SOLUCIONES DE LA ECUACION DE BHABHA PARA UNA PARTICULA LIBRE

Fernando E. Prieto

Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México
e Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Octubre 15, 1957)

RESUMEN

The purpose of this paper is to obtain the free particle solutions of Bhabha equation for a particle with two different states of mass and spin. Of the twelve independent solutions, four correspond to states of spin 1/2 , and eight correspond to states of spin 3/2. The 20 components solutions are expressed as five vectors and each component of these vectors are linear combinations of free particle solutions of Dirac equation.

I. INTRODUCCION

En un trabajo reciente, Bhabha[1] ha introducido una ecuación relativista que describe a una partícula con dos estados posibles, uno con masa m y spin 3/2 y el otro con masa λ m y spin 1/2, siendo λ una constante real arbitraria. Esta ecuación es de la forma

$$(\alpha^{\mu} p_{\mu} + m)\, \psi = 0 \qquad \text{I. 1}$$

en la que ψ es una función de onda de 20 componentes y las α^{μ} son matrices 20 x 20. La aplicación de esta ecuación a procesos en los que intervienen partículas de spin 1/2 (con un posible estado virtual de spin 3/2) se ha dificultado por el hecho de que las reglas de conmutación de las α^{μ} son complicadas y de difícil manipulación.

Posteriormente Gupta[2] ha hecho ver que es posible obtener una representación de las matrices de Bhabha α^{μ} en términos de las matrices de Dirac γ^{μ}, cuya manipulación es mucho mas sencilla que la de las primeras, y en cuyo caso la función de onda queda descrita en términos de cuadriespinores de Dirac ψ^k y ψ. Mas todavía, Gupta demostró que para el estado de spin 3/2 la ecuación de Bhabha se reduce a la ecuación de Rarita-Schwinger para una partícula de spin 3/2.

El propósito de este trabajo es encontrar las soluciones de la ecuación de Bhabha para una partícula libre, las cuales son de gran utilidad para el cálculo de elementos de matriz de procesos en los que intervienen partículas descritas por dicha ecuación.

La Lagrangiana propuesta por Gupta es

$$L = -(\bar{\psi}^k p_l \gamma^l + m)\psi_k + \tfrac{1}{2}\bar{\psi}^k (p^l \gamma_k + \gamma^l p_k)\psi_l - \tfrac{1}{3}\bar{\psi}^k \gamma_k (p_l \gamma^l - m) - \gamma^n \psi_n -$$
$$- \bar{\psi}(p_k \gamma^k + \lambda m)\psi - d(\bar{\psi} p_k \psi^k + \bar{\psi}^k p_k \psi) \qquad \text{I.2}$$

en la que d y λ son constantes reales. $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^{0}$ y ψ son cuadriespines de Dirac, las cantidades ψ^k (k = 0,1,2,3,) tienen las propiedades de transformación de los cuadriespinores de Dirac y de los tensores de primer rango; las γ^{μ} son las bien conocidas matrices de Dirac que satisfacen la regla de conmutación

$$\gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k = 2 g^{kl} \qquad \text{I.3}$$

finalmente

$$p_\mu = - i \frac{\partial}{\partial x^\mu} , X^0 = t , X^1 = x, X^2 = y, X^3 = z \qquad \text{I.4}$$

Con la métrica

$$g^{00} = - g^{11} = - g^{22} = - g^{33} = 1 , g^{kl} = 0 \text{ para } k \neq l \qquad \text{I.5}$$

y en una representación con γ^0 diagonal, las matrices de Dirac son

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{I.6}$$

Por variación de la Lagrangiana I.2 se obtienen las ecuaciones de movi - miento

$$(p_l \gamma^l + m)\psi_k - \tfrac{1}{3}(p^l \gamma_k + p_k \gamma^l)\psi_l + \tfrac{1}{3}\psi_k (p_l \gamma^l - m)\gamma^n \psi_n + d\, p_k \psi = 0 \qquad \text{I.7}$$

$$(p_k \gamma^k + \lambda m) - d\, p_k \psi^k = 0 \quad . \qquad \text{I.8}$$

La función de ondas de 20 componentes es*

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi \end{vmatrix} \equiv \{ \psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi \} \qquad \text{I.9}$$

*Convendremos en escribir los vectores en columna de forma horizontal, y el paréntesis de llave denotará su caracter de vector columna.

$$(p_l \gamma^l + m)\psi_k + d(1+\lambda)\,(p_k + \lambda\, m\, \gamma_k)\,\psi = 0 \qquad \text{I.10}$$

$$p_k\, \psi^k = 0 \qquad \text{I.11}$$

$$\gamma_k\, \psi^k = -3d\, \lambda\psi \qquad \text{I.12}$$

$$(p_k\, \gamma^k + \lambda\, m)\, \psi = 0 \qquad \text{I.13}$$

En el estado de spin 3/2, $\psi \equiv 0$,, y las ecuaciones anteriores se reducen a

$$(p_l\, \gamma^l + m)\, \psi^k = 0 \qquad \text{I.14}$$

con las condiciones

$$p_k\, \psi^k = 0 \qquad \text{I.15}$$

$$\gamma_k\, \psi^k = 0 \qquad \text{I.16}$$

y la función de onda es de la forma

$$\psi\,(\text{spin } 3/2) = \{\, \psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3, 0 \,\} \qquad \text{I.17}$$

Para el estado con masa de reposo λm y spin 1/2, las funciones ψ^k pueden expresarse en términos de ψ por

$$\psi^k = -\frac{d}{m}\,(p^k + \lambda\, m\, \gamma^k)\, \psi \qquad \text{I.18}$$

con ψ solución de

$$(p_k\, \gamma^k + \lambda\, m)\, \psi = 0 \qquad \text{I.19}$$

y las ecuaciones I.10 , I.11, I.12, se satisfacen automáticamente.

La función de onda es entonces de la forma

$$\psi\,(\text{spin } 1/2) = \{\ \psi^{0}, \psi^{1}, \psi^{2}, \psi^{3}, \psi \}\quad . \qquad \text{I.20}$$

Para el estado de spin 1/2, la densidad de carga es

$$j^{0}\,(\text{spin } 1/2) = \bar{\psi}\ \gamma^{0}\,\psi \quad . \qquad \text{I.21}$$

Para el estado de spin 3/2, la densidad de carga es

$$j^{0}\,(\text{spin } 3/2) = -\bar{\psi}^{k}\ \gamma^{\circ}\,\gamma_{k} \quad . \qquad \text{I.22}$$

II. SOLUCIONES DE LA ECUACION DE DIRAC

Para encontrar las soluciones correspondientes a ambos estados con spin 1/2 y 3/2, se requiere conocer primero las soluciones de la ecuación de Dirac para una partícula libre.

$$(\gamma^{\mu}\,p_{\mu} + m)\,\psi = 0 \qquad \text{II.1}$$

Sea

$$\psi\,(r\,,\,t) = \phi(p)\ e^{\,i\,p_{\mu}X^{\mu}} = \phi\,(p)\ e^{\,i\,p_{o}\,t\,+\,i\,p\,.\,r} \qquad \text{II.2}$$

y puesto que $p_{\mu} = -i\,\dfrac{\partial}{\partial\,x^{\mu}}$, la ecuación II.1 puede expresarse en términos de las componentes del impulso $p_{\mu} = [\,p_{o} = E,\, p_{1} = p_{x}\,,\, p_{2} = p_{y},\, p_{3} = p_{z}\,]$, y resulta la ecuación

$$(\gamma^{\circ}\ E + \gamma^{j}\,p_{j} + m)\ \phi = 0 \quad . \qquad \text{II.3}$$

Las soluciones de esta ecuación pueden obtenerse sin ninguna dificultad y son:

$$\phi(p,1) = A(\boldsymbol{p}, 1, m)\ \{ p_z, p_x + i p_y, E_{p1} + m, 0 \} \qquad \text{II.4}$$

$$\phi(\boldsymbol{r},2) = A(\boldsymbol{p}, 2, m)\ \{ p_x - i p_y, -p_z, 0, E_{p2} + m \} \qquad \text{II.5}$$

para energía positiva, y

$$\phi(\boldsymbol{p},3) = B(\boldsymbol{p}, 3, m)\ \{ E_{p3} - m, 0, p_z, p_x + i p_y \} \qquad \text{II.6}$$

$$\phi(\boldsymbol{p},4) = B(\boldsymbol{p}, 4, m)\ \{ 0, E_{p4} - m, p_x - i p_y, - p_z \} \qquad \text{II.7}$$

para energía negativa.

Para impulsos polarizados en la dirección positiva del eje z, las soluciones correspondientes son

$$\varphi(\boldsymbol{p}, 1, m) = A(p_z, 1, m)\ \{ p_z, 0, E_{p1} + m, 0 \} \qquad \text{II.8}$$

$$\varphi(\boldsymbol{p}, 2, m) = A(p_z, 2, m)\ \{ 0, - p_z, 0, E_{p2} + m \} \qquad \text{II.9}$$

$$\varphi(\boldsymbol{p}, 3, m) = B(p_z, 3, m)\ \{ E_{p3} - m, 0, p_z, 0 \} \qquad \text{II.10}$$

$$\varphi(\boldsymbol{p}, 4, m) = B(p_z, 4, m)\ \{ 0, E_{p4} - m, 0, - p_z \} \qquad \text{II.11}$$

con

$$A(\boldsymbol{p}, s, m) = (\boldsymbol{p}^2 + [E_+ + m]^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad s = 1, 2 \qquad \text{II.12}$$

$$B(\boldsymbol{p}, s, m) = (\boldsymbol{p}^2 + [E_- - m]^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad s = 3, 4 \quad . \qquad \text{II.13}$$

III. SOLUCIONES PARA EL ESTADO DE SPIN 1/2

La función de onda es

$$\Psi = \{ \psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi \} \qquad \text{III.1}$$

con

$$\psi^k = - \frac{d}{m} (p^k + \lambda m \gamma^k) \psi \qquad \text{III.2}$$

y ψ solución de

$$(p_k \gamma^k + \lambda m) \psi = 0 \qquad \text{III.3}$$

Para una partícula libre

$$\psi^k = \phi^k e^{i p_\mu X^\mu} \qquad \psi = \phi e^{i p_\mu X^\mu} \qquad \text{III.4}$$

Sean

$$A = [\boldsymbol{p}^2 + (E_+ + \lambda m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$B = [\boldsymbol{p}^2 + (E_- - \lambda m)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{III.5}$$

las cuatro soluciones de III.3 son entonces

$$\phi(\boldsymbol{p}, 1) = \frac{1}{A} \{ p_z, p_x + i p_y, E_{p1} + \lambda m, 0 \} \qquad \text{III.6}$$

$$\phi(\boldsymbol{p}, 2) = \frac{1}{A} \{ p_x - i p_y, - p_z, E_{p2} + \lambda m \} \qquad \text{III.7}$$

para energía positiva, y

$$\phi(\boldsymbol{p}, 3) = \frac{1}{B} \{ E_{p3} - \lambda m, 0, p_z, p_x + p_y \} \qquad \text{III.8}$$

$$\phi(\boldsymbol{p},4) = \frac{1}{B} \{ 0, E_{p4} - \lambda m, p_x - i p_y, - p_z \} \qquad \text{III.9}$$

para energía negativa.

Por III.2 y III.4 se tiene

$$\psi^{0} = -\frac{d}{m}(p^{0} + \lambda m\, \gamma^{0})\psi \qquad \psi^{1} = -\frac{d}{m}(p^{1} + \lambda m\, \gamma^{1})\psi$$

$$\psi^{2} = -\frac{d}{m}(p^{2} + \lambda m\, \gamma^{0})\psi \qquad \psi^{3} = -\frac{d}{m}(p^{3} + \lambda m\, \gamma^{3})\psi \qquad \text{III.10}$$

se obtiene

$$\phi^{0} = -\frac{d}{m}(E + \lambda m\, \gamma^{0})\phi \qquad \phi^{1} = -\frac{d}{m}(-p_x + \lambda m\, \gamma^{1})\phi$$

$$\phi^{2} = -\frac{d}{m}(-p_y + \lambda m\, \gamma^{2})\phi \qquad \phi^{3} = -\frac{d}{m}(-p_z + \lambda m\, \gamma^{3})\phi\,, \qquad \text{III.11}$$

y para impulso polarizado en la dirección positiva del eje z

$$\phi^{0} = -\frac{d}{m}(E + \lambda m\, \gamma^{0})\phi \qquad \phi^{1} = -d\,\lambda\gamma^{1}\phi$$

$$\phi^{2} = -d\,\lambda\gamma^{2}\phi \qquad \phi^{3} = -\frac{d}{m}(-p_z + \lambda m\, \gamma^{3})\phi\ . \qquad \text{III.12}$$

Las componentes de $\phi(p,1)$ son:

$$\phi^{0}(p,1) = -\frac{d}{A}\frac{p_z}{m}\{E_{p1} + \lambda m, 0, p_z, 0\} \qquad \text{III.13}$$

$$\phi^{1}(p,1) = \frac{d\lambda}{A}\{0, E_{p1} + \lambda m, 0, -p_z\} \qquad \text{III,14}$$

$$\phi^{2}(p,1) = \frac{i d\lambda}{A}\{0, E_{p1} + \lambda m, 0, -p_z\} \qquad \text{III.15}$$

$$\phi^{3}(p,1) = \frac{d}{A}\frac{E_{p1}}{m}\{E_{p1} + \lambda m, 0, p_z, 0\} \qquad \text{III.16}$$

$$\phi(p,1) = \frac{1}{A}\{p_z, 0, E_{p1} + \lambda m, 0\}\ . \qquad \text{III.17}$$

Las componentes de ϕ (p,2) son:

$$\phi^{o}(p,2) = \frac{d}{A}\frac{p_z}{m}\{0, E_{p2}+\lambda m, 0, -p_z\} \tag{III.18}$$

$$\phi^{1}(p,2) = \frac{d\lambda}{A}\{E_{p2}+\lambda m, 0, p_z, 0\} \tag{III.19}$$

$$\phi^{2}(p,2) = -\frac{id\lambda}{A}\{E_{p2}+\lambda m, 0, p_z, 0\} \tag{III.20}$$

$$\phi^{3}(p,2) = -\frac{d}{A}\frac{E_{p2}}{m}\{0, E_{p2}+\lambda m, 0, -p_z\} \tag{III.21}$$

$$\phi(p,2) = \frac{1}{A}\{0, -p_z, 0, E_{p2}+\lambda m\} \tag{III.22}$$

Las componentes de ϕ (p,3) son:

$$\phi^{o}(p,3) = -\frac{d}{B}\frac{p_z}{m}\{p_z, 0, E_{p3}-\lambda m, 0\} \tag{III.23}$$

$$\phi^{1}(p,3) = -\frac{d\lambda}{B}\{0, -p_z, 0, E_{p3}-\lambda m\} \tag{III.24}$$

$$\phi^{2}(p,3) = -\frac{id\lambda}{B}\{0, -p_z, 0, E_{p3}-\lambda m\} \tag{III.25}$$

$$\phi^{3}(p,3) = \frac{d}{B}\frac{E_{p3}}{m}\{p_z, 0, E_{p3}-\lambda m, 0,\} \tag{III.26}$$

$$\phi(p,3) = \frac{1}{B}\{E_{p3}-\lambda m, 0, p_z, 0\} \tag{III.27}$$

Las componentes de ϕ(p,4) son:

$$\phi^{o}(p,4) = \frac{d}{B}\frac{p_z}{m}\{0, -p_z, 0, E_{p4}-\lambda m\} \tag{III.28}$$

$$\phi^{1}(p,4) = -\frac{d\lambda}{B}\{p_z, 0, E_{p4}-\lambda m, 0\} \tag{III.29}$$

$$\phi^2\,(p,4) = \frac{i\,d\lambda}{B}\,\{\,p_z\,,\,0,\,E_{p4} - \lambda m,\,0\,\} \qquad \text{III.30}$$

$$\phi^3\,(p,4) = -\frac{d}{B}\,\frac{E_{p4}}{m}\,\{\,0 - p_z\,,\,0,\,E_{p4} - \lambda m\} \qquad \text{III.31}$$

$$\phi\,(p,4) = \frac{1}{B}\{\,0,\,E_{p4} - \lambda m,\,0,\,-\,p_z\,\} \quad . \qquad \text{III.32}$$

Sean

$$\eta_1\,(p,s) = \frac{1}{A\,(p,\,s,\,\lambda m)}\,\{\,E_{p1} + \lambda m,\,0,\,p_z\,,\,0\,\} \qquad \text{III.33}$$

$$\eta_2\,(p,s) = \frac{1}{A\,(p,\,s,\,\lambda m)}\{\,0,\,E_{p2} + \lambda m,\,0,\mp p_z\,\} \qquad \text{III.34}$$

$$\eta_3\,(p,\,s) = \frac{1}{B\,(p,\,s,\,\lambda m)}\{p_z\,,\,0,\,E_{p3} - \lambda m,\,0\,\} \qquad \text{III.35}$$

$$\eta_4(p,\,s) = \frac{1}{B\,(p,\,s,\,\lambda m)}\,\{\,0 - p_z\,,\,0,\,E_{p4} - \lambda m\,\} \quad , \qquad \text{III.36}$$

con:

$$A\,(p,\,s,\,\lambda\,m) = [\,p^2 + (E_{ps} + \lambda m)^2\,]^{+\frac{1}{2}} \quad s = 1,2$$

$$B\,(p,\,s,\,\lambda m) = [p^2 + (E_{ps} - \lambda m)^2\,]^{+\frac{1}{2}} \quad s = 3,4 \quad ,$$

y

$$\phi(p,\,s) = [\,\varphi^0\,(p,\,s),\,\varphi^1(p,\,s),\,\varphi^2\,(p,\,s),\,\varphi^3\,(p,\,s),\,\varphi\,(p,\,s)\,] \quad . \qquad \text{III.37}$$

Las soluciones para el estado de spin 1/2 son entonces

$$\phi_I(p,1) = [\frac{dp_z}{m}\,\eta_1\,(p,1),\,d\lambda\eta_2\,(p,1),\,i\,d\,\lambda\eta_2\,(p,1),$$

$$,\frac{d\,E_{p1}}{m}\,\eta_1\,(p,1);\,\varphi(p,\,1,\,\lambda m)\,] \qquad \text{III.38}$$

$$\phi_{II}(\mathbf{p},2) = [\frac{dp_z}{m}\eta_2(\mathbf{p},2),\ d\lambda\eta_1(\mathbf{p},2),\ -id\lambda\eta_1(\mathbf{p},2),\ -\frac{dE_{p2}}{m}\eta_2(\mathbf{p},2);$$

$$;\ \varphi(\mathbf{p},2,\lambda m)\ ] \qquad \text{III.39}$$

$$\phi_{III}(\mathbf{p},3) = [\ -\frac{dp_z}{m}\eta_3(\mathbf{p},3),\ -d\lambda\eta_4(\mathbf{p},3),\ -id\lambda\eta_4(\mathbf{p},3),$$

$$,\ \frac{dE_{p3}}{m}\eta_3(\mathbf{p},3)\ \varphi(\mathbf{p},3,\lambda m)\ ] \qquad \text{III.40}$$

$$\phi_{IV}(\mathbf{p},3) = [\frac{dp_z}{m}\eta_4(\mathbf{p},4),\ -d\lambda\eta_3(\mathbf{p},4),\ id\lambda\eta_3(\mathbf{p},4),\ -\frac{dE_{p4}}{m}\eta_4(\mathbf{p},4);$$

$$;\ \varphi(\mathbf{p},4,\lambda m)\ ]\ . \qquad \text{III.41}$$

Es fácil ver que para las cuatro soluciones se cumple

$$\bar{\psi}^{\mu}\gamma^{o}\psi_{\mu} = \bar{\phi}^{\mu}(\mathbf{p},s)\gamma^{o}\phi_{\mu}(\mathbf{p},s) = \phi^{\mu\,\dagger}(\mathbf{p},s)\phi_{\mu}(\mathbf{p},s) = -3d^2\lambda^2 \qquad \text{III.42}$$

de modo que

$$j^{o}(\text{spin } 1/2) = \bar{\psi}\gamma^{o}\psi = \phi^{\dagger}(\mathbf{p},s)\,\varphi(\mathbf{p},s) = 1 \qquad \text{III.43}$$

Es conveniente expresar las soluciones en términos de los vectores de polarización

$$\mathbf{c}_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{i}{\sqrt{2}},0]\quad \mathbf{c}_2 = [\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{i}{\sqrt{2}},0]\quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{p}}{p} = [0,0,1] \qquad \text{III.44}$$

entonces las soluciones son

$$\phi(\mathbf{p},1) = [\ -\frac{dp_z}{m}\eta_1(\mathbf{p},1),$$

$$,\ \sqrt{2}\,d\lambda\mathbf{c}_1\eta_2(\mathbf{p},1) + \frac{dp_{p\perp}}{m}\mathbf{c}_3\eta_1(\mathbf{p},1);\ \varphi(\mathbf{p},1,\lambda m)\ ] \qquad \text{III.45}$$

$$\phi(p,2) = [\frac{d\,p_z}{m}\eta_2\,(p,2)$$

$$,\ \sqrt{2}\,d\lambda c_2\,\eta_1\,(p,2) - \frac{d\,E_{p2}}{m}\,c_3\eta_2\,(p,2)\ ;\quad \varphi\,(p,2,\lambda m)\ ] \qquad \text{III.46}$$

$$\phi(p,3) = [\ -\frac{d\,p_z}{m}\eta_3\,(p,3),$$

$$,\ -\sqrt{2}\,d\,\lambda\,c_1\,\eta_4(p,3)\ + \frac{d\,E_{p3}}{m}\,c_3\,\eta_3\,(p,3);\quad \varphi\,(p,3,\lambda\,m)\ ] \qquad \text{III.47}$$

$$\phi\,(p,4) = [\frac{d\,p_z}{m}\,\eta_4(p,4),$$

$$,\ -\sqrt{2}\,d\,\lambda\,c_2\,\eta_3\,(p,4) - \frac{d\,E_{p4}}{m}\,c_3\,\eta_4(p,4);\quad \varphi\,(p,4,\lambda m)\ ]\ . \qquad \text{III.48}$$

IV. ECUACIONES PARA EL ESTADO DE SPIN 3/2

Ya se ha visto anteriormente que para el estado de spin 3/2 $\psi \equiv 0$, y las ψ^l deben verificar las ecuaciones

$$(p_k\,\gamma^l + m)\,\psi^k = 0 \qquad \text{IV.1}$$

junto con las condiciones

$$p_k\,\psi^k = 0 \qquad \text{IV.2}$$

$$\gamma_k\,\psi^k = 0 \qquad . \qquad \text{IV.3}$$

Para impulso polarizado en la dirección positiva del eje z la ecuación IV.1 da el sistema

$$(E+m)\ \varphi_1^l - p_z\ \varphi_3^l = 0$$

$$(E+m)\ \varphi_2^l + p_z\ \varphi_4^l = 0 \qquad \text{IV.4}$$

$$p_z\ \varphi_1^l - (E-m)\ \varphi_3^l = 0$$

$$p_z\ \varphi_2^l + (E-m)\ \varphi_4^l = 0$$

que deben verificar las componentes de cada uno de los cuadriespinores ψ^l que forman la función de onda.

De la condición IV.2 resulta que las componentes de φ^o y φ^3 deben cumplir las condiciones

$$E\ \varphi_1^0 + p_z\ \varphi_1^3 = 0$$

$$E\ \varphi_2^0 + p_z\ \varphi_2^3 = 0 \qquad \text{IV.5}$$

$$E\ \varphi_3^0 + p_z\ \varphi_3^3 = 0$$

$$E\ \varphi_4^0 + p_z\ \varphi_4^3 = 0$$

en tanto que la condición IV.3 conduce al sistema de ecuaciones

$$\varphi_1^0 + \varphi_4^1 - i\ \varphi_4^2 + \varphi_3^3 = 0$$

$$\varphi_2^0 + \varphi_3^1 + i\ \varphi_3^2 - \varphi_4^3 = 0 \qquad \text{IV.6}$$

$$-\varphi_3^0 - \varphi_2^1 + i\ \varphi_2^2 - \varphi_1^3 = 0$$

$$-\varphi_4^0 - \varphi_1^1 - i\ \varphi_1^2 + \varphi_2^3 = 0$$

El problema consiste pues en encontrar un conjunto de cuatro cuadriespinores que sean soluciones de la ecuación de Dirac, o sea, cuyas componentes verifiquen el sistema IV.4, y que además verifiquen las ecuaciones IV.5 y IV.6.

V. SOLUCIONES PARA EL ESTADO DE SPIN 3/2 Y ENERGIA POSITIVA

Propondremos como solución para las ψ^l una combinación lineal de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Dirac para energía positiva

$$\xi_1 = \{ p_z, 0, E + m, 0 \}$$
$$\xi_2 = \{ 0 - p_z, 0, E + m \} \qquad \text{V.1}$$

del tipo

$$\varphi^0 = (a^0 \xi_1 + b^0 \xi_2)\, p_z, \; \varphi^1 = a^1 \xi_1 + b^1 \xi_2 ;$$
$$; \varphi^2 = a^2 \xi_1 + b^2 \xi_2 ; \; \varphi^3 = (a^3 \xi_1 + b^3 \xi_2)\, E \quad , \qquad \text{V,2}$$

las cuales obviamente satisfacen el sistema de ecuaciones IV.4.

Las ecuaciones IV.5 y IV.6 se transforman entonces en un sistema de ecuaciones en los coeficientes a^l y b^l ; de IV. 5 resultan las condiciones

$$a^0 p_z^2 + (E + m)(b^1 - i b^2) + a^3 E (E + m) = 0$$
$$a^0 (E + m) - (b^1 - i b^2) + a^3 E = 0 \qquad \text{V.3}$$
$$a^0 + a^3 = 0$$

y

$$b^0 p_z^2 - (E + m)(a^1 + i a^2) + b^3 E (E + m) = 0$$
$$b^0 (E + m) + (a^1 + i a^2) + b^3 E = 0 \qquad \text{V.4}$$

$$b^0 + b^3 = 0 \qquad \text{V.4}$$

Las soluciones de este último sistema de ecuaciones se obtienen de las soluciones de V.3 haciendo las sustituciones

$$a^0 \to b^0 \qquad a^3 \to b^3 \qquad b^1 \to -a^1 \qquad ib^2 \to ia^2 \quad . \qquad \text{V.5}$$

De V. 3 resulta

$$a^0 = \frac{b^1 - ib^2}{m} = -a^3 \qquad \text{V.6}$$

y por V.5 se tiene

$$b^0 = -\frac{a^1 + ia^2}{m} = -b^3 \qquad . \qquad \text{V.7}$$

Ahora bien, como los sistemas V.3 y V.4 son independientes, se tendrá un conjunto de soluciones para $a_1 = a^2 = 0$, $b_1, b^2 \neq 0$ y otro para $b^1 = b^2 = a^1, a^2 \neq 0$. Las soluciones correspondientes son

$$\varphi^0 = \frac{b^1 - ib^2}{m} \xi_1 p_z \quad \varphi^1 = b^1 \xi_2 \quad \varphi^2 = b^2 \xi_2 \quad \varphi^3 = -\frac{b^1 - ib^2}{m} \xi_1 E \quad \text{V.8}$$

y

$$\varphi^0 = -\frac{a^1 + ia^2}{m} \xi_2 p_z \quad \varphi^1 = a^1 \xi_1 \quad \varphi^2 = a^2 \xi_1 \quad \varphi^3 = \frac{a^1 + ia^2}{m} \xi_2 E \quad .\text{V.9}$$

Podemos además suponer que todos los coeficientes son números reales o imaginarios puros, pues si fueran números complejos, la parte imaginaria o real de dichos coeficientes debería satisfacer necesariamente las mismas relaciones que las correspondientes partes reales (o imaginarias), de manera que una solución con coeficientes complejos resultaría como una combinación lineal de las soluciones con coeficientes reales o imaginarios puros.

Es inmediato que hay dos casos posibles según que $b^1 - ib^2$ sea o no nulo, en el primer caso, se tiene la solución:

$$\varphi_I^0 = 0 \quad \varphi_I^1 = i b_I^2 \, \xi_2 \qquad \varphi_I^2 = b_I^2 \, \xi_2 \quad \varphi_I^3 = 0 \tag{V.10}$$

y en el segundo caso resulta

$$\varphi_{II}^0 = \frac{b_{II}^1 - i b_{II}^2}{m} \xi_1 p_z \, , \; \varphi_{II}^1 = b_{II}^1 \xi_2 \, , \; \varphi_{II}^1 = b_{II}^2 \xi_2$$

$$\varphi_{II}^3 = - \frac{b_{II}^1 - i b_{II}^2}{m} \xi_1 E \quad . \tag{V.11}$$

Imponiendo además la condición de que ambas soluciones sean ortonormales, se tiene

$$\varphi_I^0 = 0 \quad \varphi_I^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(p, 2, m)$$

$$\varphi_I^2 = - \frac{i}{\sqrt{2}} \varphi(p, 2, m) \quad \varphi_I^3 = 0 \tag{V.12}$$

$$\varphi_{II}^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_z}{m} \varphi(p, 1, m) \quad \varphi_{II}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi(p, 2, m)$$

$$\varphi_{II}^2 = \frac{i}{\sqrt{6}} \varphi(p, 2, m) \quad \varphi_{II}^3 = - \sqrt{\frac{2}{3}} \varphi(p, 1, m) \quad . \tag{V.13}$$

Las soluciones del tipo V.9 pueden obtenerse en forma enteramente análoga y son:

$$\varphi_{III}^0 = 0 \quad \varphi_{III}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(p, 1, m)$$

$$\varphi_{III}^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \varphi(p, 1, m) \quad \varphi_{III}^3 = 0 \tag{V.14}$$

y

$$\varphi_{IV}^0 = - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_z}{m} \varphi(p, 2, m) \quad \varphi_{IV}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi(p, 1, m) \quad \varphi_{IV}^2 = -$$

$$- \frac{i}{\sqrt{6}} \varphi(p, 1, m) \quad \varphi^3_{IV} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{E}{m} \varphi(p, 2, m) \quad . \qquad V.15$$

En términos de los vectores de polarización e_1, e_2, e_3 definidos en III.42, las cuatro soluciones linealmente independientes para spin 3/2 y energía positiva son

$$\phi^+_I = [0, e_2 \ \varphi(p, 2, m) ; 0] \qquad V.16$$

$$\phi^+_{II} = [\sqrt{\tfrac{2}{3}} \frac{p_z}{m} \varphi(p, 1, m), \frac{e_1}{\sqrt{3}} \varphi(p, 2, m) - e_3 \sqrt{\tfrac{2}{3}} \frac{E}{m} \varphi(p, 1, m) ; 0] \qquad V.17$$

$$\phi^+_{III} = [0, e_1 \ \varphi(p, 1, m) ; 0] \qquad V.18$$

$$\phi^+_{IV} = [-\sqrt{\tfrac{2}{3}} \frac{p_z}{m} \varphi(p, 2, \lambda m), \frac{e_2}{\sqrt{3}} \varphi(p, 1, \lambda m) + e_3 \sqrt{\tfrac{2}{3}} \frac{E}{m} \varphi(p, 2, \lambda m); 0]. \qquad V.19$$

VI. SOLUCIONES PARA EL ESTADO DE SPIN 3/2 Y ENERGIA NEGATIVA

Proponemos ahora como solución para las ψ^l una combinación lineal de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Dirac para energía negativa

$$\xi_3 = \{E - m, 0, p_z, 0\} \quad \xi_4 = \{0, E - m, 0, -p_z\} , \qquad VI.1$$

del tipo

$$\varphi^0 = (g^0 \xi_3 + h^0 \xi_4) p_z ; \quad \varphi^1 = g^1 \xi_3 + h^1 \xi_4 ;$$
$$; \varphi^2 = g^2 \xi_3 + h^2 \xi_4 ; \quad \varphi^3 = (g^3 \xi_3 + h^3 \xi_4) E \qquad VI.2$$

las cuales satisfacen desde luego el sistema de ecuaciones IV.4.

Las condiciones IV.5 conducen ahora al sistema de ecuaciones

$$g^0 p_z^2 + (E - m)(h^1 - ih^2) + g^3 E(E - m) = 0$$

$$g^0 (E - m) - (h^1 - ih^2) + g^3 E = 0 \qquad \text{VI.3}$$

$$g^0 + g^3 = 0 \quad ,$$

y

$$h^0 p_z^2 - (E - m)(g^1 + ig^2) + h^3 E(E - m) = 0$$

$$h^0 (E - m) + (g^1 + ig^2) + h^3 E = 0 \qquad \text{VI.4}$$

$$h^0 + h^3 = 0 \quad .$$

Las soluciones de éste último sistema se obtienen de las soluciones de VI.3 haciendo las sustituciones

$$g^0 \to h^0 \qquad g^3 \to h^3 \qquad h^1 \to -g^1 \qquad ih^2 \to ig^2 \qquad \text{VI.5}$$

De VI.3 resulta

$$g^0 = -\frac{g^1 - ih^2}{m} = -g^3 \quad , \qquad \text{VI.6}$$

y por VI.5 se tiene

$$h^0 = \frac{g^1 + ig^2}{m} = -h^3 \quad . \qquad \text{VI.7}$$

Las soluciones correspondientes a $g^1 = g^2 = 0$, $h^1, h^2 \neq 0$, y a $h^1 = h^2 = 0$, $g^1, g^2 \neq 0$ son respectivamente

$$\varphi^0 = -\frac{h^1 - ih^2}{m} \xi_3 p_z \quad \varphi^1 = h^1 \xi_4$$

$$\varphi^2 = h^2 \xi_4 \qquad \varphi^3 = \frac{h^1 - ih^2}{m} \xi_3 E \tag{VI.8}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= \frac{g^1 + ig^2}{m} \xi_4 p_z \qquad \varphi^1 = g^1 \xi_3 \\ \varphi^2 &= g^2 \xi_3 \qquad \varphi^3 = -\frac{g^1 + ig^2}{m} \xi_4 E \end{aligned} \tag{VI.9}$$

Para soluciones del tipo VI.8, si $h^1 - ih^2 = 0$ se tiene la solución

$$\varphi_I^0 = 0 \qquad \varphi_I^1 = i h_I^2 \xi_4 \qquad \varphi_I^2 = h_I^2 \xi_4 \qquad \varphi_I^3 = 0 \tag{VI.10}$$

y con $h^1 = ih^2 \neq 0$ resulta

$$\begin{aligned} \varphi_{II}^0 &= -\frac{h_{II}^1 - ih_{II}^2}{m} \xi_3 p_z \qquad \varphi_{II}^1 = h_{II}^1 \xi_4 \\ \varphi_{II}^2 &= h_{II}^2 \xi_4 \qquad \varphi_{II}^3 = \frac{h_{II}^1 - ih_{II}^2}{m} \xi_3 E \end{aligned} \tag{VI.11}$$

las soluciones ortogonales son:

$$\begin{aligned} \varphi_I^1 &= 0 \qquad \varphi_I^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(p,4,m) \\ \varphi_{II}^2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \varphi(p,4,m) \qquad \varphi_I^3 = 0 \end{aligned} \tag{VI.12}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{II}^0 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_z}{m} \varphi(p,3,m) \qquad \varphi_{II}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi(p,4,m) \\ \varphi_{II}^2 &= \frac{i}{\sqrt{6}} \varphi(p,4,m) \qquad \varphi_{II}^3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \varphi(p,3,m) \end{aligned} \tag{VI.13}$$

Procediendo en forma análoga para obtener las soluciones del tipo VI.9, resulta

$$\varphi^0_{III} = 0 \quad \varphi^1_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi(p,3,m) \quad \varphi^2_{III} = \frac{i}{\sqrt{2}}\,\varphi(p,3,m) \quad \varphi^3_{III} = 0 \qquad \text{VI.14}$$

$$\varphi^0_{IV} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{p_z}{m}\,\varphi^1_{IV} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\varphi(p,3,m)$$

$$\varphi^2_{IV} = \frac{i}{\sqrt{6}}\,\varphi(p,3,m) \quad \varphi^3_{IV} = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{E}{m}\,\varphi(p,4,m) \quad . \qquad \text{VI.15}$$

Usando nuevamente los vectores de polarización, las cuatro soluciones para energía negativa y spin 3/2 pueden escribirse en la forma

$$\varphi^-_I = [\,0, c_2\ \varphi(p,4,m)\,;\,0\,] \qquad \text{VI.16}$$

$$\varphi^-_{II} = [\,-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{p_z}{m}\,\varphi(p,3,m)\,\frac{c_1}{\sqrt{3}}\,\varphi(p,4,m)\ + \qquad \text{VI.17}$$

$$+\ c_3\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{E}{m}\,\varphi(p,3,m)\,;\,0\,]$$

$$\varphi^-_{III} = [\,0,\ c_1\ \varphi(p,3,m)\,;\,0\,] \qquad \text{VI.18}$$

$$\varphi^-_{IV} = [\,\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{p_z}{m}\,\varphi(p,4,m)\,\frac{c_2}{\sqrt{3}}\,\varphi(p,3,m)\ - \qquad \text{VI.19}$$

$$-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,c_3\,\frac{E}{m}\,\varphi(p,4,m)\,;\,0\,] \quad .$$

REFERENCIAS

1. H. J. Bhabha, Phil.Mag. **43**, 33 (1952); Rev.Mod.Phys. **21**, 451 (1949).
2. K. K. Gupta, Proc.Roy.Soc. **A 222**, 118 (1954).