FUERZAS DE WIGNER Y EL MODELO DE CAPAS DEL NUCLEO

Mariano Bauer

Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido, Julio 6 1957)

RESUMEN

It is well known that velocity dependent forces or exchange forces (which could also be considered as a type of velocity dependent force), do not give the experimental level arrangement in nuclear shell theory. In particular, in the long range approximation, both velocity dependent forces and Majorana forces predict for configurations with an odd number of particles, that the ground state has an angular momentum J *which is the lowest compatible with the Pauli principle, and not* $J = j$, *where* j *is the angular momentum of the nucleons in the shell. The purpose of this paper is to see whether for Wigner forces (i.e. forces with no exchange character), the level arrangement is the experimental one for any range. We show that for the two particle configuration* $J = 0$ *will be the ground state independent-*

ly of the range of the Wigner forces. For the three particle congiguration in the $j = 5/2$ shell, the ground state is $J = 5/2$, but already in the $j = 7/2$ shell, the ground state is $J = 7/2$ only in the short range approximation. We conclude therefore, that the experimental level arrangement is related with the short range character of the nuclear forces, rather than with their velocity dependence or ex - change character.

I. INTRODUCCION

Experimentalmente se sabe que el momento angular total J del estado base de un núcleo corresponde a $J = 0$ si el número de nucleones es par, y a $J = j$*, donde j es el momento angular de un nucleón en la capa incompleta, si el número de nucleones es impar. Ahora bien, si se consideran interacciones entre nucleones ya sea dependientes de la velocidad [1] o de Majorana [2] (que también son una forma de fuerzas dependientes de la velocidad), no siempre se obtienen los resultados experimentales. Por ejemplo, para largo alcance y en el caso de un número impar de nucleones fuera de capa cerrada, estas interacciones predicen para el estado base un momento angular total J que corresponde a la menor de las J posibles, compatible con el principio de Pauli.

El propósito del presente trabajo es ver si, considerando sólo fuerzas de Wigner en la interacción entre pares de nucleones, se pueden obtener los resultados que fija la experiencia, independientemente del alcance de la fuerza de interacción.

II. ACOPLAMIENTO DE DOS NUCLEONES FUERA DE CAPA

Considerando dos nucleones (neutrones ó protones) fuera de capa cerrada y una interacción entre ellos del tipo:

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \sum_k V_k(r_1, r_2)\, P_k(\cos\omega) \qquad (1)$$

---

*Hay excepciones a esta última regla, pero están asociadas a efectos colectivos en los núcleos.

donde $P_k(\cos\omega)$ es un polinomio de Legendre. Nos proponemos calcular los elementos de matriz de $V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ que nos dan el corrimiento de los niveles de energía correspondiente a cada valor de J.

Bajo la hipótesis de que los nucleones se mueven en un potencial común, y de que la interacción spin-órbita es fuerte, se tiene el siguiente Hamiltoniano, para un nucleón:

$$[-\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + V_c(r) + \xi(r)\ \boldsymbol{L}.\boldsymbol{S}] \quad , \tag{2}$$

cuyas eigenfunciones son de la forma

$$\psi = r^{-1} f_{jl}(E,r)\ \mathcal{Y}^m_{jl\,1/2}(\theta,\varphi,\sigma) \quad , \tag{3}$$

donde

$$\mathcal{Y}^m_{jl\frac{1}{2}}(\theta,\varphi,\sigma) = \sum_{m_l m_s} \langle l\ 1/2\ m_l m_s | jm\rangle Y_{lm_l}(\theta,\varphi)\ \delta_{\sigma m_s} \tag{4}$$

y $\langle l\ ^1/_2\ m_l\ m_s | jm\rangle$ es un coeficiente de Clebsch-Gordan[3].

En el caso de dos nucleones, la función:

$$|n_1 j_1 l_1; n_2 j_2 l_2; JM\rangle = r_1^{-1} R_{n_1 j_1 l_1}(r_1)\ r_2^{-1} R_{n_2 j_2 l_2}(r_2) \ . \tag{5}$$

$$\cdot \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2\ m_1 m_2 | JM\rangle\ \mathcal{Y}^{m_1}_{j_1 l_1 \frac{1}{2}}(\theta_1,\varphi_1,\sigma_1)\ \mathcal{Y}^{m_2}_{j_2 l_2 \frac{1}{2}}(\theta_2,\varphi_2,\sigma_2),$$

será eigenfunción del operador de momento angular total del sistema $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ donde $\boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{S}_2$; y también de la componente z de $\boldsymbol{J}$ i.e. $J_z = J_{1z} + J_{2z}$. Entonces, al introducir la interacción entre los nucleones como una perturbación, tendremos que evaluar los elementos de matriz:

$$\langle n'_1 l'_1 j'_1; n'_2 l'_2 j'_2 ; JM | V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) | n_1 l_1 j_1 ; n_2 l_2 j_2 ; JM\rangle . \tag{6}$$

El elemento de matriz es diagonal en JM ya que $r_{12} = |r_1 - r_2|$ es invariante frente a una rotación de todo el sistema.

Introduciendo (1) y (5) en (6), el elemento de matriz se descompone en una parte radial y otra angular. Esta última es directamente expresable en términos de coeficientes de Clebsch-Gordan y de Racah[4]:

$$< | V(| r_1 - r_2 |) | > = \sum_k R^k (n'_1 j'_1 l'_1 \,;\, n'_2 j'_2 l'_2 \,;\, n_1 j_1 l_1 \,;\, n_2 j_2 l_2) .$$

$$< j'_1 l'_1 ; j'_2 l'_2 ; JM | \; P_k(\cos\omega) \; | j_1 l_1 ; j_2 l_2 ; JM > , \qquad (7)$$

donde

$$R^k(\;) = \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \bar{R}_{n'_1 j'_1 l'_1}(r_1) \, \bar{R}_{n'_2 j'_2 l'_2}(r_2) \, V_k \, R_{n_1 j_1 l_1}(r_1) \, R_{n_2 j_2 l_2}(r_2) \} \, dr_1 \, dr_2 . \qquad (8)$$

Utilizando la siguiente propiedad:

$$P_k(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{\mu=-k}^{k} \bar{Y}_{k\mu}(\theta_2, \varphi_2) \, Y_{k,\mu}(\theta_1, \varphi_1) =$$

$$= \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{\mu=-k}^{k} (-1)^{\mu} \, Y_{k\mu}(\theta_1, \varphi_1) \, Y_{k,-\mu}(\theta_2, \varphi_2) , \qquad (9)$$

i.e. $P_k(\cos\omega)$ se expresa como el producto escalar de dos tensores de Racah[4]. Entonces:

$$< | P_k(\cos\omega) | > = \frac{4\pi}{2k+1} \; < j'_1 l'_1 ; j'_2 l'_2 ; JM | \; \mathbf{Y}^{(k)}(1) . \mathbf{Y}^{(k)}(2) \; | j_1 l_1 ; j_2 l_2 ; JM > =$$

$$= \frac{4\pi}{2k+1} (-1)^{j'_1 + j_2 - J} < j'_1 l'_1 || Y^{(k)} || j_1 l_1 > < j'_2 l'_2 || Y^{(k)} || j_2 l_2 >$$

$$W(j'_1 j'_2 j_1 j_2 ; Jk) , \qquad (10)$$

por la ec. (38) de la referencia 4. El seudo elemento de matriz $<j'_1 l'_1 || Y^{(k)} || j_1 l_1>$ está tomado en un esquema $L^2, S_1^2, J_1^2, J_{1z}$ con $J_1 = L_1 + S_1$. Siendo $Y^{(k)}$ un armónico esférico, conmuta con el operador de spin S y podemos aplicar el resultado (44a) (ref. 4), obteniendo:

$$< l'_1 \tfrac{1}{2} \; j'_1 || Y^{(k)} || l_1 \; \tfrac{1}{2} \; j_1> =$$

$$= (-1)^{1/2 + k - l_1 - j'_1} < l'_1 || Y^{(k)} || l_1> [(2j'_1+1)(2j_1+1)]^{1/2} \, W(l'_1 j'_1 l_1 j_1; \tfrac{1}{2} k), \tag{11}$$

donde $< l'_1 || Y^{(k)} || l_1>$ es el seudo elemento de matriz relativo únicamente al operador L_1 y cuyo valor es:

$$< l'_1 || Y^{(k)} || l_1> = (-1)^{k - l_1} \left[\frac{(2k+1)(2l_1+1)(2l'_1+1)}{4\pi} \right]^{1/2} V(k l_1 l'_1; 000), \tag{12}$$

de donde $< l'_1 || Y^{(k)} || l_1> \neq 0$ solo si $k + l_1 + l'_1$ es par. Se tienen expresiones análogas a (11) y (12) para $< j'_2 l'_2 || Y^{(k)} || j_2 l_2 >$.

Para el presente trabajo nos interesa el caso de dos nucleones en la misma capa, i.e. $n_1 = n_2 = n$, $j_1 = j_2 = j$, $l_1 = l_2 = l$.

La eigenfunción correspondiente es:

$$| nlj; nlj; JM> = r_1^{-1} R_{nlj}(r_1) \, r_2^{-1} R_{nlj}(r_2) \, \cdot$$

$$\cdot \sum_{m_1 m_2} < jj m_1 m_2 | JM> \, \mathcal{Y}^{m_1}_{jl\frac{1}{2}} (\theta_1, \varphi_1, \sigma_1) \, \mathcal{Y}^{m_2}_{jl\frac{1}{2}} (\theta_2, \varphi_2, \sigma_2). \tag{13}$$

Si la eigenfunción representa dos nucleones idénticos, debe ser antisimétrica de lo que se concluye que J es par [2,5].

Por las expresiones (7), (8) y (10), se tiene:

$$< nlj; nlj; JM | V(|r_1 - r_2|) | nlj; nlj; JM> =$$

$$= - \sum_k F^k \frac{4\pi}{2k+1} [< jl \,||\, Y^{(k)} \,||\, jl>]^2 \; W(jjjj;Jk) \tag{14}$$

donde J es par y k también es par por (12). F^k está definida por:

$$F_k = \iint_0^\infty R^2_{nlj}(r_1)\, R^2_{nlj}(r_2)\, V_k(r_1,r_2)\, dr_1 dr_2 \tag{15}$$

De la expresión (14) se tiene que la disposición relativa de los niveles de energía depende de la parte radial F^k y del coeficiente de Racah $W(jjjj;Jk)$. Más aún, conociendo las características de F^k, podemos determinar a partir de los coeficientes de Racah cuál es el momento angular asociado con el estado base.

En efecto, supongamos $F^k < 0$ y hagamos:

$$f^k = \frac{4\pi}{(2k+1)(2j+1)} \; F^k \, [<jl \,||\, Y^{(k)} \,||\, jl>]^2 \; . \tag{16}$$

Sustituyendo en (14) se tiene:

$$<| V(| r_1 - r_2 |) |> = \sum_k f^k (-1)(2j+1) \; W(jjjj;Jk) \; . \tag{17}$$

Ahora bien, es fácil demostrar que[6]·

$$(-1)(2j+1) \; W(jjjj;0k) = 1 \qquad .$$

Por otra parte, de (20a ref. 4), se sigue que:

$$\sum_{j'} (2j'+1)(2j+1) \; [W(jj'jj;Jk)]^2 = 1 \quad ,$$

de donde, si $J \neq 0$, el término $j' = j$ satisface la relación:

$$(2j+1)(2j+1) \; [W(jjjj;Jk)]^2 < 1 \quad ,$$

o bien

$$|(-1)(2j+1)\ W(jjjj;Jk)| < 1 \quad .$$

Se tiene entonces:

$$-W(jjjj;Jk) \quad < \quad -W(jjjj;0k) \quad ,$$

i.e. se obtiene un corrimiento mayor del nivel para el momento angular $J = 0$. Como hemos supuesto $f^k < 0$, el nivel más bajo o sea el estado base corres - ponderá a $J = 0$.

Vamos a justificar ahora la suposición $f^k < 0$ en el caso de un potencial atractivo de Yukawa, viendo que se cumple independientemente del alcance de las fuerzas. Sea:

$$V(r) = -V_o \frac{e^{-(r/r_o)}}{(r/r_o)} \quad , \tag{18}$$

r : distancia entre los dos nucleones; r_o : alcance. Se utiliza la relación siguiente:

$$\frac{e^{ikr}}{ikr} = \sum_{k=o}^{\infty} (2k+1)\ P_k(\cos\omega)\ j_k(kr_<)\ h_k(kr_>) \quad ,$$

$r_<$: el menor de r_1 y r_2 ; $r_>$: el mayor de r_1 y r_2 ,

j_k : función de Bessel, esférica,

h_k : función de Hankel esférica.

Haciendo $ik = -r_o^{-1}$ tendremos:

$$-\frac{e^{-(r/r_o)}}{(r/r_o)} = \sum_{k=o}^{\infty} (2k+1)\ P_k(\cos\omega)\ j_k\left(\frac{ir_<}{r_o}\right)\ h_k\left(\frac{ir_>}{r_o}\right) \quad . \tag{19}$$

De (14) y (19) vemos que $f^k < 0$, si $j_k \cdot h_k < 0$. Tenemos las siguientes definiciones:

$$j_k(z) = 2^k z^k \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m (k+m)!}{m!\,(2k+2m+1)!} \, z^{2m}$$

$$h_k(z) = \frac{e^{iz}}{iz} \, i^{-k} \sum_{m=o}^{o} \frac{(k+m)!}{m!\,(k-m)!} \left(\frac{i}{2z}\right)^m \qquad \text{para} \quad z > 0 \; .$$

Haciendo $z = iy$, $y > 0$, tenemos

$$j_k(iy) = 2^k i^k y^k \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m (k+m)!}{m!\,(2k+2m+1)!} \, i^{2m} y^{2m} = i^k \, | j_k(iy) | \quad ,$$

$$h_k(iy) = -\frac{e^{-y}}{y} \, i^{-k} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(k+m)!}{m!\,(k-m)!} \left(\frac{1}{2y}\right)^m = -i^{-k} \, | h_k(iy) | \quad ,$$

y se sigue que:

$$j_k(iy)\, h_k(iy) = - \, | j_k(y) | \, | h_k(iy) |$$

relación que se cumple cuando la variable y difiera en j_k y h_k .

En forma análoga se puede demostrar también que para un potencial gaussiano todas las f^k tienen el mismo signo; son negativas si el potencial es atractivo.

III. ACOPLAMIENTO DE TRES NUCLEONES FUERA DE CAPA CERRADA .

El elemento de matriz de $V = \sum_{i<j} V(r_{ij})$ con respecto a tres nucleones en la misma capa puede expresarse en función del elemento de matriz correspondiente a dos partículas solamente en la forma siguiente (ec. 33a ref. 7) :

$$\langle (n l j)^3 JM \mid \sum_{i<j} V(r_{ij}) \mid (nlj)^3 JM \rangle =$$

$$= 3 \sum_{J'} [\langle j^2 (J'), j \alpha J \mid \} j^3 \alpha J \rangle]^2 \langle (nlj)^2 J'M' \mid V(r_{12}) \mid (nlj)^2 J'M' \rangle. \quad (20)$$

$\langle j^2 (J'), j \alpha J \mid \} j^3 \alpha J \rangle$ **es el llamado coeficiente de precedencia fraccional. Introduciendo (14) en (20) se tiene:**

$$\langle (nlj)^3 JM \mid \sum_{i<j} V(r_{ij}) \mid (nlj)^3 JM \rangle =$$

$$= -3 \sum_{k} \sum_{J'} F^k \frac{4\pi}{2k+1} [\langle jl \| Y^{(k)} \| jl \rangle]^2 [\langle j^2 (J'), j\alpha J \mid \} j^3 \alpha J \rangle]^2 W(jjjj; J'k), \quad (21)$$

De la ecuación (11) se tiene:

$$\langle jl \| Y^{(k)} \| jl \rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+k-l-j} (-1)^{k-l} \left[\frac{2k+1}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}} (2l+1)(2j+1) V(kll;000) W(ljlj; \tfrac{1}{2}k)$$

y definiendo:

$$H'(ljk) = (2k+1)^{-1} [\langle ll00 \mid k0 \rangle]^2 [(2l+1)(2j+1) - k(k+1)] =$$

$$= (2l+1)^2 (2j+1)^2 [V(llk;000) W(ljlj; \tfrac{1}{2}k)]^2 , \quad (22)$$

se obtiene finalmente:

$$\langle (nlj)^3 JM \mid \sum_{i<j} V(r_{ij}) \mid (nlj)^3 JM \rangle =$$

$$= \sum_k F^k(nlj) \{ \sum_{J'} (-3) H'(ljk) W(jjjj; J'k) [\langle j^2 (J') j \alpha J \mid \} j^3 \alpha J \rangle]^2 \}. (23)$$

El coeficiente $H'(ljk)$ cumple las siguientes propiedades[1]:

$$H'(lj0) = 2j+1; \quad \frac{H'(ljk+2)}{H'(ljk)} = \left[\frac{k+1}{k+2}\right]^2 \frac{(2j+1)^2 - (k+2)^2}{(2j+1)^2 - (k+1)^2} \quad (24)$$

Vamos a calcular explícitamente los elementos de matriz (23) en los casos particulares: 1) tres nucleones en la capa $j = 5/2$; 2) tres nucleones en la capa $j = 7/2$.

1) Tres nucleones en la capa $j = 5/2$.

Los coeficientes de precedencia fraccional han sido evaluados [1] por medio de la expresión que de ellos dan Schwartz y de-Shalit[8].

Se obtienen en este caso los siguientes resultados:

$$E_{3/2} = 3\,F^{\circ} - \frac{12}{5.49}\,F^{2} - \frac{255}{5.441}\,F^{4}$$

$$E_{5/2} = 3\,F^{\circ} \tag{25}$$

$$E_{9/2} = 3\,F^{\circ} - \frac{312}{5.5.49}\,F^{2} - \frac{30}{441}\,F^{4}$$

Como se ha demostrado que las F^k son negativas para un potencial atractivo, se ve que el nivel más bajo (estado base) corresponde a $J = j = 5/2$, de acuerdo con la experiencia, independientemente del alcance de la fuerza de interacción.

2) Tres nucleones en la capa $j = 7/2$.

Los coeficientes de precedencia fraccional para este caso están expresados en la tabla I.

Tabla I. Coeficiente de precedencia fraccional $[\langle (7/2)^2\,(J')\,7/2\,J\,|\}(7/2)^3 J\rangle]^2$ para la capa $j = 7/2$.

J' \ J	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	15/2
0	0	0	1/4	0	0	0
2	$\frac{3}{14}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{7.18}$	$\frac{5}{18}$	0
4	$\frac{11}{14}$	$\frac{2}{3.11}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{50}{7.11}$	$\frac{13}{6.11}$	$\frac{5}{22}$
6	0	$\frac{65}{11.18}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{49}{11.18}$	$\frac{104}{11.18}$	$\frac{17}{22}$

Utilizando la tabla I, se obtiene para la energía de interacción los resultados siguientes:

$$
\begin{aligned}
E_{3/2} &= 3F^{\circ} - \frac{17}{3.7^2}\, F^2 + \frac{3}{11.7^2}\, F^4 - \frac{25}{3.11.13}\, F^6 \,, \\
E_{5/2} &= 3F^{\circ} + \frac{1}{9}\, F^2 - \frac{91}{7.11^2}\, F^4 - \frac{23.25}{3^2\, 11^2\, 13}\, F^6 \,, \\
E_{7/2} &= 3F^{\circ} + \frac{5}{7.9}\, F^2 + \frac{3}{7.11}\, F^4 + \frac{25}{3^2.11.13}\, F^6 \,, \qquad (26) \\
E_{9/2} &= 3F^{\circ} - \frac{79}{3^2.7^2}\, F^2 - \frac{93}{7^2.11^2}\, F^4 - \frac{25.331}{3^2.11^2.13^2}\, F^6 , \\
E_{11/2} &= 3F^{\circ} - \frac{5}{3^2.7}\, F^2 - \frac{73}{7.11^2}\, F^4 - \frac{25.17}{3^2.11^2.13}\, F^6 \\
E_{15/2} &= 3F^{\circ} - \frac{5}{3.7}\, F^2 - \frac{3.23}{7.11^2}\, F^4 - \frac{41.25}{3.11^2.13^2}\, F^6 \,,
\end{aligned}
$$

En este caso, no podemos decidir, con la simple suposición de que las F^k tienen el mismo signo, cual es el nivel más bajo. Intervienen ya las magnitudes de las F^k. Más aún, si vamos ahora a la aproximación de largo alcance, sabemos que F^{k+2} es mucho menor que F^k ; considerando entonces las energías hasta el término en F^2 (puesto que el término en F° no rompe la degeneración), vemos que el nivel más bajo corresponde a $J = 5/2$, contrario a la experiencia.

En cambio, si vamos a la aproximación de corto alcance, haciendo en (28) $F^k = (2k+1)\, F$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
E_{3/2} &= \frac{12}{7}\, F & \qquad E_{9/2} &= \frac{1380}{7.11.13}\, F \\
E_{5/2} &= \frac{68}{3.11}\, F & \qquad E_{11/2} &= \frac{332}{3.7.11}\, F \\
E_{7/2} &= 4\, F & \qquad E_{15/2} &= \frac{860}{7.11.13}\, F
\end{aligned}
$$

El nivel más bajo corresponde ahora a $J = 7/2$, como debe ser.

IV. CONCLUSION

Los resultados obtenidos son los siguientes: al considerarse sólo fuerzas de Wigner en la interacción entre pares de nucleones, únicamente en el caso de dos partículas fuera de capa cerrada se obtiene, independientemente del alcance de la fuerza, el resultado que fija la experiencia, esto es, que el estado base corresponde a un momento angular total $J = 0$. Para tres nucleones fuera de capa cerrada, el momento angular total del estado base no es independiente de los valores de los coeficientes de Slater F^k Además, al considerar ya las F^k , aparece una primera discrepancia con la experiencia en la capa $j = 7/2$, al tomar la aproximación de largo alcance.

El autor hace patente su agradecimiento al Dr. Marcos Moshinsky por su constante ayuda a lo largo del presente trabajo.

REFERENCIAS

1) M. Moshinsky, Phys.Rev. *106*, 117 (1957).
2) Elementary theory of nuclear shell structure, M. Goeppert Mayer y J.H.D. Jensen (John Wiley & Sons, New York, 1955).
3) The theory of atomic spectra, E.U. Condon y G.H. Shortley (Cambridge University Press, 1953).
4) G. Racah, Phys.Rev. *62*, 438 (1942).
5) M. Bauer, Tésis, U.N.A.M. (1955).
6) L.C. Biedenharn, J.M. Blatt, y M.E. Rose, Rev. Mod. Phys. *24*, 252 (1952).
7) G. Racah, Phys.Rev. *63*, 367 (1943).
8) C. Schwartz y A. de-Shalit, Phys.Rev. *94*, 1257 (1954).