

SOBRE LA POSIBILIDAD DE OBSERVAR EXPERIMENTALMENTE  
EL EFECTO DE DIFRACCION EN EL TIEMPO

J. Goldemberg y H.M. Nussenzweig\*

Departamento de Física, Faculdade de Filosofia,  
Ciencias e Letras da Universidade de S. Paulo, Brasil.

(Recibido: Abril 22, 1957)

RESUMEN

*Mosbinsky's results<sup>1</sup> on "diffraction in time" are extended to the case of a rectangular pulse. Besides interference effects of the type studied by Mosbinsky, there appears also the well known quantum mechanical spreading effect. Rise time and monochromaticity requirements seem to preclude the possibility of experimental observation of the interference effects, so that they need not be taken into account in neutron velocity selectors. The detection of the spreading, which is subject to weaker requirements, would provide a direct test of the uncertainty relation.*

Sea un haz de partículas no relativistas (masa  $m$  número de onda  $k$ ) confinado en la región  $x < 0$  por medio de un obturador perfectamente absorbente.

---

\* Dirección actual CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FISICAS, RIO DE JANEIRO

Si en el instante  $t = 0$ , el obturador es removido, la función de onda  $\Psi(x,t)$  para  $t > 0$  será una solución de la ecuación de Schödinger que satisface las condiciones iniciales

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \exp(ikx) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

La solución de este problema ha sido dada por Moshinsky<sup>1</sup> bajo la forma

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\pi/4) \Psi_0(x,t) [F(\infty) - F(u)] \quad (2)$$

donde

$$\Psi_0(x,t) = \exp i [kx - (\hbar k^2/2m)t] \quad (3)$$

$$F(u) = \int_0^u \exp(i \frac{\pi}{2} \eta^2) d\eta$$

$$u = (2m/\hbar t)^{1/2} (x - vt); \quad v = \hbar k/m \quad (5)$$

La corriente transitoria  $J(x,t)$  es la suma de dos términos, uno de los cuales puede ser despreciado si  $x \gg \lambda = 2\pi/k$ ,<sup>1</sup> obteniendo

$$J(x,t)/J_0 = \frac{1}{2} |F(\infty) - F(u)|^2 \quad (6)$$

donde  $J_0 = v$  es la corriente incidente. La expresión (6) es idéntica a la difracción de Fresnel debido a un semiplano. Esta es la razón del nombre de "difracción en el tiempo" que se ha dado al fenómeno. La Fig. 1 muestra un esquema de  $J/J_0$  como función de tiempo para una  $x$  dada. La función de paso unitario con discontinuidad en  $T = x/v$  representa el efecto de acuerdo con la mecánica clásica (límite de "óptica clásica"). Para medir el "ancho" del efecto de difracción podemos tomar la diferencia  $\tau = t_2 - t_1$  entre los dos primeros tiempos, para los que pasa  $J/J_0$  por su valor clásico (véase Fig. 1). Este valor ha sido dado por Moshinsky<sup>1</sup> como:

$$\tau \cong 0.85 (x\hbar/mv^3)^{1/2} \quad (7)$$

Para neutrones de  $300^\circ \text{K}$  a una distancia  $x = 1 \text{ m}$ ,  $\tau \cong 2.7 \times 10^{-9} \text{ seg.}$ . Ya que los tiempos de este orden de magnitud pueden medirse, nos hacemos las siguientes preguntas:

1) Es el efecto de "difracción en el tiempo" observable con las técnicas de hoy en día?

2) De ser así, debe tomarse en cuenta en la operación de selectores de velocidad para neutrón?

Hay varios efectos que no se examinaron en el análisis anterior, y que deberían considerarse antes de intentar dar una respuesta a estas preguntas. Entre los efectos mas importantes están los siguientes:

- a) Forma del pulso de partículas.
- b) Cromaticidad en el haz incidente.

#### a) FORMA DEL PULSO DE PARTICULAS

Los resultados de Moshinsky son aplicables a un paquete de onda semi-infinito. En la práctica sin embargo, siempre tenemos que tratar con paquetes de onda de extensión finita. Consideremos el caso en el cual la forma inicial del paquete es un pulso rectangular de extensión  $l = v \Delta t$  (tal como podría producirse por un obturador infinitamente rápido que se mantuviese abierto durante el tiempo  $\Delta t$ ). Las condiciones iniciales (1) han de ser reemplazadas entonces por

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \exp(ikx) & \text{si } -l < x < 0 \\ 0 & \text{si } x < -l \text{ o } x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Estas condiciones pueden reescribirse como

$$\Psi(x,0) = \Psi_1(x,0) + \Psi_2(x,0) \quad (9)$$

$$\Psi_1(x,0) = \begin{cases} \exp(ikx) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} ; \quad \Psi_2(x,0) = \begin{cases} -\exp(ikx) & \text{si } x < -l \\ 0 & \text{si } x > -l \end{cases} \quad (10)$$

Las funciones de onda  $\Psi_1(x,t)$  y  $\Psi_2(x,t)$  se encuentran fácilmente con la ayuda de las ecuaciones (1) a (5). El resultado es

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\pi/4) \Psi_0(x,t) [F(u_2) - F(u_1)], \quad (11)$$

donde

$$u_1 = (2m/ht)^{1/2}(x-vt); \quad u_2 = (2m/ht)^{1/2}(x+l-vt) \quad (12)$$

y los otros símbolos retienen el significado dado en las ecuaciones (1) a (5). La corriente transitoria será otra vez la suma de dos términos, uno de los cuales puede ser despreciado si  $x \gg \lambda$ , dando

$$[J(x,t)/v] = \frac{1}{2} |F(u_2) - F(u_1)|^2 \quad (13)$$

Como pudiera esperarse, este resultado es idéntico al modelo de difracción de Fresnel para una rendija de "anchura numérica"

$$\Delta u = u_2 - u_1 = (2m/ht)^{1/2} l \quad (14)$$

En óptica, la "anchura numérica" es una medida del número de las "zonas de Fresnel" contenidas en la rendija. Su valor determina el carácter del esquema de difracción.

Para  $l \rightarrow \infty$ , las fórmulas arriba mencionadas reproducen los resultados de Moshinsky. Desde la Fig. 2 (a) hasta la Fig. 2 (f) se ilustra la evolución del fenómeno de difracción como una función de  $\Delta u$ . Ya que  $\Delta u$  disminuye en forma continua a medida que el tiempo crece, también pueden ser consideradas como etapas sucesivas que describen la propagación de un paquete de onda rectangular.

La Fig. 2(a) representa el resultado clásico ("óptica geométrica"), una réplica del pulso inicial que comienza en  $T_1 = x/v$  y termina en  $T_2 = T_1 + \Delta t$ . Para  $\Delta u \gg 1$  (Fig. 2 (b)), tenemos esencialmente una superposición de dos esquemas independientes de difracción de semiplano, esto es, el efecto de Moshinsky (Fig. 1) se repite al principio y al final del pulso. Para  $1 < \Delta u < 10$  (Figs. 2(c).

2(d)), el modelo muestra grandes oscilaciones que se deben a una interferencia entre las dos aristas del pulso. Estas oscilaciones son perceptibles aún en la región que sería de sombra en la aproximación de óptica geométrica. Sin embargo, la corriente promedio no se desvía mucho del valor clásico. Para  $\Delta u = 1$  (Fig. 2 (e)), el paquete de onda comienza a extenderse apreciablemente, con una consecuente reducción de amplitud. Estos efectos son mas notables conforme  $\Delta u$  disminuye (Fig. 2 (f)).

El ensanchamiento del paquete de onda para  $\Delta u \lesssim 1$  es una consecuencia directa del principio de incertidumbre. De hecho, la anchura inicial  $\Delta t$  del paquete corresponde a una indeterminación  $\Delta E$  de energía.

$$\Delta E = mv \Delta v \gtrsim \hbar / \Delta t \quad , \quad (15)$$

y esto da lugar, después de un tiempo  $t$  a un ensanchamiento

$$\Delta x \sim (\Delta v) t \gtrsim \hbar t / mv \Delta t = 1 / \pi (\Delta u)^2 \quad , \quad (16)$$

que comienza a tener importancia para  $\Delta u \lesssim 1$ . Este efecto establece un límite al grado de monocromaticidad que puede obtenerse con un selector de velocidad.

La cota inferior del ensanchamiento dada en la ecuación (16) obviamente no depende de la forma inicial del paquete. Es bien sabido, por ejemplo, que un paquete de onda con una probabilidad de distribución Gaussiana conserva su forma Gaussiana en propagación libre, pero sufre un ensanchamiento cuyo orden de magnitud<sup>2</sup> es el que acabamos de dar en (16). Por lo tanto, el ensanchamiento para  $\Delta u \ll 1$  es un efecto independiente de la forma.

Por otra parte, los efectos de interferencia que aparecen en las Figs. 2 (b), 2 (c), y 2 (d) son fuertemente dependientes de la forma. Las oscilaciones en el esquema están estrechamente conectadas con la existencia de "aristas" en el pulso inicial, esto es, con la suposición que los tiempos para abrir y cerrar el obturador son despreciables. "Redondear" las aristas tendrá como efecto el alisar las oscilaciones. Esto puede verse claramente en el ejemplo del paquete de onda Gaussiano citado anteriormente.

Para formular estas nociones con más precisión, llamemos a  $\tau_R$  el tiempo necesario para abrir el obturador en el pulso inicial. Entonces, con el fin de observar la anchura de difracción de Moshinsky, debemos tener:  $\tau_R \ll \tau$ . Igualmente, si deseamos observar los efectos de interferencia en la zona  $1 < \Delta u < 10$ , debemos tener  $\tau_R \ll \Delta t / \Delta u$ , i.e.  $\tau_R$  debe ser pequeño comparado con el espaciamento entre picos. Puede verse fácilmente que cualquiera de estas condiciones implica que

$$\tau_R \ll \hbar^{1/2} m^{1/4} x^{1/2} E^{-3/4} \quad (17)$$

donde  $E$  es la energía cinética de las partículas incidentes.

En el ejemplo citado anteriormente de neutrones de  $300^\circ \text{K}$  a una distancia  $x = 1 \text{ m}$ , debemos tener, de acuerdo con (17),  $\tau_R \ll 2.7 \times 10^{-9} \text{ seg.}$ , lo cual es imposible con un selector mecánico. Formar los pulsos de neutrones por medio de partículas cargadas sería un cambio desfavorable, ya que  $E$  aumentaría por un factor grande. Los resultados mejorarían disminuyendo la energía. Los neutrones "frios" podrían obtenerse por varios métodos (difracción de neutrones, empleo de sustancias moderadoras a bajas temperaturas, etc). Si admitimos que un haz de neutrones de  $20^\circ \text{K}$ , y de intensidad suficientemente alta puede producirse, esto significaría una ganancia por un factor de  $(15)^{3/4} \cong 7.6$ . La distancia  $x$  podría aumentarse quizás por un factor de 20, dando una ganancia adicional de  $(20)^{1/2} \cong 4.5$ . Esto nos llevaría a  $\tau_R \ll 10^{-7} \text{ seg.}$  Aún en este caso es muy dudoso que tales valores de tiempo  $\tau_R$  pudieran obtenerse por medio de un selector mecánico.

Otra posibilidad sería la de emplear iones pesados en lugar de neutrones. Para iones de  $\text{Rb}$  de  $0.1 \text{ ev}$  a una distancia  $x = 1 \text{ m}$ , encontramos:  $\tau_R \ll 3 \times 10^{-9} \text{ seg.}$  Como el pulso de iones puede formarse por medios electrónicos, podría quizás satisfacerse esta condición.

## b) CROMATICIDAD EN EL HAZ INCIDENTE

El haz incidente será, en general, una superposición de componentes no coherentes teniendo cierta distribución de velocidad, e.g., una distribución maxwelliana en el caso de neutrones térmicos. El "esquema de difracción" resultante es obte -

nible superponiendo los esquemas dados en (13) para cada valor (o pequeña zona de valores) de la velocidad. ¿Cómo afecta esto a los resultados obtenidos previamente?

Consideremos lo que resulta de superponer dos esquemas correspondiendo a velocidades  $v$  y  $v + \delta v$ . Para  $\delta v/v \ll 1$ , los dos esquemas tendrán prácticamente la misma forma, y lo único que debemos considerar es su desplazamiento relativo en la escala del tiempo.

Este desplazamiento está dado por

$$\delta t = T(v) - T(v + \delta v) = x/v - x/(v + \delta v) \cong T(v) \delta v/v \quad (18)$$

Si no deseamos "alisar" las oscilaciones por una superposición, debemos tener  $\delta t \ll \tau$  (para el efecto de Moshinsky) o  $\delta t \ll \Delta t/\Delta u$  (para  $1 < \Delta u < 10$ ). De esto se sigue, como en (17), que debemos satisfacer la condición

$$\delta v/v \cong \delta t/T(v) \ll \hbar^{1/2} m^{-1/4} x^{-1/2} E^{-1/4} \quad (19)$$

Para los neutrones de  $300^\circ \text{K}$ ,  $x = 1 \text{ m}$ , (19) nos da:  $\delta v/v \ll 6 \times 10^{-6}$ . Esto demandaría un grado de monocromaticidad que parece ser muy difícil de obtener. Difícilmente sería de utilidad el empleo de neutrones "fríos" debido al pequeño exponente con el cual aparece  $E$  en (19); aún con neutrones  $20^\circ \text{K}$ , ganaríamos menos que un factor de dos. Si, por otra parte, tratáramos de aumentar  $x^{-1/2}$  por un cierto factor, (17) disminuye por el mismo factor, lo cual no puede permitirse ya que  $\tau_R$  para neutrones es ya muy pequeño. Para iones de Rb de  $0.1 \text{ eV}$ ,  $x = 1 \text{ m}$ , encontramos  $\delta v/v \ll 1.4 \times 10^{-6}$ , lo cual es aún peor. Por lo tanto vemos que no podemos satisfacer simultáneamente las condiciones para el tiempo de apertura y para la monocromaticidad, expresados por las ecuaciones (17) y (19). Por lo tanto, el efecto de Moshinsky y los efectos de interferencia en la región  $1 < \Delta u < 10$  están fuera de la zona de posibilidades experimentales al presente.

Que se puede decir respecto al efecto de ensanchamiento? Averiguemos en primer lugar, si la región  $\Delta u \leq 1$  puede ser alcanzada. La ecuación (14) puede escribirse como sigue:

$$\Delta u \cong 0.95 \hbar^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} E^{\frac{3}{4}} \Delta t \quad (20)$$

Tomando el caso de un selector mecánico<sup>3</sup> muy bueno, en el cual  $x = 20 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 5 \times 10^{-7} \text{ seg.}$ , encontramos:  $\Delta u \cong 24$ . Por lo tanto, los selectores de velocidad de neutrones usuales operan en la región  $\Delta u \gg 1$ . Para obtener  $\Delta u = 1$ , para  $x = 20 \text{ m}$ , con neutrones de  $20^\circ \text{K}$ , deberíamos hacer  $\Delta t \cong 1.5 \times 10^{-7} \text{ seg.}$ . Este sería un problema difícil, pero no está lejos de lo que se ha realizado ya. Por otra parte, para iones Rb de  $300^\circ \text{K}$ ,  $x = 1 \text{ m}$ , necesitamos  $\Delta t \cong 1.4 \times 10^{-8} \text{ seg.}$ , para obtener  $\Delta u = 1$ . El tiempo de vuelo para este caso sería  $T \cong 4.1 \times 10^{-3} \text{ seg.}$ , de modo que este retraso tendría que medirse con una exactitud del orden de  $10^{-6}$ . Estos son requerimientos fuertes, pero parecen estar dentro de las posibilidades de técnicas electrónicas modernas. Naturalmente, las figuras arriba mencionadas sirven tan solo para ilustrar, y probablemente puede hacerse una elección mejor de los parámetros.

¿Suponiendo que  $\Delta u = \leq 1$  pueda obtenerse, como se afectará el problema por los efectos anteriores? Como hemos visto, la forma inicial no es crítica. ¿Qué sucede con la cromaticidad del haz incidente? De acuerdo con la ecuación (16), la cromaticidad que se origina en el experimento debido al principio de incertidumbres es

$$\Delta v/v \gtrsim \hbar/(E \Delta t) \sim \Delta t/[T(v) (\Delta u)^2] \quad (21)$$

Si deseamos distinguir el ensachamiento debido al principio de incertidumbre de aquel que se debe a la cromaticidad original del haz incidente, el último tiene que ser al menos del mismo orden que el anterior, i.e., debemos tener  $\delta v/v \gtrsim \Delta v/v$ . En el caso de nuestro último ejemplo, encontramos de la ecuación (21) que  $\Delta v/v \gtrsim 3.4 \times 10^{-6}$ . La ecuación (21) también muestra que  $\Delta v/v$  aumenta disminuyendo  $E$  o  $\Delta t$ . Por lo tanto, la detección del ensanchamiento debido al principio de incertidumbre no depende de requerimientos tan estrictos como la detección de los efectos de interferencia, pero sin embargo, requiere un haz incidente de monocromaticidad muy alta.

En conclusión, vemos que:



- 1) El efecto de Moshinsky y efectos de interferencia similares para  $1 < \Delta u < 10$  no parecen ser accesibles a las técnicas presentes. Obviamente entonces no deben ser tomados en consideración en la operación de selectores de velocidad de neutrones.
- 2) El detectar el ensanchamiento de un paquete de onda debido al principio de incertidumbre, con las técnicas experimentales modernas, parece ser un problema difícil, pero tal vez no imposible. Sería muy interesante un experimento de este tipo como observación de una solución transitoria de la ecuación de Schrödinger y como prueba directa de la relación de incertidumbre de Heisenberg.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su gratitud a los Profesores G. Beck y P. B. Smith por sus interesantes discusiones. Uno de nosotros (H.M.N.) agradece al Conselho Nacional de Pesquisas por concederle una beca.

#### REFERENCIAS

1. Moshinsky, M. Phys.Rev. 88, 625, (1952)
2. Schiff, L. I. "Quantum Mechanics", New York, McGraw Hill, 1a. ed., (1949) pags. 54 - 59.
3. Hughes, D.J. "Pile Neutron Research", Addison-Wesley Publishing Co., (1953) pags. 165-171.

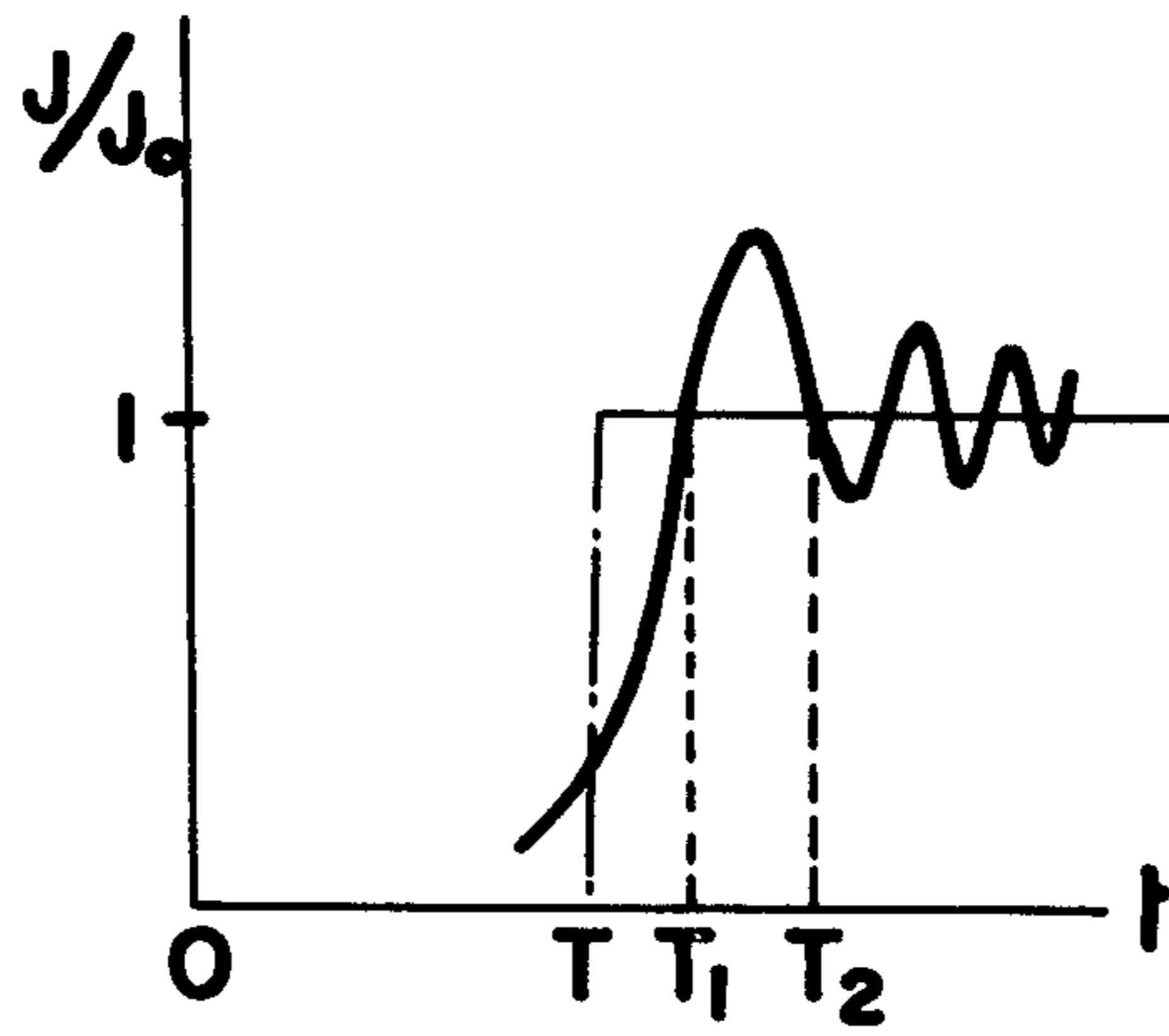


FIG. 1

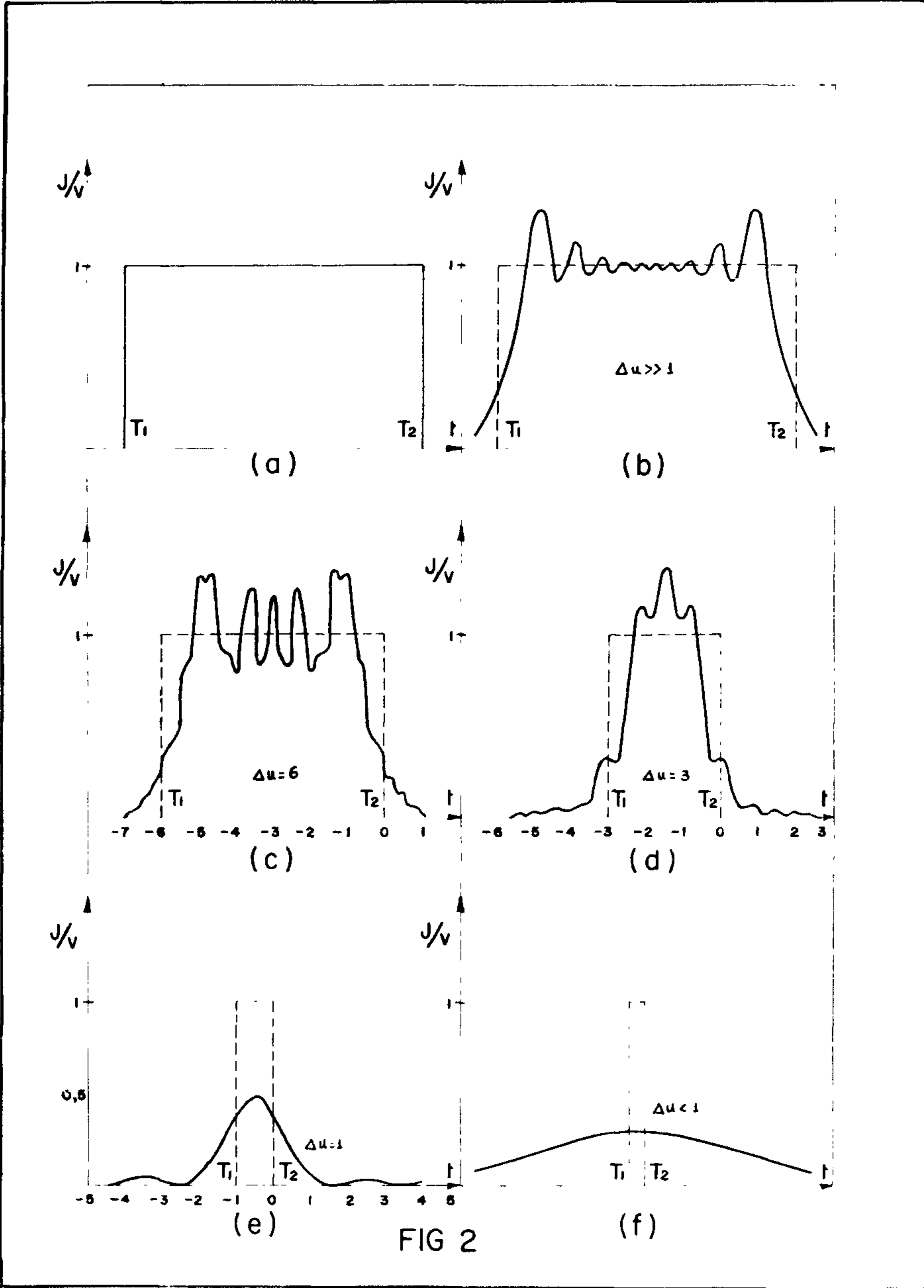


FIG 2

Esta página está intencionalmente en blanco