LA INTERACCION SPIN-ORBITA ENTRE NUCLEONES Y EL ACOPLAMIENTO SPIN-ORBITA EN EL MODELO DE CAPAS DEL NUCLEO

Marcos Moshinsky

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México
e Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Junio 30, 1958)

RESUMEN

In this paper we discuss the origin of the spin orbit coupling force in nuclei. Taking the two particle spin orbit potential between nucleons

$$\xi\,(\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|\,)\,[\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\tfrac{1}{2}\,(\vec{p}-\vec{p}\,')\,]\cdot(\vec{s}+\vec{s}\,')\ ,$$

we show that the spin orbit force in nuclei has a strength proportional to the first moment I_1 *of the potential* ξ, *i.e., to*

$$I_1 = \int_0^\infty \xi\,(r)\,r^4 dr \quad .$$

The value of I_1 *has been obtained from the experimental data for heavy nuclei by Blin-Stoyle, and it is*

$$I_1 = -141 \text{ Mev } f^5 \quad , \quad (f = 10^{-13} \text{ cm}) \quad .$$

For the two particle spin orbit potential of Gammel and Thaler, we show that I_1 *is given by*

$$I_1 = -9.44 \text{ Mev } f^5 \quad .$$

For the two particle spin orbit potential of Signell and Marshak we show that I_1 *has the value*

$$I_1 = -252 \text{ Mev } f^5 \quad .$$

While neither potential gives the experimental value of I_1*; the potential of Signell and Marshak gives at least the correct order of magnitude for the spin orbit coupling force requiered by the nuclear shell model.*

I. INTRODUCCION

La fuerza de acoplamiento spin orbita en el potencial común empleado en el modelo de capas del núcleo, es fundamental para la utilización efectiva de este modelo. Se han llevado a cabo muchos trabajos [1] para obtener este acoplamiento spin orbita a partir de las fuerzas entre pares de nucleones. En un principio se pensó que la fuerza tensorial entre pares de nucleones podría dar lugar el acoplamiento spin orbita, pero posteriormente, la introducción de la interacción de spin orbita entre pares de nucleones [2,3] sugirió la posibilidad que ésta fuera la responsable de la fuerza de acoplamiento spin orbita en el modelo de capas del núcleo [4].

En el presente trabajo vamos a rederivar la fuerza de acoplamiento spin orbita del modelo de capas, a partir de los potenciales de acoplamiento spin orbita entre pares de nucleones, utilizando la hipótesis de que estos potenciales son de corto alcance[5]. Una vez derivada la fuerza de acoplamiento spin orbita, obtendremos su magnitud para los potenciales de acoplamiento spin orbita propuestos por Gammel y Thaler[2] y por Signell y Marshak[3]. Finalmente, compararemos esas magnitudes con la magnitud para la fuerza de acoplamiento spin orbita que se obtiene de los datos experimentales para núcleos pesados, cuando se hacen suposiciones razonables sobre la distribución de la materia nuclear[4].

II. INTERACCION DE UN NUCLEON CON UNA CAPA CERRADA DE NUCLEONES

Una manera razonable de derivar la fuerza residual que puede sufrir un nucleón por la acción de los otros nucleones del núcleo, consiste en considerar el potencial entre el nucleón y una capa cerrada de nucleones y promediar este potencial sobre la capa cerrada. Designemos por $\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}$ ($\vec{s} = (2\hbar)^{-1}\vec{\sigma}$), el vector de posición, cantidad de movimiento, y de spin del nucleón que se está considerando, y por $\vec{r}_i$, $\vec{p}_i$, $\vec{s}_i$ los correspondientes vectores para los nucleones de las capas cerradas. Si consideramos a la capa cerrada en acoplamiento l,s, el índice i toma los valores $i = 1,2, \ldots 2(2l+1)$.

Designaremos ahora por V un potencial general entre el nucleón objeto de estudio y uno de los nucleones de la capa cerrada, el cual puede depender tanto de la distancia relativa, como del momentum relativo y de los spines de los nucleones, y tendrá por lo tanto, la forma[6]

$$V(\vec{r}-\vec{r}_i\,;\ \vec{p}-\vec{p}_i\ ;\ \vec{s}\,,\ \vec{s}_i) \tag{1}$$

El potencial de interacción entre el nucleón y la capa cerrada será

$$U = \sum_{i=1}^{2(2l+1)} V(\vec{r}-\vec{r}_i\,;\ \vec{p}-\vec{p}_i\ ;\vec{s}\,,\ \vec{s}_i) \tag{2}$$

Ahora vamos a considerar la función de onda $\psi(r_1, \ldots r_{2(2l+1)}, \sigma_1, \ldots \sigma_{2(2l+1)})$ de la capa cerrada, que como es bien sabido, se obtendría formando el determinante de las soluciones normalizadas de una partícula[7]

$$|n l m_l m_s> = R_{nl}(r_i)\, Y_{lm_l}(\theta_i, \varphi_i)\, \delta_{\sigma_i m_s} , \tag{3}$$

para los valores $m_l = -l, \ldots, l$, $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, y dividiendo entre $\{[2(2l+1)]!\}^{\frac{1}{2}}$ Con la función de onda ψ obtenemos el valor de expectación de U para una capa cerrada, y de allí una cierta función $\bar{U}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s})$, que sería el potencial equivalente. Ahora bien, en el caso de una capa cerrada, el valor de expectación $\bar{U}$ toma la forma particularmente simple[7]

$$\bar{U}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s})$$

$$= \sum_{m_l=-l}^{l} \sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int \{ R_{nl}(r')\, Y^{*}_{lm_l}(\theta', \varphi')\, \delta_{\sigma' m_s}\, V(\vec{r}-\vec{r}'; \vec{p}-\vec{p}'; \vec{s}, \vec{s}'_{\sigma'\sigma''})$$

$$R_{nl}(r')\, Y_{lm_l}(\theta', \varphi')\, \delta_{\sigma'' m_s}\} \, d\tau' \tag{4}$$

Consideremos ahora el caso particular de que V sea una fuerza de acoplamiento spin orbita entre pares de nucleones, esto es

$$V(\vec{r}-\vec{r}'; \vec{p}-\vec{p}'; \vec{s}, \vec{s}') = \xi(|\vec{r}-\vec{r}'|)\, [(\vec{r}-\vec{r}') \times \tfrac{1}{2}(\vec{p}-\vec{p}')] \cdot (\vec{s}+\vec{s}') . \tag{5}$$

Entonces tenemos que el valor de expectación de la U correspondiente está dado por

$$\bar{U}(\vec{r},\vec{p},\vec{s})$$

$$= \sum_{m=-l}^{l} \int \{ R_{nl}(r')\, Y^{*}_{lm}(\theta',\varphi')\, \xi(|\vec{r}-\vec{r}'|)\, [(\vec{r}-\vec{r}') \times \tfrac{1}{2}(\vec{p}-\vec{p}')] \cdot$$

$$\cdot [2\vec{s} + \mathrm{tr}\,\vec{s}']\, R_{nl}(r')\, Y_{lm}(\theta',\varphi') \}\, d\tau' \qquad (6)$$

Pero las trazas de $\vec{s}'_x$, $\vec{s}'_y$, $\vec{s}'_z$ son 0 por la forma de las matrices de Pauli, y por lo tanto, podemos escribir

$$\bar{U}(\vec{r},\vec{p},\vec{s})$$

$$= \vec{s} \cdot \sum_{m=-l}^{l} \int \{ R_{nl}(r')\, Y^{*}_{lm}(\theta',\varphi')\, \xi(|\vec{r}-\vec{r}'|).$$

$$[\vec{l} - \vec{r}' \times \vec{p} - \vec{r} \times \vec{p}' - \vec{l}']\, R_{nl}(r')\, Y_{lm}(\theta',\varphi') \}\, d\tau'$$

donde

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}\ , \quad \vec{l}' = \vec{r}' \times \vec{p}' \quad . \qquad (7)$$

Analicemos ahora las integrales que aparecen en (7). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las coordenadas del sistema de referencia están orientadas en tal forma que el vector $\vec{r}$ está en la dirección del eje de las z , esto es

$$\vec{r} = r\vec{k}\ , \qquad (8)$$

donde $\vec{k}$ es el vector unitario en la dirección del eje de las z. En tal caso tenemos que

$$\xi(|\vec{r}-\vec{r}'|) = \xi(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'})\ , \qquad (9)$$

y ξ no depende de φ'. Por lo tanto, los elementos de matriz en (7) serán diferentes de 0 sólo para aquellas componentes de $\vec{r}'$, $\vec{p}'$ y $\vec{l}'$ que no dependan de φ', lo que indica que debemos reemplazar $\vec{r}'$, $\vec{p}'$ y $\vec{l}'$ por

$$\vec{r}' \rightarrow \vec{k}\, z' \;,\; \vec{p}' \rightarrow \vec{k}\, p'_z \;,\; \vec{l}' \rightarrow \vec{k}\, l'_z \tag{10}$$

Pero en (7) vemos que

$$\vec{r} \times \vec{p}' \rightarrow \vec{r} \times \vec{k}\, p'_z = \vec{k}\, r \times \vec{k}\, p'_z = 0 \tag{11}$$

Por otro lado, el valor de expectación de l'_z es $\hbar m$ y por lo tanto,

$$\int \{ R_{nl}(r')\, Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\, \xi\left(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'}\right)$$

$$l_z\, R_{nl}(r')\, Y_{lm}(\theta', \varphi') \}\, d\tau'$$

$$= m \int \{ R_{nl}(r')\, (-1)^m\, Y_{l\,-m}(\theta', \varphi')\, \xi\left(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'}\right) R_{nl}(r')$$

$$Y_{lm}(\theta', \varphi') \}\, d\tau' \tag{12}$$

De (12) vemos que si cambiamos m por $-m$ en el miembro izquierdo, el derecho sólo cambia de signo y la suma sobre de términos de tipo (12), para $m = -l, \ldots l,$ nos da cero. Finalmente, escribiendo

$$\vec{k}\, z' = \vec{k}\, r\, \frac{z'}{r} = \vec{k}\, r\, \frac{rr' \cos\theta'}{r^2} = \vec{r}\, \frac{(\vec{r}\,.\,\vec{r}')}{r^2} \;, \tag{13}$$

vemos que el valor de expectación del potencial residual $\bar{U}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s})$ que actúa sobre el nucleón fuera de la capa cerrada, toma la forma

$$\bar{U}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}) = V(r)\, \vec{l} \cdot \vec{s} \tag{14}$$

donde

$$V(r) = \sum_{m=-l}^{l} \int \psi^{*}_{nlm}(\vec{r}')\, \xi(|\vec{r}-\vec{r}'|)\, \vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')\, r^{-2}\, \psi_{nlm}(\vec{r}')\, d\tau', \quad (15)$$

$$\psi_{nlm}(\vec{r}') = R_{nl}(r')\, Y_{lm}(\theta', \varphi') \quad (16)$$

En la siguiente sección calcularemos $V(r)$ en la suposición que $\xi(|\vec{r}-\vec{r}'|)$ es de corto alcance en comparación con el radio nuclear, utilizando el método para fuerzas de corto alcance desarrollado recientemente por el autor[5].

III. LA FUERZA DE ACOPLAMIENTO SPIN-ORBITA EN LA APROXIMACION DE CORTO ALCANCE

Haciendo el cambio de variable

$$\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{r}' \quad (17)$$

la integral (15) toma la forma

$$V(r) = \sum_{m=-l}^{l} \int \psi^{*}_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'')\, \xi(r'')\, r^{-2}\, (\vec{r}\cdot\vec{r}'')\, \psi_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'')\, d\tau''. \quad (18)$$

Si suponemos ahora que $\xi(r'')$ es de corto alcance comparado con el radio del núcleo, esto es, con el valor medio de r para el estado $\psi_{nlm}(\vec{r})$, podemos desarrollar $\psi_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'')$ como una serie de potencias alrededor del punto $\vec{r}'' = 0$, obteniendo

$$\psi_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'') = [\psi_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'')]_{r''=0} + \vec{r}''\cdot[\nabla''\psi_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'')]_{r''=0} + \ldots \quad (19)$$

como $\nabla'' \psi(\vec{r}-\vec{r}'') = -\nabla\psi(\vec{r}-\vec{r}'')$, podemos escribir

$$\psi_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'') = \psi_{nlm}(\vec{r}) - \vec{r}'' \cdot \nabla\psi_{nlm}(\vec{r}) + \ldots , \tag{20}$$

y para la densidad de probabilidad tenemos finalmente

$$\psi^*_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'')\,\psi_{nlm}(\vec{r}-\vec{r}'')$$

$$= \rho_{nlm}(\vec{r}) - \vec{r}'' \cdot \nabla\rho_{nlm}(\vec{r}) + \ldots , \tag{21}$$

donde

$$\rho_{nlm}(\vec{r}) = \psi^*_{nlm}(\vec{r})\,\psi_{nlm}(\vec{r}) . \tag{22}$$

Sustituyendo (21) en (18) obtenemos

$$V(r) = \sum_{m=-l}^{l} r^{-2}\rho_{nlm}(\vec{r}) \int \xi(r'')(\vec{r}''\cdot\vec{r})\,d\tau'' -$$

$$- \sum_{m=-l}^{l} r^{-2}\nabla\rho_{nlm}(\vec{r}) \cdot \int \xi(r'')(\vec{r}\cdot\vec{r}'')\,\vec{r}''\,d\tau'' + \ldots \tag{23}$$

Al promediar sobre las direcciones de $\vec{r}''$ vemos que el primer término en (23) es 0. Para el segundo término escogemos de nuevo $\vec{r}$ en la dirección del eje de las z y por lo tanto, al promediar sobre φ'' sólo nos queda la contribución de la parte $\vec{k}\,z''$ del vector $\vec{r}''$. Utilizando (13) podemos entonces escribir

$$V(\vec{r}) = -\sum_{m=-l}^{l} r^{-2}(\vec{r}\cdot\nabla\rho_{nlm}(\vec{r}) \int \xi(r'')\,r^{-2}(\vec{r}\cdot\vec{r}'')^2\,d\tau'' . \tag{24}$$