FUERZAS NUCLEARES CON CENTRO REPULSIVO Y EL MODELO DE CAPAS DEL NUCLEO. EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN

Marcos Moshinsky

Instituto de Física, Universidad de México
Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Octubre 20 ,1957)

RESUMEN

In a recent paper, Bauer and Moshinsky showed that in nuclear shell theory, the effect of a hard core in the interaction potential between nucleons, could be eliminated by a simple translation, and instead, there appeared to first order the potential $4\pi(\hbar^2 a/m)\,\delta(r)$, *where* a *is the range of the hard core and* m *the mass of the nucleon. Using the same method, the perturbation introduced by a hard core is calculated in this paper up to second order in* a. *We obtain explicitly the perturbation energy in case the common potential is an harmonic oscillator, and we show that the effect of a hard core up to second order, still agress with that of the*

δ *function potential given above. We compare this result with the analysis that Huang and Yang give for free particles interacting through a hard core potential.*

I INTRODUCCION

En un trabajo reciente, Bauer y Moshinsky[1] analizaron el efecto que la presencia de un centro repulsivo en las fuerzas entre nucleones, tiene sobre el modelo de capas del nucleo. El punto esencial en el análisis fué el de mostrar que en la ecuación para la parte radial de la función de onda, podía eliminarse el centro repulsivo por una simple translación. La ecuación resultante de la translación contenía un término que podía tomarse como una perturbación, y su efecto, a primer orden, era equivalente al de un potencial delta del tipo $4\pi(\hbar^2 a/m)\,\delta(\mathbf{r})$ donde a es el alcance del centro repulsivo de la fuerza nuclear y m la masa del nucleón.

El objeto del presente trabajo es el de analizar los efectos del centro repulsivo hasta segundo orden.

Utilizaremos en adelante la notación del trabajo anterior (excepto que sustituiremos los índices primos n', l', E' por n, l, E) que designaremos por I, y al hacer referencia explícita a ecuaciones de ese trabajo, lo haremos agregando I al número de la ecuación.

Se discutió en I el problema de dos nucleones en un potencial común del tipo de oscilador harmónico, suponiendo que la interacción entre los dos nucleones contuviera un centro repulsivo. Se indicó que era conveniente pasar del sistema de coordenadas $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ de los dos nucleones a las coordenadas relativas $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ y de centro de masa $\mathbf{r}'' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$, y de que, si la interacción estaba dada exclusivamente por un centro repulsivo del alcance a, la ecuación radial en r' tomaba la forma:

$$[-(\hbar^2/m)(d^2/dr'^2) + U_l(r')]\; R_l = E\, R_l \quad , \tag{1}$$

donde

$$U_l(r) = (\hbar^2/m)\; l(l+1)\; (r')^{-2} + \tfrac{1}{4}\, m\,\omega^2\,(r')^2 \quad , \tag{2}$$

y r' está restringida a $a \leqslant r' \leqslant \infty$. La función radial satisfacía además, la condición:

$$R_l\,(a) = 0 \tag{3}$$

Haciendo el cambio variable,

$$r' = r + a \tag{4}$$

la ecuación (1) puede escribirse como

$$\{ -(\hbar^2/m)\,(d^2/dr^2) + U_l\,(r) + [\,U_l\,(r+a) - U_l\,(r)\,]\}\,R_l = E\,R_l\ , \tag{5}$$

donde ahora r está en el intervalo $0 \leqslant r \leqslant \infty$. A su vez, de (3) y (4), R_l, considerada como función de r satisface

$$R_l\,(0) = 0 \tag{6}$$

Los eigenvalores E del problema (5), (6) son claramente idénticos a los del problema (1), (3), pero la ventaja de la última formulación es que podemos considerar, para a suficientemente pequeña, a los términos en el paréntesis cuadrado como una perturbación. Desarrollamos el paréntesis cuadrado en potencias de a y obtenemos

$$U_l\,(r+a) - U_l\,(r) = a\,(d\,U_l/\,dr)$$
$$+ (a^2/2)\,(d^2\,U_l/\,dr^2) - a^3\,(\hbar^2/m)\ l\,(l+1)\ (4r+3a)\ r^{-4}(r+a)^{-2}\quad , \tag{7}$$

donde el último término de orden a^3 es el residuo del desarrollo.

De la conocida teoría de perturbaciones[2] y de (7), vemos que, hasta segundo orden, la energía toma la forma:

$$E = E_{nl} + a\int_0^\infty R_{nl}\,(r)\,(dU_l/dr)\,R_{nl}\,(r)\,dr$$
$$+ a^2\left\{ \tfrac{1}{2}\int_0^\infty R_{nl}\,(r)\ (d^2U_l/dr^2)\ R_{nl}\,(r)\ dr \right.$$
$$\left. + {\sum_p}' \left[\frac{\int_0^\infty R_{nl}\,(dU_l/dr)\,R_{pl}\,dr\ \int_0^\infty R_{pl}\ (dU_l/dr)\ R_{nl}\,dr}{(E_{nl} - E_{pl})} \right] \right\} + \ldots \tag{8}$$

aonde $E_{nl} = \hbar\,\omega\,(2n + l + 3/2)$ y $R_{nl}(r)$ es la función no perturbada del oscilador harmónico tridimensional, que satisface en todo el intervalo $0 \leqslant r \leqslant \infty$ la ecuación:

$$[-(\hbar^2/m)(d^2/dr^2) + U_l(r)]\ R_{nl} = E_{nl}\, R_{nl} \quad , \tag{9}$$

y además, es cero en el orígen.

En lo que se refiere a la función de onda perturbada $R_l(r)$, tenemos que, hasta el primer orden en a, toma la forma

$$R_l(r) = R_{nl}(r) + \Sigma'_p\ (E_{nl} - E_{pl})^{-1}\ [\int_0^\infty R_{nl}\,(dU_l/dr)\, R_{pl}\,dr]\ R_{pl}(r). \tag{10}$$

Procederemos ahora a expresar tanto E como $R_l(r)$, en una forma mas apropiada. Hacemos notar en primer lugar, que si derivamos la ecuación (9) con respecto a r, multiplicamos por $R_{pl}(r)$ y hacemos una integración por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty R_{nl}\,(dU_l/dr)\; R_{pl}\,dr \\ &= (\hbar^2/m)\,(d\,R_{nl}/dr)_{r=0}\ (d\,R_{pl}/dr)_{r=0} \\ &+ (E_{nl} - E_{pl}) \int_0^\infty (d\,R_{nl}/dr)\ R_{pl}\,dr \end{aligned} \tag{11}$$

Introduciendo (11) en (10), vemos que

$$\begin{aligned} R_l(r) &= R_{nl}(r) + \Sigma_p\ [\int_0^\infty (d\,R_{nl}/d\rho)\ R_{pl}\,d\rho]\ R_{pl}(r) \\ &+ (\hbar^2\, a/m)\ \Sigma'_p\ (E_{nl} - E_{pl})^{-1}\, (d\,R_{nl}/dr)_{r=0}\ (d\,R_{pl}/dr)_{r=0}\, R_{pl}(r) + .. \end{aligned} \tag{12}$$

Aprovechando el hecho que las $R_{pl}(r)$ forman un sistema completo, esto es, que

$$\Sigma_p\ R_{pl}(\rho)\ R_{pl}(r) = \delta(r - \rho) \quad , \tag{13}$$

podemos escribir

$$\Sigma_p \left[\int_0^\infty (d\,R_{nl}/d\rho)\, R_{pl}\,(\rho)\, d\rho \right] R_{pl}(r) = (d\,R_{nl}/dr) \quad . \qquad (14)$$

Sabemos también que $(d\,R_{nl}/dr)_{r=0} = 0$ si $l \neq 0$, y por lo tanto, el último término en (12) es solo de interés en el caso $l = 0$. Esto indica que los efectos de perturbación solo se hacen sentir en la onda S, y suprimiendo el índice l, tenemos que (12) toma la forma

$$R(r) = R_n(r) + a\,(d\,R_n/dr)$$

$$+ (\hbar^2 a/m)\ \Sigma_p\, (E_n - E_p)^{-1}\, (d\,R_n/dr)_{r=0}\, (d\,R_p/dr)_{r=0}\, R_p(r) + \ldots \qquad (14a)$$

Teniendo en cuenta que solo conservamos términos hasta primer orden en a, podemos reemplazar el primer renglón en (13) por

$$R_n(r) + a\,(dR_n/dr) \simeq R_n\,(r+a) \quad . \qquad (14b)$$

Mostraremos en la siguiente sección que la solución exacta del problema (1), (3) es equivalente a (14) hasta términos de primer orden en a.

Pasemos ahora a la energía E. Hacemos la sustitución (11) en el segundo término dentro de la llave { } en (8), y obtenemos

$$\Sigma'_p\, (E_{nl} - E_{pl})^{-1}\, (\hbar^2/m)\, (d\,R_{nl}/dr)_{r=0}\, (d\,R_{pl}/dr)_{r=0} \left[\int_0^\infty R_{pl}\, (d\,U_l/dr)\, R_{nl}\, dr \right]$$

$$+ \Sigma'_p \left[\int_0^\infty (d\,R_{nl}/dr)\, R_{pl}\, dr \right] \left[\int_0^\infty R_{pl}\, (d\,U_l/dr)\, R_{nl}\, dr \right] \quad , \qquad (15)$$

a su vez, aplicando (13), vemos que el segundo término de (15) toma la forma:

$$\tfrac{1}{2} \int_0^\infty (d\,R_{nl}^2/dr)\, (d\,U_l/dr)\, dr \quad . \qquad (16)$$

Pero (16), combinado con el primer término dentro de la llave { } en (8), lo cancela por las condiciones a la frontera en $r = 0$. De aquí que la contribución de segundo orden de la energía quede reducida al primer término en (15).

De nuevo vemos que la contribución de segundo orden a la energía existe solo para $l = 0$, y suprimiendo el índice l, y utilizando (23I), obtenemos

$$E = E_n + (\hbar^2 a/m)\ [(d R_n/dr)_{r=o}]^2$$

$$+ \Sigma'_p \{ (\hbar^2 a^2/m)\ (E_n - E_p)^{-1}\ (d R_n/dr)_{r=o} (d R_p/dr)_{r=o}\ [\int_o^\infty R_p (d U/dr)\ R_n dr] \}. \tag{17}$$

Aún es de interés dar otra forma a la contribución de 2o. orden a la energía dada por el último término de (17). Aplicando de nuevo la relación (11), vemos que el último término de (17) toma la forma

$$\Sigma'_p \{ (\hbar^2 a/m)^2\ (E_n - E_p)^{-1}\ [(d R_n/dr)_{r=o} (d R_p/dr)_{r=o}]^2$$

$$+ (\hbar^2 a^2/m)\ \Sigma_p (d R_n/dr)_{r=o} (d R_p/dr)_{r=o}\ [\int_o^\infty (d R_n/dr)\ R_p dr\ ]\ . \tag{18}$$

El segundo término en (18) puede escribirse:

$$\Sigma_p\ [(d R_p/dr)_{r=o} \int_o^\infty R_p (\rho)\ (d R_n/d\rho)\ d\rho\ ]$$

$$= \left\{ \frac{d}{dr} \int_o^\infty [\ \Sigma_p R_p (r)\ R_p (\rho)\ ]\ (d R_n/d\rho)\ d\rho \right\}_{r=o}$$

$$= (d^2 R_n/dr^2)_{r=o} = 0 \quad . \tag{19}$$

De aquí se concluye que la energía E puede también expresarse como

$$E = E_n + (\hbar^2 a/m)\ [(d R_n/dr)_{r=o}]^2$$

$$+ \Sigma'_p (\hbar^2 a/m)^2\ (E_n - E_p)^{-1}\ [(d R_n/dr)_{r=o} (d R_p/dr)_{r=o}]^2 + \ldots \tag{20}$$

En la siguiente sección procederemos a discutir la solución exacta del problema (1) y (3). Una vez obtenida esta solución, indicaremos en la sección III, como la energía dada por (17) equivale a la de la solución exacta tomada hasta segundo orden. Finalmente, en la sección IV mostraremos que la energía hasta segundo orden, es equivalente a la debida a un potencial δ de intensidad $4\pi(\hbar^2 a/m)$.

II. SOLUCION EXACTA DEL PROBLEMA DE UN OSCILADOR HARMONICO CON CENTRO REPULSIVO

Para resolver el problema del oscilador harmónico con un centro repulsivo, debemos encontrar la solución de la ecuación (1) con la condición a la frontera (3). Como se ha mostrado en la sección anterior, hasta segundo orden en a, solo tiene efecto el centro repulsivo en la onda S. Restringiéndonos a $l = 0$, e introduciendo la variable

$$z = (m\omega/\hbar)^{1/2} r' \quad , \tag{21}$$

la ecuación (1) toma la forma

$$\{ (d^2/dz^2) + [(2\nu + \tfrac{3}{2}) - \tfrac{1}{4} z^2] \} R(z) = 0 \quad , \tag{22}$$

donde

$$E = \hbar\omega \, (2\nu + \tfrac{3}{2}) \quad . \tag{23}$$

Tenemos además, la condición a la frontera (2) que nos da

$$R(\alpha) = 0 \, ; \;\; \alpha = (m\omega/\hbar)^{1/2} a \quad . \tag{24}$$

Si no existiera el centro repulsivo, (24) se reduciría a la condición $R(0) = 0$ y entonces $\nu = n$, donde n cualquier entero, ya que los polinomios de Hermite de orden non son cero en el orígen[3]. Para $a \neq 0$ necesitamos encontrar una solución de (22) que tienda a 0 si $z \to \infty$, y que además, satisfaga (24). Es bien sabido que las soluciones de (22) con la propiedad apropiada cuando $z \to \infty$, son las funciones del cilindro parabólico, y por lo tanto,

$$R(r') = \begin{cases} A_\nu D_{2\nu+1}(z) & \text{si} \quad \alpha \leqslant z \leqslant \infty \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant z < \infty \, , \end{cases} \tag{25}$$

donde A_ν es una constante arbitraria.

La función del cilindro parabólico $D_{2\nu+1}(z)$ puede expresarse en términos de las funciones confluentes hipergeométricas $F(a,b,x)$ bajo la forma[3]

$$D_{2\nu+1}(z) = 2^{\nu+\frac{1}{2}} \exp(-z^2/4) \{ [\Gamma(\tfrac{1}{2})/\Gamma(-\nu)] F(-\nu-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{z^2}{2})$$

$$+ (z/\sqrt{2}) [\Gamma(-\tfrac{1}{2})/\Gamma(-\nu-\tfrac{1}{2})] F(-\nu,\tfrac{1}{2},\tfrac{z^2}{2}) \} \quad , \qquad (26)$$

donde

$$F(a,b,x) = 1 + \frac{a}{b}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots \qquad (27)$$

Se tiene además, que[3]

$$\lim_{z\to\infty} D_{2\nu+1}(z) \to \exp(-z^2/4)\; z^{2\nu+1} \quad , \qquad (28)$$

y por lo tanto, se satisface la condición al ∞ .

Los eigenvalores del problema serán aquellos valores de ν para los cuales

$$D_{2\nu+1}(\alpha) = 0 \quad . \qquad (29)$$

Esta ecuación puede resolverse numéricamente para cualquier valor α , pero es de gran interés suponer que α es pequeño, y de que puede resolverse por un método de perturbaciones. En efecto, si

$$\nu = n + \alpha\,\nu_1 + \alpha^2\,\nu_2 + \ldots , \qquad (30)$$

podemos sustituir este valor en (29), y de (26) tenemos una serie en potencias de α que debe ser idénticamente nula. Si queremos que (29) se satisfaga, tenemos que igualar a 0 a los coeficientes de cada una de las potencias de α y obtenemos ν_1, ν_2 ... etc.

Tenemos que hacer notar en primer lugar, que $\Gamma(-\nu) \to \Gamma(-n) = \infty$ si $\alpha \to 0$, y que es conveniente utilizar la relación bien conocida entre funciones[4] Γ para escribir

$$[\Gamma(-\nu)]^{-1} = -\pi \,\mathrm{sen}\,(\pi\nu)\,\Gamma(1+\nu) = (-1)^{n+1}\,\pi^{-1}\,\mathrm{sen}\,[\pi(\alpha\nu_1+\alpha^2\nu_2)]$$
$$\Gamma(n+1+\alpha\nu_1+\alpha^2\nu_2) \quad . \qquad (31)$$

Esta última relación indica que el primer término en (26) ya es del orden de α , y que por tanto, hasta términos de segundo orden en α inclusive, podemos escribir

$$D_{2\nu+1}(a) \simeq 2^{\nu+\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\nu)} + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})}\right] \quad . \qquad (32)$$

Utilizando la relación (31), así como una similar para $\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})$, y conservando términos hasta α^2 inclusive, obtenemos

$$D_{2\nu+1}(a) \simeq 2^{\nu+\frac{1}{2}}\,\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\,(-1)^{n+1}(a\nu_1+a^2\nu_2)\,n!\,[\Gamma(1)+\Gamma'(1)\,a\nu_1]$$
$$+(-1)^{n+1}(a/\sqrt{2})\,\Gamma(-\tfrac{1}{2})\,[(2n+1)!!/\pi\,2^{n+1}]\,[\Gamma(\tfrac{1}{2})+\Gamma'(\tfrac{1}{2})\,a\nu_1]\}. \qquad (33)$$

Tomando en cuenta que[4]

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = (\pi)^{\frac{1}{2}} \ , \quad \Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\,(\pi)^{\frac{1}{2}}$$
$$[\Gamma'(1)/\Gamma(1)] \equiv \psi(1) = -C, \quad [\Gamma'(\tfrac{1}{2})/\Gamma(\tfrac{1}{2})] \equiv \psi(\tfrac{1}{2}) = -C-2\ln 2,$$
$$C = 0.5772\ldots \text{ (constante de Euler)}, \qquad (34)$$

obtenemos, al agrupar términos,

$$D_{2\nu+1}(a) \simeq 2^{\nu+\frac{1}{2}}(-1)^{n+1}(\pi)^{\frac{1}{2}}\,\{\,a\,[\,\nu_1\,n! - (\sqrt{2}\,\pi\,2^n)^{-1}(2n+1)!!\,]$$
$$+a^2\,[\,\nu_2\,n! - C\,n!\,(\nu_1)^2 + (\sqrt{2}\pi\,2^n)^{-1}(C+2\ln 2)\,\nu_1\,] + \ldots\} \ . \qquad (35)$$

Para satisfacer la condición a la frontera (29), tenemos que igualar a 0 los coeficientes de las potencias de α y en esta forma obtenemos

$$\nu_1 = [\sqrt{2\pi}\, n!\, 2^n]^{-1} (2n+1)!! \quad , \tag{36}$$

$$\nu_2 = -(2\ln 2)\ \nu_1^2 \quad . \tag{37}$$

De (23), la energía perturbada toma la forma

$$E = \hbar\omega\ [\ (2n+\tfrac{3}{2}) + 2(\alpha\nu_1) \ -4\ln 2\,(\alpha\nu_1)^2 + \dots\ ] \ , \tag{38}$$

donde α y ν_1 están dados por (24) y (36) respectivamente.

La función $R(r')$ de (25) debe estar normalizada, y para ello necesitamos la A_ν apropiada. Aprovechando la ecuación (22) y una similar para ν', así como la condición a la frontera (29), vemos que

$$D_{2\nu'+1}(\alpha)\ [dD_{2\nu+1}/dz]_{z=\alpha} = 2(\nu-\nu')\int_\alpha^\infty D_{2\nu+1}(z)\,D_{2\nu'+1}(z)\,dz\,. \tag{39}$$

Dividiendo por $2(\nu-\nu')$ y tomando el límite $\nu'\to\nu$, obtenemos

$$\int_\alpha^\infty [\,D_{2\nu+1}(z)\,]^2\,dz = -\tfrac{1}{2}\,[\,\partial D_{2\nu+1}(\alpha)/\partial\nu]\ [\partial D_{2\nu+1}(\alpha)/\partial\alpha]\,. \tag{40}$$

De la condición (29) tenemos sin embargo, que

$$[\,\partial D_{2\nu+1}(\alpha)/\partial\alpha\,]\,d\alpha + [\,\partial D_{2\nu+1}(\alpha)/\partial\nu]\,d\nu = 0\ , \tag{41}$$

y de (41) y (40) podemos escribir finalmente,

$$\int_\alpha^\infty [\,D_{2\nu+1}(z)\,]^2\,dz = \tfrac{1}{2}\,(d\nu/d\alpha)^{-1}\,[\,\partial D_{2\nu+1}(\alpha)/\partial\alpha\,]^2 \quad . \tag{42}$$

De (42) vemos que, si la normalización se efectúa respecto a la variable $r' = (m\omega/\hbar)^{-\frac{1}{2}}z$, la constante A_ν de (25) toma el valor

$$A_\nu = [\,\partial D_{2\nu+1}(\alpha)/\partial\alpha]^{-1}\,\sqrt{2}\ (d\nu/d\alpha)^{\frac{1}{2}}\,(m\omega/\hbar)^{\frac{1}{4}} \quad . \tag{44}$$

En el caso particular en que $\alpha = 0$, vemos de (30) que $(d\nu/d\alpha) = \nu_1$, y por lo tanto,

$$A_n = [(d D_{2n+1}/dr)_{r=0}]^{-1} (2\nu_1)^{\frac{1}{2}} (m\omega/\hbar)^{\frac{3}{4}} \quad . \qquad (45)$$

De aquí que la función normalizada $R_n(r)$ tiene la propiedad

$$(d R_n/dr)_{r=0} = (2\nu_1)^{\frac{1}{2}} (m\omega/\hbar)^{\frac{3}{4}} \qquad (46)$$

lo cual está de acuerdo con las formas explícitas para $R_n(r)$ dadas por Thieberger[5].

Para poder comparar la función $R(r')$ normalizada de (25), con la solución (13) del método de perturbaciones, procedemos primero a desarrollar $R(r')$ en términos de las funciones $R_p(r')$ que satisfacen la ecuación (9), obteniendo

$$R(r') = \sum_{p=0}^{\infty} [\int_0^{\infty} R(r) R_p(r) dr] R_p(r') \quad . \qquad (47)$$

La integral en (47) puede obtenerse de las ecuaciones (9) y (22), y de la condición a la frontera (29), bajo la forma

$$\int_{\alpha}^{\infty} R_p(r) R(r) dr = (\hbar^2/m)(E - E_p)^{-1} R_p(a) (dR/dr)_{r=a} \quad , \qquad (48)$$

donde

$$E = \hbar\omega(2\nu + \tfrac{3}{2}), \quad E_p = \hbar\omega(2p + \tfrac{3}{2}) \quad . \qquad (49)$$

Si nos restringimos a términos de primer orden en a, podemos escribir $R_p(a) \simeq$ $\simeq a(d R_p/dr)_{r=0}$. Para los otros factores tenemos que tomar la aproximación de 0, esto es, $(dR/dr)_{r=a} \simeq (d R_n/dr)_0$ y $\nu - p \simeq n - p$, excepto en el caso que $p = n$, donde $\nu - p \simeq \alpha\nu_1$. Con estas suposiciones, y utilizando (46), vemos que

$$R(r') \simeq R_n(r') + \Sigma_p' (\hbar^2 a/m)(E_n - E_p)^{-1} [(d R_n/dr)_{r=0} (d R_p/dr)_{r=0}] R_p(r'), \qquad (50)$$

donde el $'$ en la suma indica que se excluye el término $p = n$.

Si hacemos ahora la transformación $r' = r + a$, vemos que hasta primer orden en a, la solución exacta (50) coincide con aquella obtenida en (14a) y (14b) por el método de perturbaciones de la sección anterior.

En la siguiente sección discutiremos la energía de perturbación a segundo orden, y su comparación con la obtenida de la solución exacta.

III. LA ENERGIA DE PERTUSACION A SEGUNDO ORDEN

La corrección a los niveles de energía debida a la presencia del centro repulsivo de alcance a, está dada por la expresión (17), y de allí vemos que la corrección de segundo orden puede escribirse

$$E^{(2)} \equiv a \int_0^\infty R_n(r)\,(d\,U/dr)\,[\,{\textstyle\sum_p'}\,(\hbar^2 a/m)\,(E_n - E_p)^{-1}\,(dR_n/dr)_{r=0}\,(dR_p/dr)_{r=0}\;R_p(r)\,]\;dr \quad . \qquad (51)$$

Comparando el término dentro del paréntesis cuadrado en (51), con la suma que aparece en (50), vemos que son idénticas si reemplazamos r' por r en (50), de aquí que $E^{(2)}$ tome la forma

$$E^{(2)} = a \int_0^\infty R_n(r)\,(dU/dr)\;[\,R(r) - R_n(r)\,]\;dr. \qquad (52)$$

Aprovechando el hecho que $R(r)$ satisface (22) en el intervalo $a \leqslant r \leqslant \infty$, y que es cero en $0 \leqslant r \leqslant a$, podemos construir una relación similar a (11) para obtener

$$E^{(2)} = (\hbar^2 a/m)\,(d\,R_n/dr)_{r=a}\,(dR/dr)_{r=a}$$

$$+\, a\,(E_n - E) \int_a^\infty (d\,R_n/dr)\,R\,dr - (h^2 a/m)\;[\,(dR_n/dr)_{r=0}\,]^2 \quad . \qquad (53)$$

En la expresión anterior debemos de conservar solo términos de orden a^2, y como

$$a\,(E_n - E) = -2\hbar\omega\, a\,(\nu - n) \simeq [\,-2\hbar\omega\,(m\omega/\hbar)^{1/2}\,\nu_1\,]\; a^2 \quad , \qquad (54)$$

ya es del orden de a^2, la R dentro de la integral debe tomarse como $R = R_n(r)$, lo que hace que la integral sea 0 por la condición a la frontera $R_n(0) = 0$. Por otro lado tenemos que

$$\left(\frac{d\,R_n}{d\,r}\right)_{r=a} = \left(\frac{d\,R_n}{d\,r}\right)_{r=o} + \left(\frac{d^2\,R_n}{d r^2}\right)_{r=o} a + \ldots , \qquad (55)$$

y de la ecuación (9) vemos que el segundo término es 0. Podemos pues escribir

$$E^{(2)} = (\hbar^2 a/m)\;[\,(d\,R_n/dr)_{r=o}\,]^2\,\{\,[(d\,R_n/dr)_{r=o}\,]^{-1}\,[(d\,R/dr)_{r=a}\,] - 1\,\}\,. \quad (56)$$

Del valor (44) de la constante de normalización A_ν y de la relación (46), obtenemos

$$E^{(2)} = \hbar\omega\,(2\nu_1\alpha)\;\{\,\nu_1^{-1/2}\,(d\nu/d\alpha)^{1/2} - 1\,\} \qquad . \qquad (57)$$

Teniendo en cuenta la forma (30) de ν, obtenemos finalmente

$$E^{(2)} = \hbar\omega\, 2\,\nu_2\,\alpha^2 \qquad . \qquad (58)$$

La energía de perturbación de primer orden $E^{(1)}$ está dada por el segundo término de (17), y utilizando (46) obtenemos

$$E^{(1)} = \hbar\,\omega\,(2\nu_1\alpha) \qquad . \qquad (59)$$

La energía total asociada al n-esimo nivel toma entonces la forma

$$E = \hbar\,\omega\,(2n+1) + \hbar\omega\,(2\nu_1\alpha) + \hbar\omega\,(2\nu_2\,\alpha^2) = \hbar\omega\,(2\nu + 1) \quad , \qquad (60)$$

donde ν está definida por (30), y vemos que coincide enteramente con la energía obtenida directamente de la solución exacta.

El análisis desarrollado en esta sección y la anterior, muestra pues que hasta segundo orden, los métodos de perturbación con los potenciales trasladados nos dan el mismo resultado que la solución del problema con la condición en la frontera $r = a$, tanto en lo que se refiere a la función de onda, como a los niveles de energía. En la siguiente sección comparamos los resultados obtenidos con los potenciales transladados con los de un potencial delta equivalente.

IV. EQUIVALENCIA HASTA SEGUNDO ORDEN ENTRE UN CENTRO REPULSIVO Y UN POTENCIAL DELTA

En I mostramos que hasta primer orden, un centro repulsivo de alcance a es equivalente a un potencial delta de la forma

$$4\pi(\hbar^2 a/m)\ \delta(\boldsymbol{r}) \qquad , \qquad (61)$$

y veremos ahora que esta equivalencia se conserva hasta segundo orden.

Hacemos notar en primer lugar, que los elementos de matriz de $\delta(\boldsymbol{r})$, que corresponden a estados con momento angular $l \neq 0$, se anulan ya que las funciones radiales y sus derivadas son cero en el orígen. Podemos pues restringir la discusión a estados con $l = 0$. Para un potencial común del tipo de un oscilador harmónico, la ecuación de onda tiene la forma

$$[\,-(\hbar^2/m)\ \nabla^2\psi + \tfrac{1}{4}\,m\omega^2 r^2\,\psi + 4\pi(\hbar^2 a/m)\ \delta(\boldsymbol{r})\,\psi\,] = E\,\psi \qquad . \qquad (62)$$

Si ψ corresponde a ondas S, podemos expresar $\delta(\boldsymbol{r})$ en coordenadas esféricas

$$\delta(\boldsymbol{r}) = [\,r^2 \operatorname{sen}\theta\,]^{-1}\ \delta(r)\ \delta(\theta)\ \delta(\varphi) \qquad , \qquad (63)$$

e integrar sobre el ángulo sólido para obtener que $R(r) \equiv r\psi$, satisface la ecuación

$$[-(\hbar^2/m)(d^2/dr^2) + \tfrac{1}{4} m\omega^2 r^2 + (\hbar^2 a/m) r^{-2} \delta(r)] R(r) = E R(r). \quad (64)$$

Si consideramos el último término en el paréntesis cuadrado como una perturbación, tendremos que los elementos de matriz formados con las funciones $R_n(r)$, $R_p(r)$, discutidas en las secciones anteriores, toman la forma

$$\int_0^\infty (r^{-1} R_n) [(\hbar^2 a/m) \delta(r)] (r^{-1} R_p) dr = (\hbar^2 a/m)(d R_n/dr)_{r=0} (d R_p/dr)_{r=0}. \quad (65)$$

Si consideramos ahora la energía de perturbación hasta segundo orden asociada con el potencial $(\hbar^2 a/m) r^{-2} \delta(r)$, vemos que nos da precisamente el valor (20). Por lo tanto, hasta segundo orden, el efecto de un centro repulsivo de alcance a es equivalente al del potencial (61).

En el presente trabajo hemos supuesto un potencial del tipo de oscilador harmónico con un centro repulsivo. Si examinamos con detalle el análisis, vemos sin embargo, que la equivalencia hasta segundo orden entre el efecto de un centro repulsivo y el potencial (61), es independiente del tipo del potencial común que se considere. De aquí pues que, por lo menos hasta segundo orden, el método de traslación $r' = r + a$ empleado para obtener el potencial equivalente, dé los mismos resultados que el método de Huang y Yang[6] para obtener el efecto de un centro repulsivo en la interacción entre partículas libres.

REFERENCIAS

1. M. Bauer y M. Moshinsky, Nuclear Physics **4**, 615 (1957).
2. N.F. Mott e I.N. Sneddon; Wave mechanics and its applications, (Oxford, Clarendon Press, 1948) p. 75.
3. W. Magnus y F. Oberhettinger; Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, (Chelsea Publishing Company, New York, 1949) pp. 91-94.
4. W. Magnus y F. Oberhettinger, loc.cit., pp. 1-3.
5. R. Thieberger, Nuclear Physics **2**, 533 (1956).
6. K. Huang y C.N. Yang, Phys.Rev. **105**, 767 (1957).

Esta página está intencionalmente en blanco.