SOBRE LA GENERACION DE FUNCIONES TRANSFERENTES POR MEDIO DE DISTRIBUCIONES

Alejandro Medina

Instituto Nacional de la Investigación Científica y
Comisión Nacional de la Energía Nuclear

(Recibido: Junio 15, 1958)

RESUMEN

Darlington's potential analogues[1] *combined with some integral equations techniques of potential theory*[2] *provide powerfull methods for the study of transfer functions of linear systems. For example, Bode's well known relations between the real and imaginary part of a transfer function*[3] *and Cerrillo's integral descriptions*[4] *result with particular ease as a consequence of more general properties. In this paper some further consequences of the theory are considered, in particular certain automorphisms of the distribution functions. It is shown how considerations of such automorphisms provide simple methods for the construction of adequate distributions.*

I. INTRODUCCION

Se va a considerar la descripción de un sistema físico lineal por medio de una función transferente F(s) de la frecuencia compleja $s = \sigma + i\omega$; es decir, F(s) es la función que permite obtener la respuesta g(s) del sistema correspondiente a una excitación f(s) bajo la forma

$$g(s) = F(s)\ f(s) \tag{1}$$

y es en particular la respuesta misma cuando la excitación es un impulso unidad $f(s) = 1$. Si se supone F descompuesta en sus partes real e imaginaria:

$$F(s) = u(\sigma, \omega) + i\, v(\sigma, \omega) \tag{2}$$

en toda región del plano s en que F sea analítica, u y v son harmónicas y conjugadas una de otra. Esta circunstancia, que permite aplicar a u y v los métodos desarrollados en relación con la teoría del potencial, es la base en que se apoya el bien conocido método de Darlington[1] para producir funciones transferentes con características dadas, utilizando la llamada "analogía potencial". En este trabajo se va a emplear la analogía potencial bajo un punto de vista diferente.

Por conveniencia del lector mencionaremos aquí algunos resultados de la teoría del potencial que serán de gran utilidad en nuestro trabajo subsecuente.

Sea C una curva del plano s, $P = (\sigma_0, \omega_0)$ un punto arbitrario de C, $s_0 = \sigma_0 + i\,\omega_0$, y

$$\begin{gathered} \sigma_0 = \sigma_0\,(l) \qquad \omega_0 = \omega_0\,(l) \\ 0 \leq l \leq l_0 \end{gathered} \tag{3}$$

las ecuaciones paramétricas de la curva, equivalentes a

$$s_0 = s_0\,(l) \tag{3a}$$

Se hacen las siguientes suposiciones:

i) La curva es cerrada:

$$\sigma_0\,(0) = \sigma_0\,(l_0) \qquad \omega_0\,(0) = \omega_0\,(l_0)\ . \tag{3b}$$

ii) La curva es de clase C'', es decir σ_0 y ω_0 son contínuas y tienen primeras y segundas derivadas contínuas.

iii) C no tiene puntos múltiples.

iv) Existe un entero positivo m tal que toda recta paralela a los ejes corta la curva a lo más en m puntos.

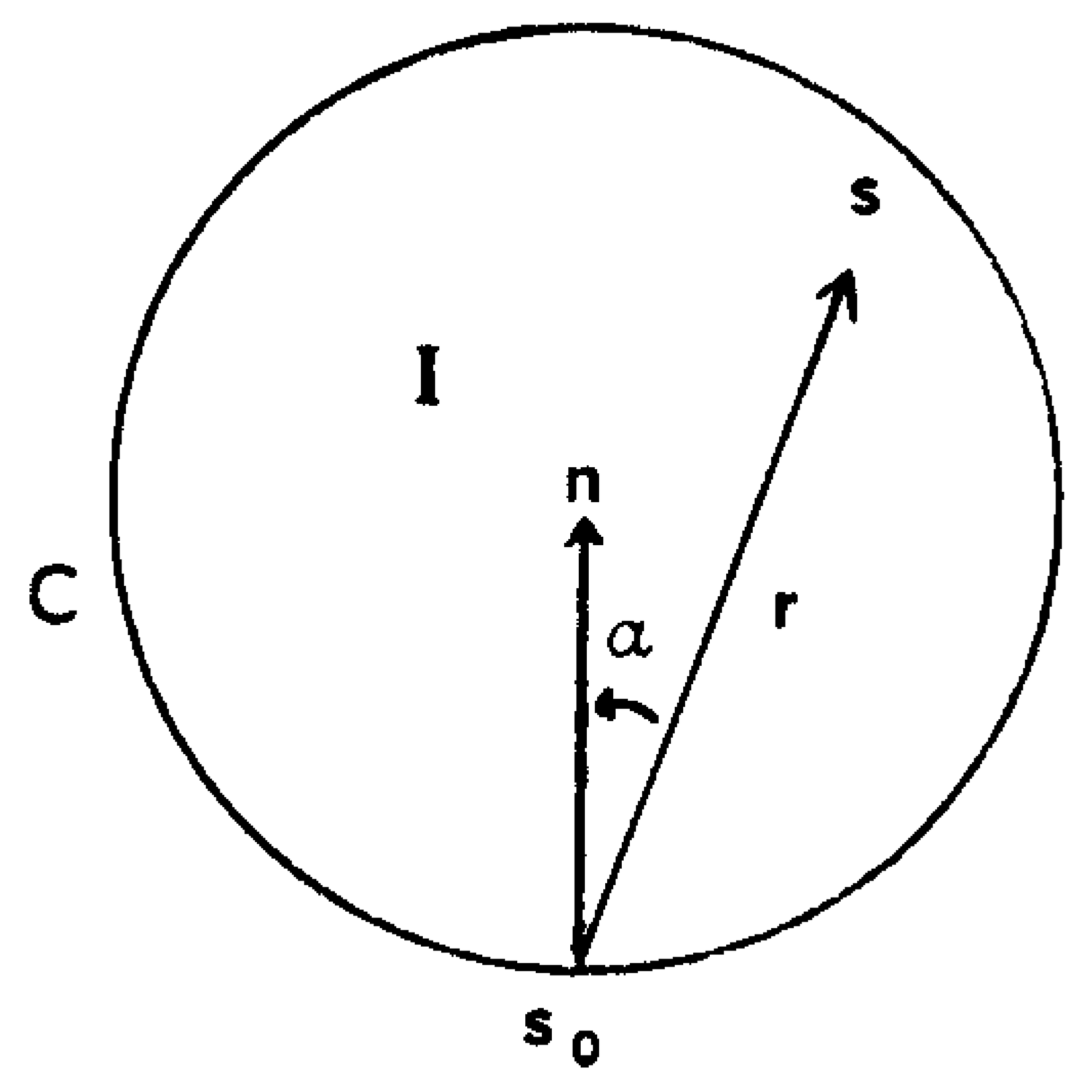

Fig. 1

Se designará por I el interior abierto de la región encerrada por C; $\bar{I}$ denotará en cambio la cerradura de I, es decir, I completado con su frontera C (Fig. 1). n es la normal interior a C, s un punto interior arbitrario,

$$r = \sqrt{(\sigma - \sigma_0)^2 + (\omega - \omega_0)^2} = |s - s_0| \tag{4}$$

la longitud del vector $s - s_0$ y α el ángulo que forma $s - s_0$ con la normal interior. Es conveniente además usar como parámetro l la longitud de la curva contada a partir de algún punto fijo de la misma; l_0 es entonces la longitud total de C.

Sea ahora $\mu\,(l)$ una función contínua definida sobre C pero por lo demás arbitraria y considérese la integral

$$u\,(\sigma, \omega) = \int_0^{l_0} \mu\,(l)\ \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n}\ dl = \int_0^{l_0} \frac{\mu\,(l)\cos\alpha}{r}\ dl\ . \tag{5}$$

La función $u(\sigma,\omega)$ definida por esta integral es harmónica en todos los puntos (σ,ω) que no están en C. Es el potencial de una doble capa, es decir, el potencial de una distribución continua de dipolos con densidad $\mu(l)$ y cuya dirección coincide con la normal interior. Es conveniente recordar algunas propiedades de (5) (ver referencia (4)). Si s_1 es un punto de C, se designa por $u(\sigma_1,\omega_1)$ el límite de $u(\sigma,\omega)$ cuando $(\sigma,\omega)\to(\sigma_1,\omega_1)$ a lo largo de la curva C y se define este límite como el valor de u en los puntos s_1 de C. Entonces $u_i(\sigma_1,\omega_1)$ denota el límite de $u(\sigma,\omega)$ cuando $(\sigma,\omega)\to(\sigma_1,\omega_1)$ siendo ahora (σ,ω) un punto interior y $u_e(\sigma_1,\omega_1)$ es el límite correspondiente cuando $(\sigma,\omega)\to(\sigma_1,\omega_1)$ moviéndose del exterior. Entre estos tres límites existen las relaciones siguientes:[4]

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_1\omega_1) &= u(\sigma_1,\omega_1) + \pi\mu(l_1) \\ u_e(\sigma_1,\omega_1) &= u(\sigma_1,\omega_1) - \pi\mu(l_1) \quad , \end{aligned} \tag{6}$$

y por tanto $u(\sigma,\omega)$ muestra, cuando se cruza la curva, una discontinuidad finita de valor

$$u_i(\sigma_1,\omega_1) - u_e(\sigma_1,\omega_1) = 2\pi\mu(l_1) \quad , \tag{7}$$

pero su derivada normal es en cambio continua:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{\partial u_e}{\partial n} \quad . \tag{8}$$

Estas propiedades pueden aplicarse para la solución del problema de Dirichlet. Si se dan:

1) Una curva cerrada C con las propiedades i) a iv)

2) Una función $\phi = \phi(l)$ continua sobre C para $0 \le l \le l_0$ y uniforme sobre C:

$$\phi(0) = \phi(l_0) \qquad (9)$$

y se requiere una función $u(\sigma, \omega)$ tal que

a) $u(\sigma, \omega)$ sea harmónica en el interior I de C.

b) $$u_i(\sigma_0, \omega_0) = \phi(l) \qquad (10)$$

para todo l en $0 \leq l \leq l_0$.

Se demuestra[4] que la solución $u(\sigma, \omega)$ del problema de Dirichlet es precisamente (5) cuando $\mu(l)$ es una solución de la ecuación integral

$$\mu(l) = \frac{\phi(l)}{\pi} - \int_0^{l_0} K(l, l_1)\, \mu(l_1)\, dl_1 \qquad (11)$$

cuyo kernel

$$K(l, l_1) = \frac{\cos a}{\pi r} \qquad (11a)$$

depende solamente de la curva C. En la figura 2 se ilustran las variables pertinentes que intervienen en la construcción del kernel.

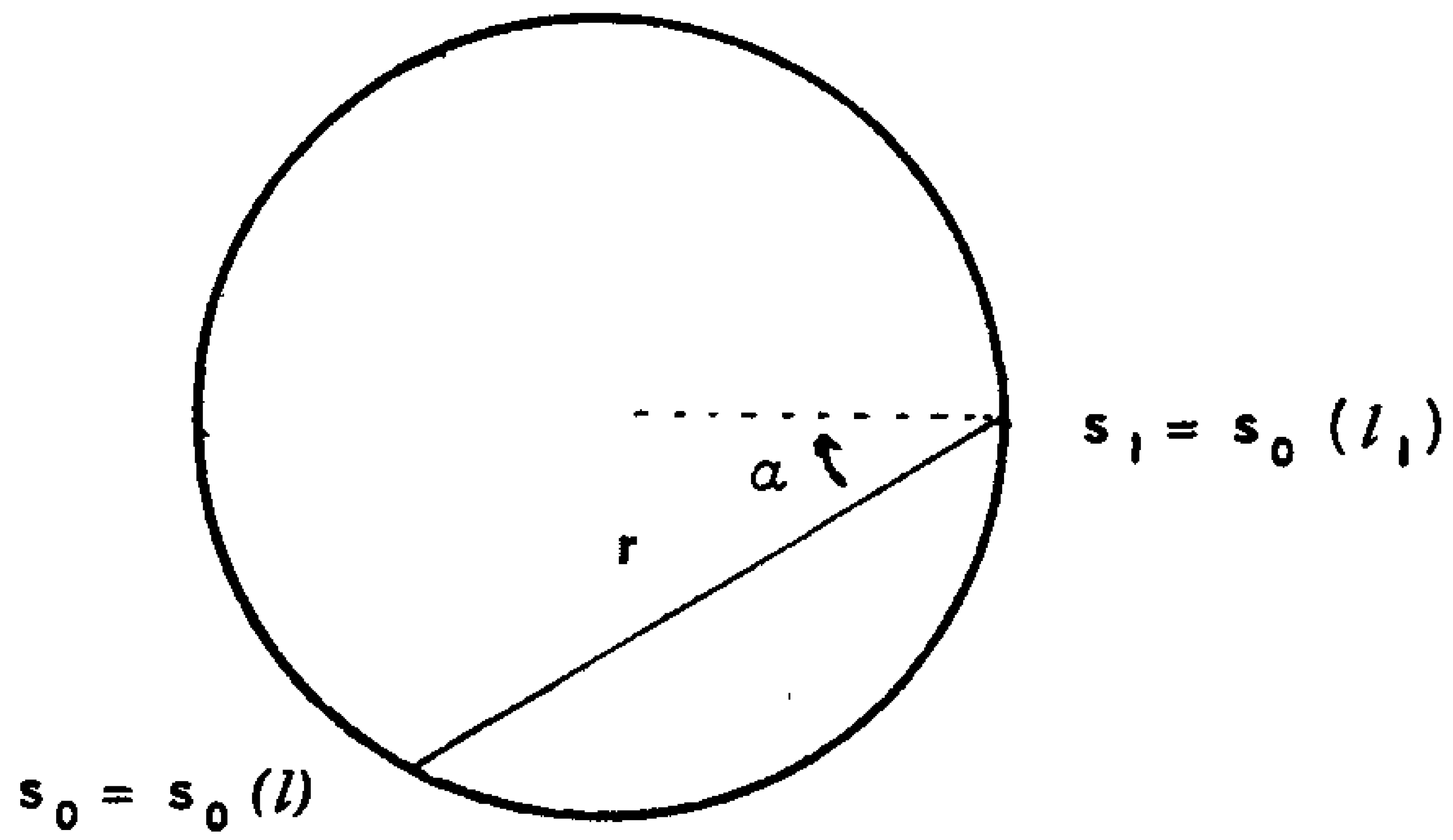

Fig. 2

Se demuestra además que (11) tiene una solución única $\mu(l)$ así que siempre es posible encontrar una distribución sobre C que genere una función harmónica $u(\sigma, \omega)$ que se reduzca en C a valores dados $\phi(l)$.

La función conjugada a $u(\sigma,\omega)$, es decir $v(\sigma,\omega)$, se obtiene sencillamente girando los dipolos 90° de modo que éstos queden orientados a lo largo de C formando ahora una cadena dipolar. Se tendrá

$$v(\sigma,\omega) = \int_0^{l_0} \mu(l) \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial l} dl = \int_0^{l_0} \frac{\mu(l) \operatorname{sen} \alpha}{r} dl , \quad (12)$$

$v(\sigma,\omega)$ es harmónica en el interior de C, conjugada a $u(\sigma,\omega)$ y contínua en C:

$$v_i(\sigma_1, \omega_1) = v_e(\sigma_1, \omega_1) = v(\sigma_1, \omega_1) \quad (13)$$

para todos los puntos s_1 de C.

II. LA FUNCION COMPLEJA DE UNA DOBLE CAPA

Las funciones $u(\sigma,\omega)$ y $v(\sigma,\omega)$ pueden combinarse en una función compleja

$$F(s) = u(\sigma,\omega) + i\,v(\sigma,\omega) = \int_0^{l_0} \frac{\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha}{r} \mu(l)\, dl =$$

$$= \int_0^{l_0} \frac{e^{i\alpha}}{r} \mu(l)\, dl \quad , \quad (14)$$

conviene ahora transformar el integrando de la manera siguiente:

En la figura 3, s_0 es un punto de C, n es la normal, t la tangente a C en s_0, σ es la dirección del eje real y s un punto interior a C. Puesto que $\alpha = \delta - \theta$, (14) puede escribirse como

$$F(s) = \int_0^{l_0} \mu(l) \frac{e^{i\delta}\, dl}{r\, e^{i\theta}} \quad , \quad (14a)$$

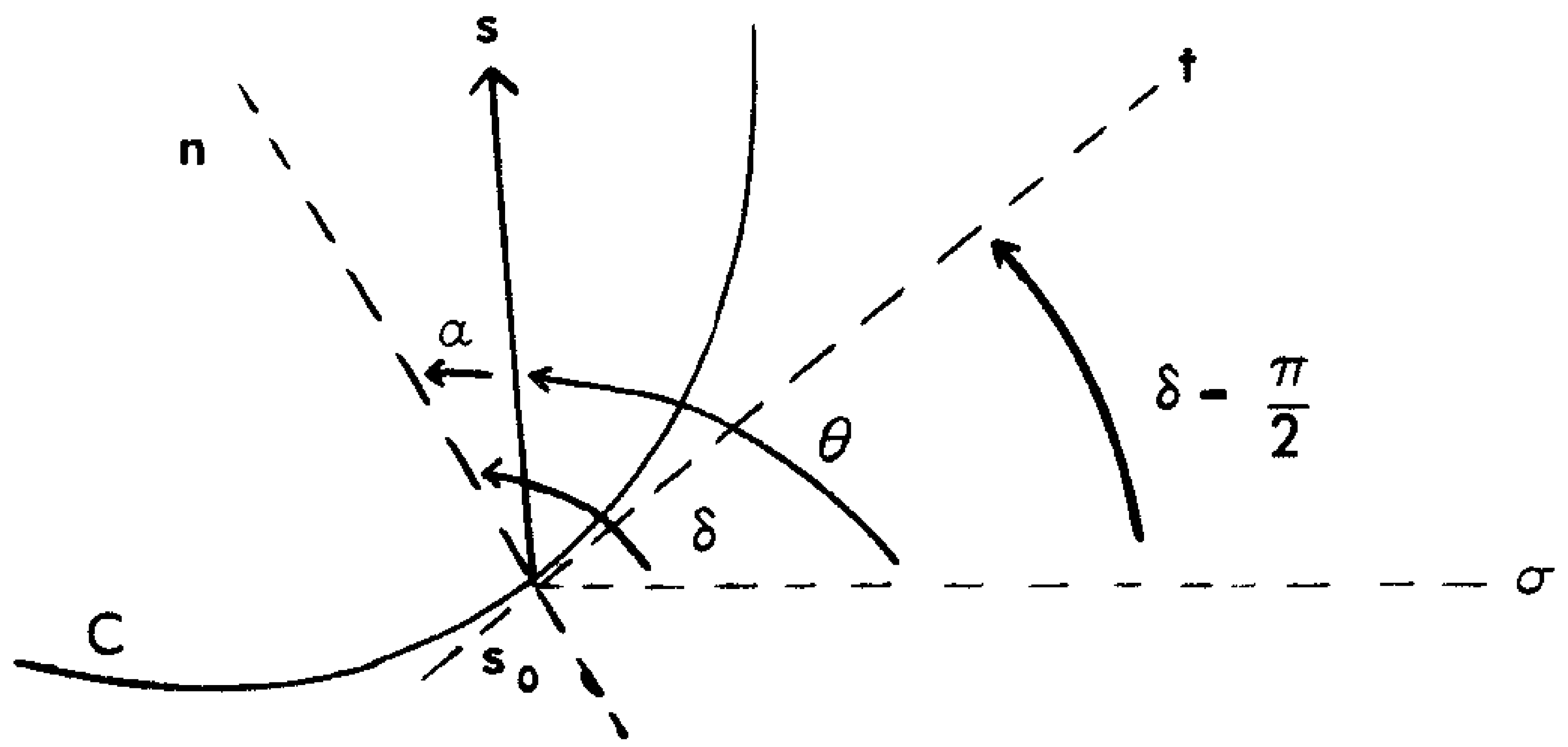

Fig. 3

pero siendo $ds_0 = d\sigma_0 + i\,d\omega_0$ será entonces $|ds_0| = dl$ y $ds_0 =$
$= e^{i(\delta - \frac{\pi}{2})}\,dl = -i\,e^{i\delta}\,dl$, de donde $e^{i\delta}\,dl = -\frac{1}{i}\,ds_0$.

Por otra parte $r\,e^{i\theta} = s - s_0$. Substituyendo estos valores en (14a) resulta

$$F(s) = \frac{1}{i} \oint \frac{\mu(l)\,ds_0}{s_0 - s} , \qquad (14b)$$

además, a lo largo de la curva, $s_0 = s_0(l)$ y $l = l(s_0)$.

Comviene hacer

$$f(s_0) = 2\pi\mu(l) = 2\pi\mu\,[l(s_0)]$$

$$\mu(l) = \frac{1}{2\pi}\,f(s_0) = \frac{1}{2\pi}\,f[s_0(l)] , \qquad (15)$$

con lo cual (14b) se escribe

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(s_0)\,ds_0}{s_0 - s} . \qquad (16)$$

La distribución $\mu(l)$ permite pues, mediante la ecuación de la curva, definir una función $f(s_0)$ sobre la curva. Esta función puede ahora prolongarse analíticamente fuera de la curva y considerarse como una función $f(s)$ de la variable compleja s. Para ello basta, de la ecuación de la curva obtener $l = l(s_0)$, substituir, de acuerdo con (15), $l(s_0)$ por l en $\mu(l)$ obteniéndose así $f(s_0) = 2\pi\mu\,[\,l(s_0)\,]$. La prolongación analítica es entonces $f(s)$.

La función $f(s)$ así obtenida tiene la propiedad de hacerse real sobre la curva C, es decir

$$\operatorname{Im} f(s) = 0 \quad \text{si } s \in C \quad , \tag{17}$$

y se hace igual a $2\pi\mu(l)$ en los puntos $s_0(l)$ de C.

La ecuación (16) tiene la forma típica de una integral de Cauchy. Si $f(s)$ fuera analítica en I de (16), podría concluirse

$$F(s) = f(s) \qquad F(s_0) = f(s_0) \quad , \tag{18}$$

pero si $f(s)$ no es analítica en $\overline{I}$, será $F(s) \neq f(s)$.

Por otra parte, si se da un conjunto de valores $\phi(l)$ sobre la curva y $\mu(l)$ se toma como solución de (11), la función $F(s)$ dada por (16) es la función analítica en I cuya parte real se hace igual a $\phi(l)$ en C.

III. LAS ECUACIONES DE BODE [3]

Como un ejemplo sencillo de aplicación, tómese como C el eje imaginario $\sigma = 0$ cuyo interior se va a considerar como el semiplano derecho. Con referencia a la Fig. 2 se ve que en este caso $s_0 = i\omega_0$, $s_1 = i\omega_1$, $r = |\omega_1 - \omega_0|$ y $\alpha = 90°$ Será entonces $K(l, l_1) = \dfrac{\cos\alpha}{\pi r} = 0$. La ecuación integral (11) da:

$$\mu\ (l) = \frac{\phi\,(l)}{\pi} \qquad ,$$

y siendo ahora $\phi\ (l) = \mathrm{u}\ (\mathrm{o}\,,\omega)$, se podrá escribir

$$\mu\ (\omega) = \frac{\mathrm{u}\ (\mathrm{o}\,,\omega)}{\pi} \tag{19}$$

$$\mathrm{u}\ (\mathrm{o}\,,\omega) = \lim_{\sigma \to \mathrm{o}\,+} \mathrm{u}\ (\sigma\,,\omega)$$

en (5) será ahora

$$\frac{\cos\ \alpha}{\mathrm{r}} = \frac{\sigma}{\mathrm{r}^2} = \frac{\sigma}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2} \qquad \mathrm{d}\,l = \mathrm{d}\,\omega'$$

y por lo tanto,

$$\mathrm{u}\ (\sigma,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu\ (\omega')\ \frac{\cos\ \alpha}{\mathrm{r}}\ \mathrm{d}\,\omega' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma\,\mathrm{u}\ (\mathrm{o}\,,\omega')}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2}\ \mathrm{d}\,\omega' \tag{20}$$

$$(\sigma > \mathrm{o})$$

que es la bien conocida expresión que relaciona la parte real de una función transferente en $R_e s > \mathrm{o}$ a los valores que toma en el eje ω . En las mismas condiciones

$$\frac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\mathrm{r}} = \frac{\omega' - \omega}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2} \qquad ,$$

la ecuación (12) da:

$$\mathrm{v}\ (\sigma,\omega) = -\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \omega')\ \mathrm{u}\ (\mathrm{o}\,,\omega')}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2}\ \mathrm{d}\,\omega' \qquad , \tag{21}$$

$$(\sigma \geq \mathrm{o})$$

y finalmente, puesto que $f(s_0) = f(i\,\omega') = 2\pi\mu(\omega') = 2\,u(o,\omega')$, $ds_0 = i\,d\omega'$, $s - s_0 = \sigma + i(\omega - \omega')$ de (16), se obtiene

$$F(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(o,\omega')\,d\omega'}{\sigma + i(\omega - \omega')} \qquad (22)$$

$$\mathrm{Re}\,s \geq o$$

considerando la función

$$i\,F(s) = -\,v(\sigma,\omega) + i\,u(\sigma,\omega) \quad , \qquad (23)$$

cuya parte real es $-v$, se obtienen las relaciones inversas

$$v(\sigma,\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma\,v(o,\omega')}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2}\,d\omega' \qquad (24)$$

$$u(\sigma,\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \omega')\,v(o,\omega')}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2}\,d\omega' \qquad (25)$$

$$F(s) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(o,\omega')\,d\omega'}{\sigma + i(\omega - \omega')} \qquad (26)$$

en particular, de (21) y (25) para $\sigma = o$,

$$v(o,\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(o,\omega')}{\omega - \omega'}\,d\omega'$$

$$(27)$$

$$u(o,\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(o,\omega')}{\omega - \omega'}\,d\omega' \quad ,$$

que son las conocidas expresiones que relacionan u y v como transformadas de Hilbert.

IV. LAS ECUACIONES DE CERRILLO[4]

Si se toma ahora como C la recta $\mathrm{Re}\, s = \gamma$, haciendo $s_0 = \gamma + i\lambda$, como el kernel $K(l, l_1)$ se anula para una recta, será

$$\mu(l) = \mu(\lambda) = \frac{u(\gamma,\lambda)}{\pi}$$

$$f(s_0) = 2u(\gamma,\lambda) \quad ds_0 = i\, d\lambda \tag{28}$$

obteniéndose ahora de (16):

$$F(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\gamma,\lambda)}{s-\gamma-i\lambda}\, d\lambda \tag{29}$$

si $F(s)$ es real cuando s es real, $F(s^*) = F(s)^*$ y $u(\gamma,\lambda) = u(\gamma,-\lambda)$ es par en λ. (29) se transforma en

$$F(s) = \frac{2(s-\gamma)}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{u(\gamma,\lambda)}{(s-\gamma)^2 + \lambda^2}\, d\lambda \quad , \tag{30}$$

que es la forma empleada por Cerrillo en la investigación de problemas de existencia en síntesis de circuitos. Semejantemente haciendo

$$\theta(s) = \log F(s) = \alpha(\sigma,\omega) + i\,\beta(\sigma,\omega) \quad , \tag{31}$$

la función de propagación $\theta(s)$ podrá expresarse como

$$\theta(s) = \frac{2(s-\gamma)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(\gamma,\lambda)}{(s-\gamma)^2+\lambda^2} d\lambda \tag{32}$$

de donde resulta:

$$F(s) = \exp \left\{ \frac{2(s-\gamma)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(\gamma,\lambda)}{(s-\gamma)^2+\lambda^2} d\lambda \right\} . \tag{33}$$

V. UNA FORMULACION GENERAL

En los dos párrafos anteriores se ha mostrado cómo, la expresión de la función transferente depende de una solución adecuada de la ecuación integral (11). Nos proponemos ahora generalizar estos resultados tratando de resolver esta ecuación integral de una manera práctica y constructiva.

Para este propósito considérese la integral

$$W(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(s_0)\, ds_0}{s_0 - s} \tag{34}$$

con $s_0 = s_0\,(l)$ y $l = l\,(s_0)$

$$f(s_0) = 2\pi\mu\,[\,l\,(s_0)\,] \quad . \tag{34a}$$

Si s es un punto cualquiera del plano que no pertenece a C, substituyendo este valor de s en el integrando de (34) y efectuando la integración a lo largo de C, se obtiene un valor que hemos designado por $W(s)$. La integral define pues la función $W(s)$ para todos los puntos $s \in I$ y todos los $s \in E$, siendo E la región del plano exterior a C, excluyendo C misma. Podremos escribir

$$W(s) = \begin{cases} W_i(s) & \text{para} \quad s \in I \\ W_e(s) & \text{para} \quad s \in E \end{cases} \tag{35}$$

con

$$\begin{aligned} W_i(s) &= u_i(\sigma,\omega) + i\, v_i(\sigma,\omega) \\ W_e(s) &= u_e(\sigma,\omega) + i\, v_e(\sigma,\omega) \end{aligned} \quad . \tag{36}$$

Si introducimos las definiciones

$$\begin{aligned} W_i(s_0) &= \lim_{s \to s_0} \text{int.}\ W_i(s) \\ W_e(s_0) &= \lim_{s \to s_0} \text{ext.}\ W_e(s) \end{aligned} \quad , \tag{37}$$

en donde $s_0 \in C$ y los límites se calculan cuando $s \to s_0$ del lado interior y del lado exterior de C respectivamente, conviniendo en llamar $W_i(s_0)$ y $W_e(s_0)$ los valores de $W_i(s)$ y $W_e(s)$ en la curva C, podemos considerar la función $W_i(s)$ definida para todos los $s \in \bar{I}$ y $W_e(s)$ definida para todos los $s \in \bar{E}$. Claramente $W_i(s)$ no está definida en E y $W_e(s)$ no lo está en I. Podemos, sin embargo, introducir las funciones

$$W_+(s) = \begin{cases} W_i(s) & \text{para} \quad s \in I \\ 0 & \text{para} \quad s \in E \end{cases} \tag{38}$$

$$W_-(s) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad s \in \bar{I} \\ -W_e(s) & \text{para} \quad s \in \bar{E} \end{cases} \tag{39}$$

será entonces

$$W(s) = W_+(s) - W_-(s) \tag{40}$$

para todos los $s \bar{\in} C$. Es además evidente que W_i y W_e son analíticas en sus recintos de difinición.

Si suponemos que C encierra al origen, para puntos $s \in I$ tales que $|s| \to o$, podemos escribir

$$\frac{1}{s_0 - s} = \frac{1}{s_0} + \frac{s}{s_0^2} + \frac{s^2}{s_0^3} + \ldots .$$

y haciendo

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(s_0)}{s_0^n} \, ds_0 \tag{41}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

se obtiene de (34):

$$W_i(s) = f_1 + f_2 s + f_3 s^2 + \ldots . \tag{42}$$

cuando $s \in E$ y $|s| \to \infty$,

$$\frac{1}{s_0 - s} = - \frac{1}{s} - \frac{s_0}{s^3} - \frac{s_0^2}{s^3} - \ldots .$$

definiendo

$$f_{-n} = - \frac{1}{2\pi i} \oint s_0^n \, f(s_0) \, ds_0 \tag{43}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

resulta

$$W_e(s) = \frac{f_0}{s} + \frac{f_1}{s^2} + \frac{f_2}{s^3} + \dots \tag{44}$$

Ahora bien: la función $W_i(s)$ que ha sido definida mediante la integral (34) para puntos $s \in \bar{I}$, puede prolongarse analíticamente fuera de C en la región exterior. De modo análogo, la función $W_e(s)$ definida por la integral en $s \in \bar{E}$ puede prolongarse analíticamente hacia el interior. Llamaremos

$$\begin{aligned} F_+(s) &= \text{cont. anal. } W_i(s) \\ F_-(s) &= \text{cont. anal. } \{-W_e(s)\} \end{aligned} \tag{45}$$

obviamente

$$\begin{aligned} F_+(s) &= W_+(s) = W_i(s) \quad \text{para} \quad s \in \bar{I} \\ F_-(s) &= W_-(s) = -W_e(s) \quad \text{para} \quad s \in \bar{E} \end{aligned} \tag{46}$$

por otra parte, es claro que F_+ es analítica en $\bar{I}$, F_- es analítica en $\bar{E}$. Sin embargo, en general F_+ tendrá singularidades en E y F_- las tendrá en I, a menos que se redujeran a constantes.

Para los puntos $s_1 \in C$ hemos definido W_i, W_e, F_+ y F_- ya sea por un límite o por continuación analítica. Hagamos ahora

$$W_1(s_1) = \frac{1}{2\pi i} \, P \oint \frac{f(s_0)\, ds_0}{s_0 - s_1} \tag{47}$$

$$(s_1 \in C)$$

entonces, en virtud de las relaciones (6), recordando que $f(s_0) = 2\pi\mu(l)$, se tendra:

$$W_i(s_0) = W_+(s_0) = F_+(s_0) = W_I(s_0) + \tfrac{1}{2} f(s_0)$$

$$W_e(s_0) = -W_-(s_0) = -F_-(s_0) = W_I(s_0) - \tfrac{1}{2} f(s_0) \quad , \qquad (48)$$

de donde resulta

$$W_i(s_0) - W_e(s_0) = W_+(s_0) + W_-(s_0) = F_+(s_0) + F_-(s_0) = f(s_0) \quad , \qquad (49)$$

por otra parte, recordando que la discontinuidad sólo acurre en la parte real y que $f(s)$ se hace real en C, resulta

$$\left.\begin{aligned} u_i(\sigma_0, \omega_0) &= u(\sigma_0, \omega_0) + \pi\mu(l) \\ u_e(\sigma_0, \omega_0) &= u(\sigma_0, \omega_0) - \pi\mu(l) \\ v_i(\sigma_0, \omega_0) &= v_e(\sigma_0, \omega_0) \\ u_i(\sigma_0, \omega_0) - u_e(\sigma_0, \omega_0) &= 2\pi\mu(l) \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

cuando $\sigma_0 = \sigma_0(l)$, $\omega_0 = \omega_0(l)$ y $\mu(l) = \dfrac{1}{2\pi} f(s_0)$.

Puesto que $F_+(s)$, $F_-(s)$ y $f(s)$ son continuaciones analíti - cas de $F_+(s_0)$, $F_-(s_0)$ y $f(s_0)$ respectivamente, de (49) se obtiene:

$$f(s) = F_+(s) + F_-(s) \qquad (51)$$

y también, puesto que

$$W_I(s_0) = \tfrac{1}{2} [F_+(s_0) - F_-(s_0)] \qquad (52a)$$

debera ser

$$W_i(s) = \tfrac{1}{2}\,[\,F_+(s) - F_-(s)\,] \tag{52}$$

Podemos verificar estos resultados de la manera siguiente: las funciones W_+ y W_- pueden expresarse por medio del teorema de Cauchy en la forma:

$$\left.\begin{aligned} W_+(s) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{W_+(s_0)}{s_0 - s}\,ds_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{W_i(s_0)}{s_0 - s}\,ds_0 \\ W_-(s) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint \frac{W_-(s_0)}{s_0 - s}\,ds_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{W_e(s_0)}{s_0 - s}\,ds_0 \end{aligned}\right. \tag{53}$$

así que

$$W(s) = W_+(s) - W_-(s) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{W_i(s_0) - W_e(s_0)}{s_0 - s}\,ds_0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(s_0)\,ds_0}{s_0 - s} \tag{54}$$

que es precisamente la definición de partida.

VI. SOLUCION DE LA ECUACION INTEGRAL

Veremos ahora cómo, los resultados obtenidos en el párrafo anterior nos permiten resolver la ecuación integral (11).

Las ecuaciones de la curva C pueden escribirse como:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0(l) = \sigma_0(l) + i\,\omega_0(l) \\ l &= l(s) \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

considerando a l en general como una variable compleja.

La función $l = l\,(s)$ tiene la propiedad de hacerse real cuando $s = s_0$ es un punto de C.

Por otra parte, la dependencia funcional entre l y s determina un mapeo conforme entre los planos l y s. Puesto que $l\,(s)$ es real cuando $s \in C$ y el punto s describe la curva C cuando $0 \leq l \leq l_0$, se infiere que $l\,(s)$ mapea la curva C sobre el segmento $(0, l_0)$ del eje real en el plano l. En general, $s\,(l)$ será periódica ya que $s\,(0) = s\,(l_0)$ y $l\,(s)$ multiforme. Para nuestros propósitos basta considerar una rama de la función $l\,(s)$, digamos la que mapea C en $(0, l_0)$. Esta transformación deberá mapear el interior de C en la faja $0 \leq \mathrm{Re}\, l \leq l_0$, $\mathrm{Im}\, l > 0$ del plano l y el exterior de C en la faja $0 \leq \mathrm{Re} l \leq l_0$, $\mathrm{Im}\, l < 0$. Llamaremos estas fajas $l\,(\mathrm{I})$ y $l\,(\mathrm{E})$ respectivamente.

Si un punto $l \in l\,(\mathrm{I})$ se refleja sobre el segmento $(0, l_0)$, se transforma en el punto $l^* = l_i \in l\,(\mathrm{E})$, la imagen de l.

Por otra parte, hay un punto $s = s\,(l) \in \mathrm{I}$ en el interior de C que corresponde a l y un punto $s\,(l^*) = s\,(l_i) \in \mathrm{E}$ en el exterior que corresponde a la imagen $l_i = l^*$. Definimos este último punto como la reflexión s_i de s sobre C en el plano s.

$$s_i = s\,(l_i) = s\,(l)^* = \sigma_0\,(l^*) + i\,\omega_0\,(l^*) = \sigma_0\,(l)^* + i\,\omega_0\,(l)^* \qquad (56)$$

puesto que $\sigma_0\,(l)$ y $\omega_0\,(l)$ son reales cuando s es real. Así pues, en virtud de la correspondencia existente entre el plano s y la faja $0 \leq \mathrm{Re} l < l_0$ del plano l, una transformación puntual en esta última induce una transformación correspondiente en el plano s. En particular, la transformación del plano s que corresponde a una reflexión sobre $(0, l_0)$, la imagen de C, se ha definido como "reflexión sobre C". Las relaciones (56) implican

$$s_i^* = \sigma_0\,(l) - i\,\omega_0\,(l) \qquad (56a)$$

y además, puesto que $s = \sigma_0(l) + i\,\omega_0(l)$, se tendrá:

$$\sigma_0(l) = \frac{s + s_i^*}{2} \qquad \omega_0(l) = \frac{s - s_i^*}{2i} \tag{56b}$$

por otra parte, eliminando l de las ecuaciones de la curva se tendrá una relación de la forma

$$\psi(\sigma_0, \omega_0) = 0 \quad , \tag{57}$$

lo cual implica que para una cierta región del plano l [5] deberá verificarse

$$\psi[\,\sigma_0(l)\,,\ \omega_0(l)\,] = 0 \quad , \tag{57b}$$

y substituyendo (56b):

$$\psi\left(\frac{s + s_i^*}{2}\,,\ \frac{s - s_i^*}{2i}\right) = 0 \quad , \tag{57c}$$

de esta relación se obtiene

$$s_i^* = \varphi(s) \qquad s_i = \varphi(s)^* \quad , \tag{58}$$

que define la reflexión en el plano s respecto a C. A nosotros nos interesa la transformación $s \to \varphi(s)$ que manda cada punto $s \in I$ en la imagen conjugada s_i^* y resulta de dos reflexiones: una reflexión sobre C, $s \to s_i$ seguida de una reflexión sobre el eje real $s_i \to s_i^*$. La primera operación manda un punto s del interior a uno s_i del exterior. Sin embargo, si C es enteramente arbitraria, de $s_i \in E$ no se sigue que $s_i^* \in E$ y por tanto, la transformación $s \to \varphi(s)$ no necesariamente transforma el interior en el exterior de C. Para que esto ocurra, es decir, para que $\varphi(s) \in E$ cuando quiera que $s \in I$, es necesario y basta que E contenga con cada punto s_i su conjugada s_i^*, lo cual requiere que C sea simétrica respecto al eje real. Entonces, tanto I como E se transforman en sí mismos por conjugación.

En lo que sigue supondremos que C es simétrica respecto al eje real. Es de notarse que esta suposición no implica ninguna restricción verdadera en la discusión de funciones transferentes de sistemas físicos reales, puesto que en tales, la parte real $u(\sigma, \omega) = u(\sigma, -\omega)$ es simétrica respecto al eje real y la imaginaria $v(\sigma, \omega) = -v(\sigma, -\omega)$ es antisimétrica, así que basta considerarlas en un solo semiplano.

Con esta suposición, la función ψ en (51) deberá satisfacer la relación.

$$\psi(\sigma_0, -\omega_0) = \psi(\sigma_0, \omega_0) = 0 \quad , \qquad (59)$$

lo cual implica que además de (57c), se cumple la relación

$$\psi\left(\frac{s_i^* + s}{2}, \frac{s_i^* - s}{2i}\right) = 0 \quad , \qquad (59a)$$

de donde se sigue que

$$s = \varphi(s_i^*) \quad , \qquad (59b)$$

pero como en virtud de (58), $s_i^* = \varphi(s)$ será ahora

$$\varphi[\varphi(s)] = s$$

$$\qquad (60)$$

ó

$$\varphi = \varphi^{-1}$$

es decir, que en este caso φ es su propia inversa. Además, de la realidad de ψ se infiere

$$\psi(\sigma_0^*, \omega_0^*) = 0 \quad , \qquad (61)$$

por tanto,

$$\psi \left(\frac{s_i + s^*}{2} , \frac{s^* - s_i}{2i} \right) = 0 \qquad (61a)$$

de donde

$$s_i = \varphi (s^*) \qquad (61b)$$

o sea que φ transforma conjugados en conjugados. En particular, la imagen de un punto real es real.

Puesto que $\varphi (s)$ determina una transformación biunívoca entre el interior I y el exterior E de C, debe haber un punto $s_c \in I$ que sea la imagen del punto $s = \infty$ de E, para el cual deberá verificarse

$$\varphi (s_c) = \infty \qquad (62)$$

además $s_c = \sigma_c$ deberá ser real. La función $\varphi (s)$ tiene pues un polo real y sólo uno en I.

Sea ahora $F (s)$ una función analítica en I que se hace real para s real. Entonces

$$F (s_c) = F (\sigma_c) = u_c \qquad (63)$$

es real. Definimos:

$$F_+ (s) = F (s) - F (s_c) = u - u_c + i\, v = u_i + i\, v_i \qquad (64)$$

F_+ es analítica en I y tiene un cero en s_c

Por medio de la transformación φ podemos definir una nueva fun - ción $F_- (s)$ a partir de F_+ mediante la relación:

$$F_- [\, \varphi (s) \,] = F_+ (s) \qquad (66)$$

y hacemos

$$F_-(s) = -u_e - i\,v_e \tag{66a}$$

por construcción, F_- toma en cada punto $\varphi(s) \in E$ el valor de F_+ en $s \in I$ y es por tanto analítica en E.

En la vecindad de s_c,

$$F(s) \sim F(s_c) + (s - s_c)\,F'(s_c)$$

por tanto,

$$F_+(s) \sim (s - s_c)\,F'(s_c)$$

y puesto que s_c es un polo de φ, en la vecindad de s_c será

$$\varphi(s) \sim \frac{a}{s - s_c} \qquad ,$$

o sea

$$s - s_c = \frac{a}{\varphi} \qquad .$$

Entonces

$$F_-(\varphi) = F_+(s) \sim (s - s_c)\,F'(s_c) = \frac{a\,F'(s_c)}{\varphi} = \frac{k}{\varphi} \qquad ,$$

es decir, cuando $s \to \infty$,

$$F_-(s) \sim \frac{k}{s} \tag{67}$$

y posee un cero por lo menos de primer orden en ∞. Puesto que para puntos

$s_0 \in C$ es

$$\varphi\ (s_0) = s_0^* \tag{68}$$

se tendrá:

$$F_-\ [\ \varphi\ (s_0)\ ] = F_-\ (s_0^*) = -\ u_e\ (\sigma_0, \omega_0) + i\ v_e\ (\sigma_0, \omega_0) =$$

$$= F_+\ (s_0) = u_i\ (\sigma_0, \omega_0)\ +\ i\ v_i\ (\sigma_0, \omega_0)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} u_e\ (\sigma_0, \omega_0) &= -\ u_i\ (\sigma_0, \omega_0) \\ v_e(\sigma_0, \omega_0) &= v_i\ (\sigma_0, \omega_0) \end{aligned} \tag{69}$$

Hágase ahora

$$f\ (s) = F_+\ (s) + F_-\ (s) \tag{70}$$

entonces

$$f\ (s_0) = (u_i\ +\ i\ v_i\ -\ u_e - i\ v_e)_{s_0} = 2\ u_i\ (\sigma_0, \omega_0) =$$

$$= 2\ \ [\ u\ (\sigma_0, \omega_0) - u_c\ ] \tag{71}$$

se hace real en C . Así mismo

$$F_I\ (s) = \tfrac{1}{2}\ \ [\ F_+\ (s) - F_-\ (s)\ ] \tag{72}$$

$$F_I\ (s_0) = i\ v_i\ (\sigma_0, \omega_0) \tag{73}$$

se hace imaginaria pura en C .

Considérese ahora la integral:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(s_0)\, ds_0}{s_0 - s} = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{u_i(\sigma_0, \omega_0)}{s_0 - s}\, ds_0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_+(s_0) + F_-(s_0)}{s_0 - s}\, ds_0 \qquad \text{(a)}$$

para un punto $s \in I$, como F_+ es analítica en I, el contorno C puede deformarse hasta rodear al punto s y por tanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_+(s_0)}{s_0 - s}\, ds_0 = F_+(s) \qquad \text{(b)}$$

Como F_- es analítica fuera de C y se comporta en el infinito al menos como k/s, el contorno C puede deformarse hasta convertirse en un círculo de radio $R \to \infty$ y será por tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_-(s_0)}{s_0 - s}\, ds_0 = 0 \qquad \text{(c)}$$

por tanto para $s \in I$

$$J = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{u_i(\sigma_0, \omega_0)}{s_0 - s}\, ds_0 = F_+(s) \quad . \qquad \text{(d)}$$

Para $s \in E$, $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_+(s_0)}{s_0 - s}\, ds_0 = 0$ puesto que siendo F_+ analítica en I, el contorno C puede contraerse hasta un punto.

En cuanto a $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_-(s_0)}{s_0 - s}\, ds_0$, el contorno C puede completarse por un círculo en ∞ de donde se sigue, ya que F_- es analítica en la región incluida y el círculo en ∞ no da contribución ,

$$F_-(s) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_-(s_0)}{s_0 - s} \, ds_0$$

y entonces,

$$J = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{u_i(\sigma_0, \omega_0)}{s_0 - s} \, ds_0 = -F_-(s) \qquad \text{(e)}$$

para $s \in E$. En resumen:

$$\frac{1}{\pi i} \oint \frac{u_i(\sigma_0, \omega_0)}{s_0 - s} \, ds_0 = \begin{cases} F_+(s) & \text{para} \quad s \in I \\ -F_-(s) & \text{para} \quad s \in E \end{cases} \qquad (74)$$

Ahora, para $s \in I$

$$F_+(s) = F(s) - F(s_c) = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{u(\sigma_0, \omega_0) - u_c}{s_0 - s} \, ds_0 =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \oint \frac{u(\sigma_0, \omega_0)}{s_0 - s} \, ds_0 - 2u_c \quad ,$$

de donde

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{u(\sigma_0, \omega_0)}{s_0 - s} \, ds_0 - F(s_c)} \qquad (75)$$

$(s \in I)$.

Puesto que $F(s)$ puede expresarse como la integral sobre C de una distribución $\mu(l)$ que es solución de la ecuación integral (11), o bien en la forma (34) con $f(s_0) = 2\pi\mu(l)$, de (75) se ve que

$$f(s_0) = 2(u(\sigma_0, \omega_0) - u_c) = 2\pi\mu(l) \tag{75a}$$

es la solución de la ecuación integral. Esta solución está dada por (70).

VII. CONSTRUCCION DE LA SOLUCION

Prolongando analíticamente (75a) escribimos

$$f(s) = 2(u(s) - u_c) = 2\pi\mu(s) = F_+(s) + F_-(s) \quad ,$$

de donde

$$\boxed{\mu(s) = \frac{u(s) - u_c}{\pi}} \tag{76}$$

o sea: dada $u(\sigma_0, \omega_0)$ sobre C y siendo $u(s)$ su prolongación analítica $u(s)$, la ecuación (76) proporciona una función $\mu(s)$ que, sobre la curva C_1 se reduce a $\mu(\sigma_0, \omega_0) = \mu(l)$ que resuelve la ecuación integral.

Mas aún, siendo

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \frac{1}{2\pi}\left[F_+(s) + F_-(s)\right] \\ u(s) &= \tfrac{1}{2}\left[F_+(s) + F_-(s)\right] + u_c \end{aligned} \tag{77}$$

Considerando que bajo la transformación $s \to \varphi(s)$, F_+ se transforma en F_-

y F_- en F_+, se sigue que

$$\begin{aligned} \mu\,[\,\varphi(s)\,] &= \mu(s) \\ u\,[\,\varphi(s)\,] &= u(s) \end{aligned} \tag{78}$$

son invariantes bajo la transformación φ. Esta, con la transformación idéntica forma un grupo $\mathcal{G}_c$ con elementos 1 y φ y la tabla de multiplicación

$\mathcal{G}_c$	1	φ
1	1	φ
φ	φ	1

(78) muestra entonces que $u(s)$ y $\mu(s)$ son automorfas respecto al grupo $\mathcal{G}_c$. En un trabajo posterior veremos que cuando el contorno C se forma por varios arcos, el grupo $\mathcal{G}_c$ se complica.

Terminaremos ilustrando lo expuesto con un sencillo ejemplo: sea C el círculo unidad con centro en el origen y sea

$$u(\gamma,\lambda) = \frac{\gamma + a}{(\gamma + a)^2 + \lambda^2} \qquad a \text{ una constante},$$

siendo $s_0 = \gamma + i\lambda$ un punto del círculo y $u(\gamma,\lambda)$ la parte real de una función $F(s)$ que se busca.

La ecuación del círculo unidad es

$$\begin{aligned} \gamma &= \cos l \\ \lambda &= \operatorname{sen} l \end{aligned} \qquad s_0 = e^{il} \qquad 0 \le l \le 2\pi \quad .$$

Se considera entonces

$$s = e^{il} \qquad l = -i \log s$$

que mapea el círculo unidad en $0 \leq l \leq 2\pi$ y el plano s en la faja $0 \leq \mathrm{Re}\, l \leq 2\pi$ del plano l. Ahora,

$$s_i = s(l^*) = (\cos l)^* + i(\mathrm{sen}\, l)^*$$

$$\varphi(s) = s_i^* = \cos l - i\, \mathrm{sen}\, l = e^{-il} = \frac{1}{s}$$

es la transformación correspondiente. Además

$$\gamma = \cos l = \tfrac{1}{2}(e^{il} + e^{-il}) = \tfrac{1}{2}(s + \frac{1}{s})$$

$$\lambda = \mathrm{sen}\, l = \frac{1}{2i}(e^{il} - e^{-il}) = \frac{1}{2i}(s - \frac{1}{s}).$$

y substituyendo en $u(\gamma, \lambda)$, se obtiene que la prolongación analítica es

$$u(s) = \tfrac{1}{2} \frac{s^2 + 2as + 1}{as^2 + (1 + a^2)s + a} \quad ,$$

y se puede verificar su invariancia bajo la transformación $s \to \frac{1}{s}$. El punto s_c, imagen del ∞, es el origen

$$u(0) = \frac{1}{2a}$$

La función pertinente es

$$u(s) - u(0) = \frac{1}{2a^2} \quad \frac{(a^2 - 1)s}{s^2 + \frac{1 + a^2}{a} s + 1} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{a^2}{s + a} - \frac{1}{s + \frac{1}{a}}\right)$$

que debe ahora descomponerse en la suma de dos funciones: una analítica dentro, otra analítica fuera del círculo, que se transforman una en otra por la substitución $s \to \frac{1}{s}$

Si $a > 1$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+a}$ es analítica dentro, $-\frac{1}{2} \frac{1}{a(1+as)}$ lo es fuera. Esta última se comporta cuando $s \to \infty$ como $-\frac{1}{2a^2 s}$ y tiene por tanto el comportamiento correcto. Entonces

$$F_-(s) = \frac{-1}{a(1+as)} = -\frac{1/s}{a\left(\frac{1}{s}+a\right)}$$

$$F_+(s) = \frac{-s}{a(s+a)}$$

igualando:

$$\frac{-s}{a(s+a)} + \frac{-1}{a(1+as)} + 2u_c = \frac{1}{a} + \frac{1}{s+a} - \frac{1}{a(1+as)},$$

resulta

$$u_c = \frac{1}{a}$$

Finalmente,

$$F(s) = F_+(s) + u_c = \frac{-s}{a(s+a)} + \frac{1}{a} = \frac{1}{s+a}$$

Es interesante comparar este método con la evaluación de la integral de $u(\gamma, \lambda)$ sobre C

REFERENCIAS

1. Darlington, Bell System Tech.Journ. April 1951
2. Lovitt, Linear Integral Eauations, New York , 1924
3. Bode, Network Analysis and Feedback Amplifier Design, New York, 1945
4. Cerrillo, Research Laboratory of Electronics, Mass Inst. of Tech., Report No. 246
5. Courant, Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie, Berlin, 1929