro $S(t)$, $f_2(t)$ es la señal producida por $S(t)$ cuando es excitado por $f_1(t)$ en tanto que $f_0(t)$ es la señal deseada. Si $f_1(t)$ es integrable (en el sentido de Lebesgue) podemos definir la distribución asociada a $f_1(t)$ por la relación.

$$F_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(u)\, du \qquad , \qquad (2)$$

en donde la contribución del intervalo $(-\infty, o)$ naturalmente desaparece cuando, como es usual, se supone que $f_1(t) \equiv 0$ para $t < 0$. En este caso sería

$$dF_1(t) = f_1(t)\, dt \qquad , \qquad (2a)$$

y la operación del filtro sobre $f_1(t)$ puede expresarse en la forma,

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(u)\, f_1(t-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, f_1(u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, dF_1(u)$$

Ahora bien, la expresión

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, dF_1(u) \qquad (3)$$

puede existir como integral estocástica en el sentido de Stieltjes aun cuando (2) y (2a) no existan. Para ello bastará que el kernel sea estocásticamente integrable respecto a la distribución o medida algebráica generada por $f_1(t)$.

Si suponemos que (3) existe en cuadrado medio, la forma que toma el error $e(t)$ es ahora

$$e(t) = f_0(t) - f_2(t) = f_0(t) - \int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, dF_1(u), \qquad (4)$$

de donde se sigue para la esperanza del error cuadrado la expresión

$$F\,[\,S(t); t\,] = E\{\, e(t)^2 \,\} =$$

$$= E\left\{ \left| f_0(t) - \int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, dF_1(u) \right|^2 \right\} =$$

$$= E\left\{ |f_0(t)|^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, f_0(t)\, dF_1(u) \right. +$$

$$\left. + \int\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, S(t-v)\, dF_1(u)\, dF_1(v) \right\} =$$

$$= E\{\,|\,f_0(t)\,|^2\,\} - 2\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\; E\{\,f_0(t)\; dF_1(u)\,\} +$$

$$+ \int\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\; S(t-v)\; E\{\,dF_1(u)\; dF_1(v)\,\} \tag{5}$$

Sea ahora $F_0(t)$ la distribución asociada a $f_0(t)$ y supóngase la existencia de una ley temporal adecuada en el espacio producto $f_0 \times f_1$ que da lugar a una medida $\gamma_{ij}(u,v)$ $(i,j = 0,1)$ con la propiedad[3] :

$$E\{\,dF_i(u)\, dF_j(v)\,\} = d\gamma_{ij}(u,v) \tag{6}$$

Se sabe que se verifican entonces las siguientes relaciones:

$$E\{\,f_i(u)\, dF_j(v)\,\} = d_v\, \frac{\partial \gamma_{ij}(u,v)}{\partial_u} \tag{7}$$

$$E\{\,f_i(u)\; f_j(v)\,\} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}(u,v)}{\partial u\, \partial v} \tag{8}$$

supuesto que las derivadas correspondientes existan .

En nuestro caso necesitamos suponer la existencia de

$$\frac{\partial \gamma_{01}(u,v)}{\partial u} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{00}(u,v)}{\partial u\, \partial v}$$

solamente, dado que aseguramos entonces la existencia de las tres expresiones

$$\left.\begin{aligned} E\{\,f_0(u)\, f_0(v)\,\} &= \frac{\partial^2 \gamma_{00}(u,v)}{\partial u\, \partial v} = \Gamma_0(u,v) \\ E\{\,f_0(u)\, dF_1(v)\,\} &= d_v \frac{\partial \gamma_{01}(u,v)}{\partial u} = d_v\, \Lambda(u,v) \\ E\{\,dF_1(u)\, dF_2(v)\,\} &= d\gamma_{11}(u,v) = d\gamma_1(u,v) \end{aligned}\right\} \tag{o}$$

lo cual significa que la señal incidente puede ser bastante irregular pero que la señal deseada $f_0(t)$ no tiene el mismo grado de irregularidad y debe ser por sí misma un proceso de segundo orden. Este caso obviamente ocurre en numerosas circunstancias prácticas. Si por ejemplo, como es usual, $f_1(t)$ representa una señal informativa impurificada con ruido, las irregularidades serias de $f_1(t)$ provienen del ruido y no de la componente portadora de información. Son muy contadas las ocasiones en que se requeriría una señal $f_0(t)$ tan ruidosa como $f_1(t)$; antes bien, lo que se busca en la mayoria de los casos es eliminar la componente de ruido.

Como quiera, supuesta la regularidad relativa de $f_0(t)$ respecto de $f_1(t)$ que implican las relaciones (9), la expresión (5) puede escribirse como

$$F\,[\,S(t);\,t\,] = E\{\,e(t)^2\,\} =$$

$$= \Gamma_0(t,t) - 2\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\,d_u\,\Lambda(t,u) +$$

$$+ \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\,S(t-v)\,d\gamma_1(u,v) \quad . \qquad (10)$$

Supóngase ahora que $f_1(t)$ consiste de una señal informativa $f_s(t)$ impurificada con ruido $f_r(t)$ no correlacionado a $f_s(t)$. Además $f_0(t)$ será algún transformado de $f_s(t)$:

$$f_0(t) = S_0(t) \star f_s(t) \quad , \qquad (11)$$

en donde $S_0(t)$ se supone conocido. Si F_s y F_r son las distribuciones asociadas a la señal y al ruido, podemos poner

$$F_1(t) = F_s(t) + F_r(t) \quad , \qquad (12)$$

de donde, en virtud de la independencia estadística entre la señal y el ruido puede escribirse

$$E\,[\,dF_I(u)\,dF_I(v)\,] = d\gamma_I(u,v) =$$

$$= E\,[\,dF_s(u)\,dF_s(v)\,] + E\,[\,dF_r(u)\,dF_r(v)\,] =$$

$$= d\gamma_s(u,v) + d\gamma_r(u,v) = \frac{\partial^2 \gamma_s(u,v)}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + d\gamma_r(u,v) =$$

$$= \Gamma_s\,(u,v)\,du\,dv + d\gamma_r(u,v) \tag{13}$$

$$E\,[\,f_0(u)\,dF_I(v)\,] = dv\,\Lambda(u,v) = E\,[\,f_0(u)\,dF_s(v)\,] =$$

$$= E\,[\,f_0(u)\,f_s(v)\,dv\,] = \Gamma_{os}(u,v)\,dv \quad , \tag{14}$$

usando estos valores en (10) se obtiene

$$F\,[\,S(t)\,;\,t\,] = \Gamma_o(t,t) - 2\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\,\Gamma_{os}(t,u)\,du\,+$$

$$+\iint_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\,S(t-v)\,\Gamma_s(u,v)\,du\,dv + \iint_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\,S(t-v)\,d\gamma_r(u,v)\,. \tag{15}$$

En caso de un proceso estacionario serán

$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma_o(u,v) = C_o(u-v) & \\ & \Gamma_{os}(u,v) = C_{os}(u-v) \\ \Gamma_s(u,v) = C_s(u-v) & \end{array}\right\} \tag{16}$$

funciones que dependen solamente de la diferencia entre los tiempos. Por otra parte la medida $d\gamma_r(u,v)$ del elemento de área deberá depender solamente de la diferencia entre u y v. Si se introducen las variables

$$u' = v - u$$
$$v' = t - v \quad ,$$

se hace $S(t-u)\,S(t-v) = S(u'+v')\,S(v')$ en tanto que la medida del elemento

de área en el dominio de (u',v') podrá expresarse en la forma $-dc_r(u')dv'$ con lo cual el último término en (15) se escribe como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int S(u'+v')\,S(v')\,dc_r(u')\,dv' \quad .$$

Se sigue que en el caso estacionario el error cuadrado que se espera podrá escribirse en la forma

$$F\,[\,S(t)\,] = C_o(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} C_{os}(u)\,S(u)\,du \; +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int C_s(u-v)\,S(u)\,S(v)\,du\,dv \;+\int_{-\infty}^{\infty}\int S(u+v)\,S(v)\,dc_r(u)\,dv \;. \qquad (17)$$

Pueden además ocurrir singularidades de las cuales la mas importante ocurre cuando $f_r(t)$ es un proceso de incrementos independientes. Será entonces

$$d\gamma_r(u,v) = E\,[\,dF_r(u)\,dF_r(v)\,] = \begin{cases} d\sigma(u) & \text{si } u = v \\ o & \text{si } u \neq v \;. \end{cases} \qquad (18)$$

El error esperado (15) será es este caso

$$F\,[\,S(t),\,t\,] = \Gamma_o(t,t) - 2\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\,\Gamma_{os}(t,u)\,du \; +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int S(t-u)\,S(t-v)\,\Gamma_s(u,v)\,du\,dv \;+\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\,S(t-v)\,d\sigma(u) \;, \qquad (19)$$

y se tendrá un proceso estacionario cuando $d\sigma(t) = a\,dt$ siendo a una constante. La última expresión se reduce entonces a

$$F\,[\,S(t)\,] = C_o(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} C_{os}(u)\,S(u)\,du \; +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int C_s(u-v)\,S(u)\,S(v)\,du\,dv \;+ a\int_{-\infty}^{\infty} S(u)\,S(u)\,du \quad , \qquad (20)$$

por lo demás (20) puede obtenerse directamente de (17) suponiendo que $C_r(u)$ asigna medida cero a todo intervalo que no contenga al origen en tanto que el punto $u = o$ tiene medida a.

En el caso mas general descompondremos la medida $C_r(u)$ en una parte contínua con densidad $\rho_r(u)$ y una discontínua que supondremos ser de la forma anteriormente considerada, es decir, con un solo salto en el origen.

Se obtiene así:

$$F[S(t)] = C_o(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} C_{os}(u)\, S(u)\,du \; +$$

$$+ \int\int_{-\infty}^{\infty} C_s(u-v)\, S(u)\, S(v)\,du\,dv + \int\int_{-\infty}^{\infty} S(u+v)\, S(v)\, \rho_r(u)\,du\,dv \; +$$

$$+ a\int_{-\infty}^{\infty} S(u)^2\,du \qquad . \qquad (21)$$

II

Podemos obtener fácilmente la ecuación de condición que debe cumplir $S(t)$ si se quiere hacer mínima la esperanza del error cuadrado. Un sencillo cálculo muestra que la derivada funcional de (21) puede expresarse en la forma

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial F[S]}{\partial S(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} [\,C_s(t-u) + \rho_r(t-u)\,]\; S(u)\,du + a\,S(t) \; -$$

$$- \; C_{os}(t) = 0 \qquad . \qquad (22)$$

Es facil ver que en rigor la parte singular que produce el término $a\,S(t)$ no puede tratarse por medio de distribuciones de ventanas. En efecto, basta hacer

$$a\,S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a\,\delta(t-u)\, S(u)\,du \quad ,$$

para escribir (22) en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa(t-u)\, S(u)\,du - C_{os}(t) = 0 \qquad (23)$$

con

$$\kappa(t) = C_s(t) + \rho_r(t) + a\,\delta(t) \quad , \qquad (24)$$

para notar que el kernel de la ecuación integral que determina S tiene impulsos. No es posible suponer que un impulso tiene variación lenta respecto a cualquier ventana físicamente realizable.

La dificultad, sin embargo, es mas bien de naturaleza matemática que de origen físico y proviene de la idealización que conduce al tercer término de (24). Porque si bien es cierto que no hay ventana físicamente realizable que sea rápida frente a un impulso, tambien es igualmente cierto que no existe ningún sistema físicamente realizable capaz de producir impulsos ni tampoco existe el sistema capaz de transmitirlos. Físicamente considerado, la teoría de circuitos es una versión simplificada de una categoria de fenómenos electromagnéticos, pero, pese a su innegable utilidad, tiene limitaciones bien conocidas. En particular sus resultados son falsos para señales tan rápidas que presentan un cambio porcentual apreciable en el tiempo que tarda la luz en atravesar el sistema.

Es pues punto menos que imposible esperar que en la práctica un filtro recibiera una señal $f_r(t)$ cuya distribución cumpliera realmente la ecuación (18). Si imaginamos algún dispositivo ideal que produjera tal tipo de ruido, bastaría la menor cantidad de transmisión por cualquier forma de materia para "abrir" la medida y producir una estadística en la cual

$$E\,[\,dF_r(u)\;dF_r(v)\,]$$

no se anula en cuanto u difiere de v. Es decir, lo que debe realmente esperarse es un kernel de la forma

$$\kappa(t) = C_s(t) + \rho_r(t) \quad , \qquad (25)$$

en el cual $\rho_r(t)$ cae rápidamente a ambos lados de $t = 0$ y además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_r(t)\,dt = a \quad . \qquad (26)$$

Si la señal es de tal forma que sea posible realizar ventanas con apertura muy pequeña comparada al tiempo en que $\rho_r(t)$ presenta variaciones apreciables, el argumento aplicado en el trabajo anterior tiene validez en este caso.

Basta entonces hacer

$$\left.\begin{aligned} \kappa(t) &= \kappa^{+}(t) * \kappa^{-}(t) \\ [C^{(+)}(t) + C^{(-)}(t)] * \kappa^{-}(t) &= C_{os}(t) \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

para obtener las ecuaciones que satisfagan las áreas de los lóbulos:

$$\sum_h \kappa^{+}(t_k - t_h)\, a_h = C^{(+)}(t_k) \qquad (28)$$

que determinan la distribución de ventanas. Se escogen así las áreas de manera que se anula la parte no previsible del error.

La ecuación general (10) puede tratarse de una manera semejante. Del mismo modo, los casos no estacionarios que den lugar a una potencia total finita o a una potencia media finita, permiten el mismo tratamiento. Sería ocioso repetir aquí los detalles que fueron expuestos en el trabajo citado[1].

REFERENCIAS

1. A. Medina, Rev.Mex. Fis. **6**, 81 (1957).
2. M.V. Cerrillo, Rev.Mex.Fis. **4**, 61 (1955).
   ibid. **5**, 71 (1956).
3. A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Theorie des Fonctions Aléatoires, Paris, 1953.