

UNA NUEVA EVALUACION DE LOS CONOS SENCILLOS DE SOMBRA

Ruth Gall

Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México

•

Instituto Nacional de la Investigación Científica

Jaime Lifshitz † *

Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: 5 abril 1960)

RESUMEN

Simple shadow cones for ten points of incidence have been evaluated for several latitudes, longitudes and proton energies. The trajectories were computed in the earth's dipole and quadrupole magnetic field. The purpose of this new computation was a) to calculate the correct simple shadow cones and estimate the error in the cones calculated by Schremp in 1938 and b) to study the longi-

* Jaime Lifshitz murió el 20 de mayo de 1959. El otro autor se hace responsable de parte del trabajo y del texto.

tude effect of the simple shadow cones.

A new computation of simple shadow cones has also recently been made by J. E. Kasper from the University of Iowa. The cones calculated by Kasper and Schremp present no longitude effect, as these authors considered the motion of charged particles in the magnetic field of a central dipole.

The agreement between Kasper's and our cones and the discrepancy with the Schremp cones demonstrates that the Schremp cones are erroneous and predict a shadow effect of the earth larger than the correct one. The discrepancy between our cones and Schremp's is mostly due to the error in the Schremp calculations and only in a smaller degree to the longitude effect.

The comparison between Kasper's and our cones allows to estimate the longitude effect. This effect is important at low latitudes for small particle energies and decreases with the increase of latitude. The effect of the earth's shadow is smaller for the considered smaller longitude. The shadow cone of the dipole field falls between the two cones corresponding to two different longitudes of the dipole and quadrupole magnetic field.

The limitations of the method of integration when used for higher energies, are discussed.

INTRODUCCION

Durante el trabajo sobre las órbitas de la Radiación Cósmica secundaria¹ y sobre los conos sencillos del albedo² se ha encontrado una importante discrepancia entre los resultados obtenidos y los conos calculados por Schremp³. Para las altas latitudes las direcciones límites de los conos sencillos del albedo parecían ocurrir a ángulos cenitales mucho mayores que las direcciones límites de los conos de Schremp. Este resultado hacía sospechar que el efecto de la sombra de la tierra es menor que el estimado por Schremp.

Se ha informado sobre esta discrepancia en el Congreso de Radiación Cósmica de Varenna (1957) y en una carta al Physical Review⁴. Desde hace algún tiempo varios experimentadores eran de opinión que los conos de sombra an-

teriormente calculados eran erróneos. Al efectuar la integración numérica⁵ de una órbita, que según los cálculos de Schremp debiera estar dentro del cono de sombra, se encontró que estaba fuera de él.

Los conos sencillos de sombra calculados por Schremp han servido de guía a los investigadores y experimentadores de Radiación Cósmica desde 1939. Al sospechar que adolecen de errores, pareció oportuno emprender un nuevo cálculo. Los resultados constituyen el tema de este artículo.

Independientemente de nuestro grupo en México, E.J. Kasper, de la Universidad de Iowa, emprendió una evaluación aún más extensa de los conos sencillos de sombra. Los resultados de este trabajo han sido publicados recientemente⁶.

Tanto Schremp como Kasper han utilizado el modelo del *dipolo central* para representar el campo magnético terrestre. Las ecuaciones de movimiento de partículas cargadas en el campo del dipolo admiten la constante de movimiento γ proporcional al momento angular de la partícula y permiten la introducción de la unidad de longitud llamada Störmer⁷. A causa de la simetría axial del campo del dipolo, no existe el efecto de longitud. En el presente trabajo el campo geomagnético está representado por el campo del *dipolo y cuadrupolo* ambos excéntricos⁸. La comparación entre los conos calculados por Kasper y por nosotros permite estudiar el efecto de longitud en los conos sencillos de sombra debido a la excentricidad del punto de residencia del campo magnético y al cuadrupolo. La comparación con los conos de Schremp permite estimar por un lado, el error cometido por Schremp y por el otro el mencionado efecto de longitud. No se ha hecho ningún intento de estudiar la naturaleza del error en los cálculos de Schremp.

En el presente trabajo se ha seguido el método de integración utilizado previamente para la evaluación del albedo. Los inconvenientes de este método para la estimación de órbitas de energías más altas están discutidos en la página No. 63. La razón por la cual no se utilizó un método de integración más apropiado para el cálculo de los conos sencillos de sombra, se debió a que este último trabajo surgió como una continuación del trabajo del albedo.

DEFINICIONES DE LOS CONOS

Las siguientes definiciones y observaciones pueden resultar de utilidad.

Se define el primer cono del albedo como el ángulo sólido de direcciones a lo largo de las cuales las partículas de energía dada llegan al punto de incidencia procedentes de otro punto sobre la tierra, sin tener ningún mínimo local intermedio. Las direcciones límites tienen un mínimo local intermedio tangente a la superficie de la tierra.

Se define el cono sencillo de sombra como el ángulo sólido de direcciones a lo largo de las cuales partículas de energía dada llegarían del infinito al punto de incidencia atravesando parte de la tierra impenetrable, sin tener ningún mínimo local intermedio. La frontera del cono sencillo de sombra está formada por trayectorias que vienen del infinito y son tangentes a la tierra antes de llegar al punto de incidencia.

Los conos sencillos de sombra sólo existen para energías permitidas para partículas que vienen del infinito⁷. Los conos del albedo existen tanto para las energías permitidas como para las prohibidas.

Para altas latitudes, a las que pueden llegar partículas de muy bajas energías que vienen del infinito, los conos del albedo y los conos sencillos de sombra coinciden.

CALCULO DE LOS CONOS SENCILLOS DE SOMBRA

La determinación de los conos sencillos de sombra está basada en el cálculo de 955 trayectorias de protones en el campo magnético terrestre.

No se ha encontrado ninguna integral aparte de la que corresponde a la conservación de la energía cinética; por lo tanto, no se ha podido introducir una unidad de longitud análoga a la de Störmer.

Eligiendo velocidad unitaria y por unidad de longitud el diámetro de la tierra, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = C \frac{d \bar{r}}{dt} \times \left[\nabla (z/r^3) + \alpha \nabla \frac{xy}{r^5} \right] \quad (1)$$

donde C es inversamente proporcional a la rigidez magnética de la partícula: $C = -m_1 a q / 4pc$ donde a es el radio terrestre, igual a 6.371×10^8 cm, q es la carga del protón, c la velocidad de la luz, p la cantidad de movimiento relativista de la partícula, $\alpha = 3m_2/4m_1$ una constante; aquí $m_1 = M_d/a^3 = 0.3097$ Gauss, $m_2 = M_c/a^4 = 0.0224$ Gauss, y M_d, M_c son los momentos del dipolo y cuadripolo respectivamente.

El modelo del campo magnético es el de Schmidt⁹ y Chargoy⁸. En este modelo el campo está engendrado por un dipolo y un cuadripolo, ambos excéntricos, cuyos ejes forman un sistema ortogonal. El origen de este sistema reside en el punto $(-344, 150, 96)$, donde las cifras representan kilómetros referidos al sistema geográfico terrestre*. Se utilizó este sistema geomagnético como el sistema de referencia.

Se eligieron 10 puntos de incidencia sobre la superficie terrestre (véase la tabla 1).

TABLA 1

PUNTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	30°N	30°N	40°N	40°N	50°N	50°N	60°N	60°N	70°N	70°N
φ	22.5°E	112°5E	22.5°E	112°5E	22.5°E	112°5E	22.5°E	112°5E	0°	90°E
H_c/H_d %	8.60	8.20	6.25	6.39	4.58	4.64	3.19	3.20	2.00	1.90
N	145	108	82	82	101	101	47	47	144	98
ξ	0.1 0.4 0.5 0.9	0.4 0.5 0.9	0.3 0.5	0.3 0.5	0.3 0.5	0.3 0.5	0.4	0.4	0.1 0.4	0.1 0.4
Λ	20.45°N	26.55°N	30.55°N	36.77°N	40.62°N	46.83°N	50.65°N	56.72°N	61.75°N	63.43°N
Φ	95.25°W	8.75°W	94.62°W	11.25°W	93.77°W	14.45°W	92.78°W	19.16°W	107.18°W	43.67°W

LOS PUNTOS DE INCIDENCIA

* Basado sobre el mapa del campo geomagnético de 1945.

λ es la latitud geomagnética, φ la longitud geomagnética, H_d , H_c los campos del dipolo y del cuadripolo respectivamente, N el número de órbitas. ξ energía en Störmers, Λ , Φ latitud y longitud geográficas.

Las órbitas fueron calculadas para protones de energías: 0.172, 4.49, 8.61, 14.00, 47.30 Gev que corresponden a 0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.9 Störmers respectivamente.

Se calculan las órbitas por integración numérica usando el método sugerido por Milne¹⁰. Las fórmulas de integración son:

$$f_n = f_{n-4} + (4h/3) (2f'_{n-1} - f'_{n-2} + 2f'_{n-3}) \quad \text{predicción} \quad (2)$$

$$f_n = f_{n-2} + (h/3) (f'_n + 4f'_{n-1} + f'_{n-2}) \quad \text{corrección} \quad (3)$$

Los intervalos entre puntos equidistantes fueron:

$$h = 0.0072 = 91.73 \text{ Km para las energías mayores que } 0.172 \text{ Gev,}$$

$$h = 0.0012 = 15.29 \text{ Km para las energías de } 0.172 \text{ Gev.}$$

Para los intervalos escogidos y en cada punto de la trayectoria, se calculan el campo y la posición solamente una vez. La velocidad se calcula primero por la predicción de la Ec. (2) y después por la corrección de la Ec. (3). De estas dos aproximaciones de la velocidad, se obtienen por medio de la ecuación (1), dos valores de la aceleración.

Se ha extendido el cálculo a un número suficiente de puntos de recorrido para que la órbita presente características que se puedan analizar. El máximo recorrido a lo largo de las trayectorias fue de un radio terrestre aproximadamente. Los cálculos se hicieron en la máquina calculadora perforadora I.B.M., modelo 602 A.

Las direcciones límites de los conos sencillos de sombra se obtienen por interpolación de órbitas vecinas de la frontera del cono, una dentro y otra fuera;

se escogen órbitas con el mismo ángulo azimutal y diferente ángulo cenital. Se comprueba la tangencia a la tierra de la órbita límite efectuando la transformación de las coordenadas del punto de tangencia de geomagnéticas a geográficas.

LIMITACION DEL METODO PARA ALTAS ENERGIAS

Como ya se ha mencionado en la introducción, para calcular los conos sencillos de sombra se ha utilizado el mismo método de integración numérica que para las órbitas del albedo. Se efectúa el cálculo simultáneo a lo largo de todas las órbitas escogidas. En el método utilizado el cálculo de los primeros puntos es el más laborioso. Por consiguiente una vez escogidas las direcciones de incidencia conviene realizar el cálculo completo. Solamente después de haber efectuado la integración a lo largo de muchos puntos de recorrido se puede estimar si las direcciones de incidencia previamente escogidas corresponden a las vecinas a los límites de los conos sencillos de sombra.

Al iniciar el presente estudio se escogieron direcciones de incidencia vecinas de las direcciones límites del cono de Schremp. Sin embargo, como el cono de Schremp resultó ser erróneo, sobre todo para ángulos azimutales comprendidos entre 45° y 135° y para altas latitudes, se ha encontrado al terminar el cálculo, que varias de las órbitas estudiadas inciden bajo direcciones alejadas de las direcciones límites. Debido a esto no se han podido obtener los conos para $\lambda = 70^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ y 90° , para las energías de 0.1 y 0.4 Störmers.

Además para $\lambda = 50^\circ$, $\mathcal{E} = 0.3$ Störmer, se desconoce la región para los ángulos azimutales entre 45° y 157° y solamente se ha señalado la parte correspondiente a los ángulos entre 157° y 173° .

Para altas energías, una diferencia de 5° aproximadamente en el ángulo cenital o azimutal de la dirección de incidencia, puede significar una gran diferencia en las características de las órbitas. Para estas energías es más conveniente integrar a lo largo de una órbita individual, con cierta dirección de incidencia. Conocidas las características de esta órbita se pueden ensayar otras

direcciones a intervalos de ángulos cenitales o azimutales más o menos grandes, si la órbita presenta características interesantes para la determinación del cono.

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS RESULTADOS

Los conos se representan en la forma usual. Se rodea el punto de observación con un hemisferio de radio unidad. Toda dirección de incidencia está representada por un punto en la proyección del hemisferio sobre el plano horizontal local. Por consiguiente, las fronteras de los conos están representados en este plano por curvas.

Los puntos de observación están listados en la tabla 1.

Para cada latitud se han estimado conos para varias energías y para dos longitudes diferentes. Cada gráfica corresponde a una latitud de observación y una energía dada de la partícula; los diferentes conos dibujados en una sola gráfica corresponden a los calculados por diferentes autores: a (línea continua) b (línea de raya y punto): conos calculados por nuestro grupo para dos longitudes diferentes; c (línea punteada): cono calculado por Kasper; d (línea rayada): cono calculado por Schremp.

EFEECTO DE LONGITUD

El efecto de longitud puede estudiarse al comparar en cada gráfica el cono a con el cono b, o sea dos conos calculados para la misma energía, la misma latitud, pero dos longitudes diferentes. Véanse por ejemplo las Figuras 1, 2, 3 y 5.

En todas estas gráficas se observa que el cono sencillo de sombra es menor para longitudes menores. Este efecto de longitud disminuye a medida que aumenta la latitud. Este hecho se explica fácilmente por la disminución que sufre el campo del cuadrupolo con el aumento de la latitud. (véase Tabla 1).

El hecho de que el cono de sombra para $\varphi = 22.5^\circ E$ sea más abierto que el correspondiente a $\varphi = 112.5^\circ E$, se puede explicar considerando la direc-

ción del campo del cuadrupolo y su efecto sobre las direcciones de incidencia de las órbitas en el punto mismo de incidencia.

Mientras menor es la energía, mayor es el efecto de longitud. Así por ejemplo, para $\lambda = 40^\circ$ los conos \underline{a} y \underline{b} difieren entre sí para energía de protones de 4.49 Gev (Fig. 3) y coinciden para energía de 14.0 Gev (Fig. 4). Esta relación entre la magnitud del efecto de longitud y la energía se podría deducir directamente de la Ec. (1), en la que se ve que el campo afecta más a las órbitas de partículas de más baja energía.

Para aquellos casos en que los conos \underline{a} y \underline{b} coinciden, se dibujó únicamente el cono \underline{a} (véanse las gráficas 4, 6, 7 y 8). Estos conos coinciden en general en los extremos inferiores (direcciones ESS) y difieren ligeramente en los extremos superiores (WNN).

Estas diferencias en los ángulos azimutales de las direcciones límites ocurren para ángulos cenitales tan grandes que el efecto de la sombra de la tierra es prácticamente independiente de la longitud a altas latitudes.

Hay que hacer notar que el campo del cuadrupolo presenta una periodicidad de 180° y por consiguiente el estudio efectuado para $\varphi = 22.5^\circ E$ y $\varphi = 112.5^\circ E$ se aplica a $\varphi = 202.5^\circ$ y $292.5^\circ E$ respectivamente.

COMPARACION CON LOS CONOS CALCULADOS POR KASPER

Los conos calculados por nuestro grupo difieren poco de los calculados por Kasper. Las diferencias, cuando existen, se deben al efecto de longitud. Para las latitudes más bajas el cono de Kasper cae entre los conos (a) y (b). El efecto de la sombra de la tierra es menor en el campo del dipolo y cuadrupolo para longitudes bajas, mayor en el campo dipolar y aún mayor en el campo del dipolo y cuadrupolo para longitudes altas. Para grandes latitudes, donde el efecto de longitud es despreciable, los conos calculados por Kasper coinciden con los nuestros.

Los conos correspondientes a 0.5 Störmers para las latitudes de 30, 40 y 50° no han sido calculados por Kasper. Para extender el estudio comparativo a

mayor número de conos, hemos calculado éstos por interpolación. Hemos tomado directamente del artículo de Kasper todos los demás.

COMPARACION CON LOS CONOS CALCULADOS POR SCHREMP

Al comparar los conos calculados por nuestro grupo, o los calculados por Kasper, con los calculados por Schremp, se ve que éstos equivocadamente predicen un efecto de sombra de la tierra, mayor que el real. La comparación entre los conos de Kasper y los de Schremp es más directa, ya que ambos están calculados para el campo dipolar y toda diferencia se debe a errores en los cálculos de Schremp. La comparación con nuestros conos sólo es directa a grandes latitudes, donde el efecto longitudinal es despreciable.

Nótese que en los extremos (direcciones WNN y ESS) nuestros conos coinciden con los de Schremp y difieren de los de Kasper. (Véase por ejemplo Figuras 5 y 8).

DISCUSION

De la nueva determinación de los conos sencillos de sombra, tanto por nuestro grupo como por Kasper, parece estar ya fuera de duda que los conos calculados por Schremp están equivocados, sobre todo para grandes latitudes, y predicen un efecto de la sombra de la tierra mayor que el correcto.

El efecto de longitud debido al cuadrípolo y a la excentricidad del centro magnético terrestre se nota a bajas latitudes, donde el cono de sombra se abre o se cierra según la longitud; el efecto de longitud es despreciable para mayores latitudes donde el campo del cuadrípolo es pequeño. La diferencia entre nuestros conos y los conos de Schremp se debe principalmente al error en los cálculos de Schremp.

En el artículo que apareció en *Physical Review*⁴ se subrayó el hecho de que el efecto de longitud no podría explicar la discrepancia entre los conos

de Schremp y los nuestros.

Para terminar parece pertinente aclarar una interpretación errónea de nuestros resultados. En una nota marginal, Kasper⁶ dice textualmente: "Al completar este trabajo nos ha llamado la atención una nota reciente de Vallarta, Gall y Lifshitz⁴. Estos autores han considerado la influencia de la componente del cuadrupolo del campo magnético terrestre sobre los conos sencillos de sombra para distintos valores de latitud, longitud y rigidez magnética; obtienen resultados muy parecidos a los nuestros y atribuyen la discrepancia con Schremp a la componente cuadrupolar. Nuestro trabajo demuestra que en realidad esta discrepancia se debe sobre todo, a serios errores en el trabajo de Schremp".

Como se ve, la opinión de Kasper sobre nuestra interpretación de la discrepancia entre los conos de Schremp y los nuestros, es errónea. Estamos completamente de acuerdo con él en que las discrepancias se deben principalmente a serios errores en el cálculo de Schremp y en mucho menor grado al efecto de longitud; una prueba palpable de esto es que la mayor diferencia entre los conos de Schremp y los nuestros ocurre para la latitud de 70° , donde prácticamente no existe el efecto de longitud. Estos conos fueron ya publicados en nuestro artículo citado⁴.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al Dr. Manuel Sandoval Vallarta quien sugirió este problema, por las interesantes discusiones sobre este trabajo.

Agradecemos a la Sra. Graciela S. de Oyarzabal su excelente ayuda en el cálculo de las trayectorias; a la Sra. Lucila S. de Camacho por su amable ayuda en el análisis de los resultados; al Sr. Alberto García por su eficaz colaboración en la operación de las máquinas calculadoras IBM. Damos las gracias al Sr. José L. Ramirez por los dibujos de los conos.

REFERENCIAS

- 1.- Gall R. y Lifshitz J. *Phys.Rev.* **101**, No. 6, p. 1821 (1956).
- 2.- Gall R. y Lifshitz J. *Il Nuovo Cimento, Serie X*, **7**, p. 601 (1958).
3. a) Schremp E.J. *Phys.Rev.* **54**, 153 (1938).
b) Schremp E.J. *Phys.Rev.* **54**, 158 (1938).
- 4.- Vallarta M.S., Gall R. y Lifshitz J. *Phys.Rev.Lts.* **109**, No. 4, p. 1403 (1958).
- 5.- Schwartz M. *Bull.Am.Phys.Soc. II*, **1**, No. 7, 319 (1956).
- 6.- Kasper J. E. *Supp. Il Nuovo Cimento. Vol. II, Serie 10*, No. 1, p. 1 (1959).
- 7.- Carl Störmer. *Polar Aurora Part II* (Clarendon Press, Oxford, 1955).
- 8.- Chargoy, A. *Revista Mexicana de Física*, **2**, 1 (1953).
- 9.- Chapman, S. y Bartels. F. *Geomagnetism, II* (Clarendon Press, Oxford 1940) p. 651.
- 10.- Milne, E.W. *Numerical Calculus* (Princeton University Press, Princeton 1949) p. 135.

LOS CONOS SENCILLOS DE SOMBRA

a cono para $\varphi = 22.5^\circ E$; b cono para $\varphi = 112.5^\circ E$; c cono de Kasper; d cono de Schremp

La comparación entre a y b muestra el efecto de longitud. La comparación entre c y d (ó entre a y b con d) enseña la magnitud del error en los conos sencillos de sombra calculados por Schremp. Los ángulos azimutales y cenitales locales están dados en coordenadas geomagnéticas.

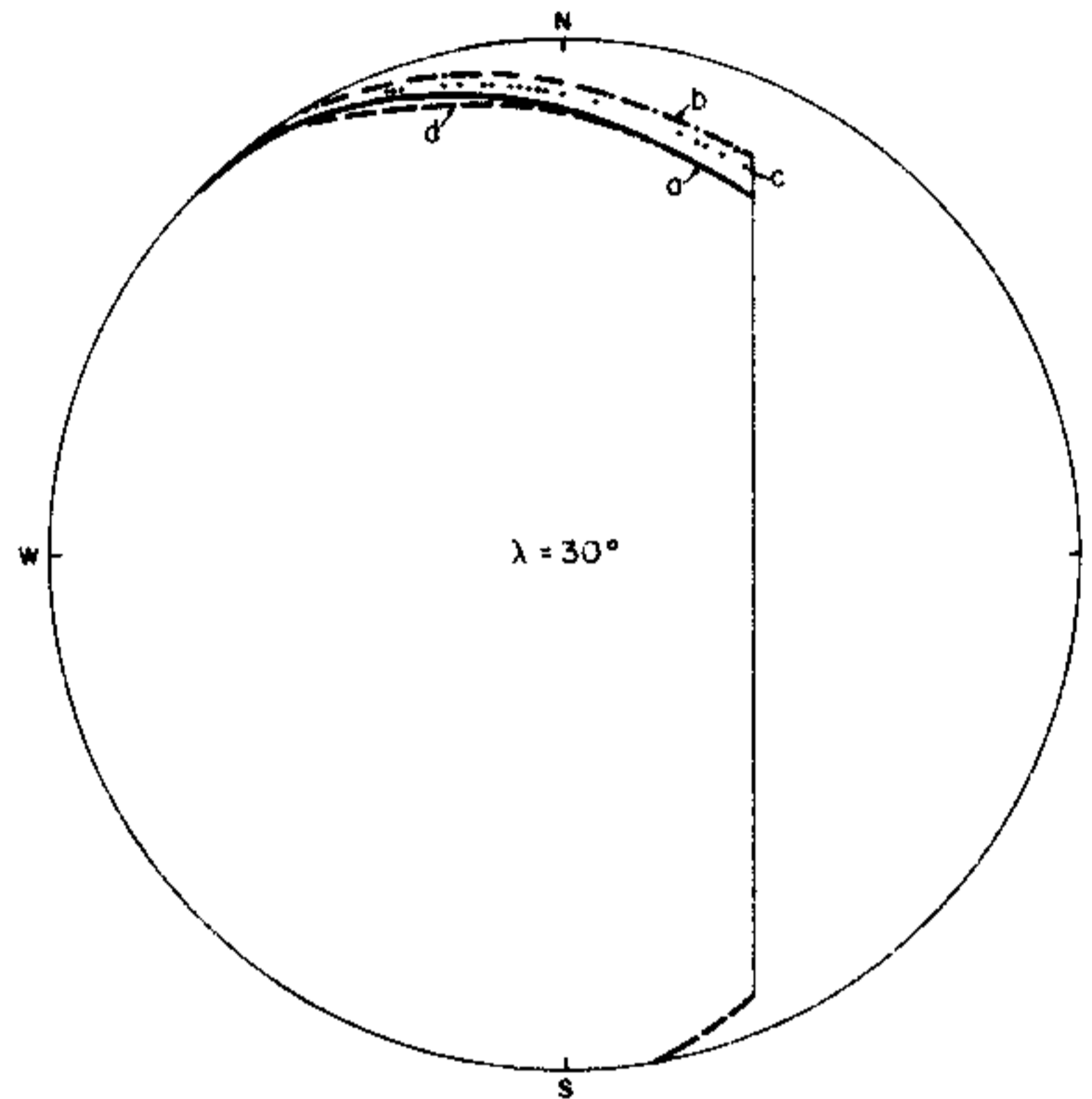


Figura 1. Conos para protones de energía de 8.61 Gev. La línea vertical corresponde al cono de Störmer.

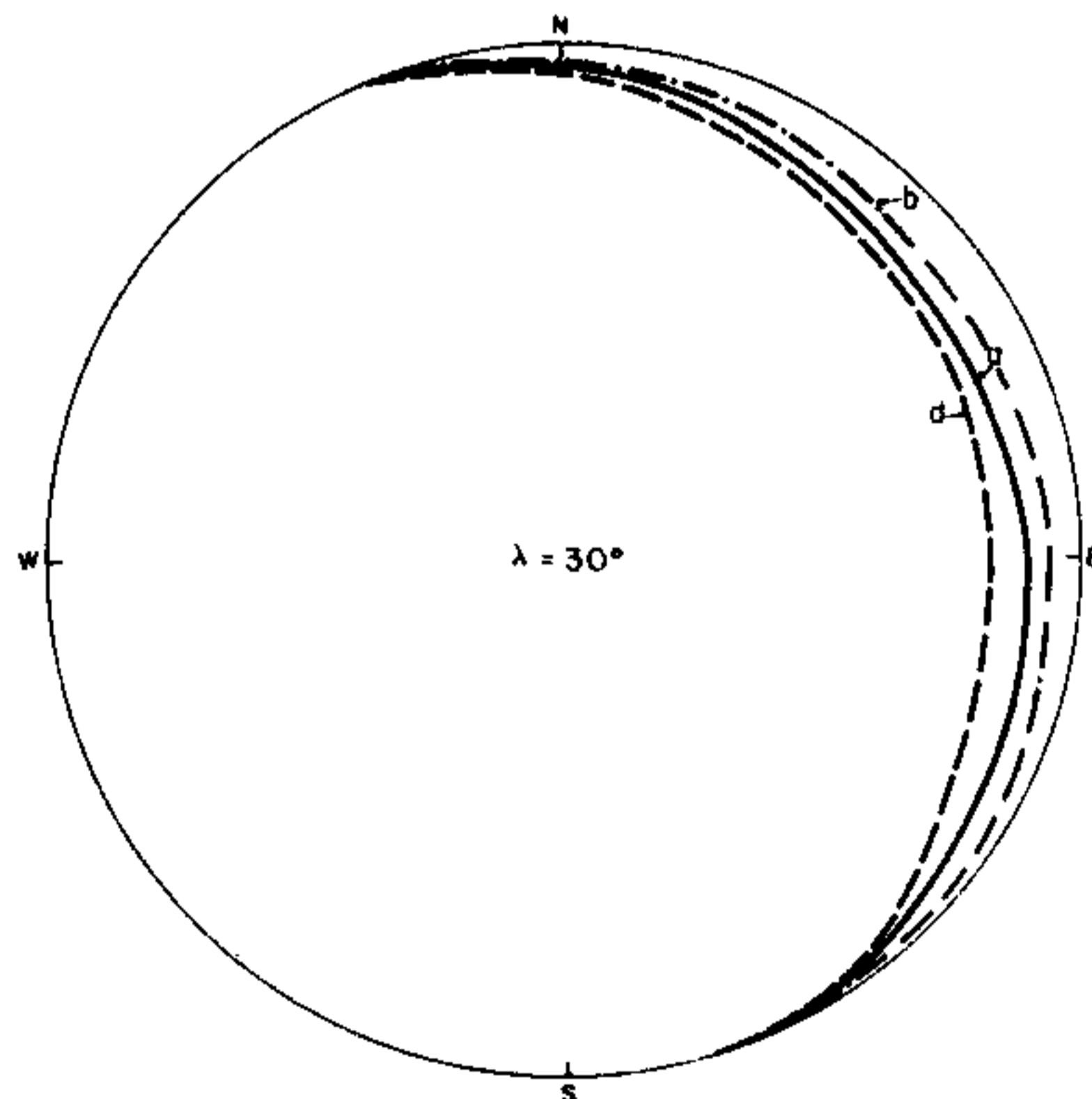


Figura 2. Conos para protones de energía de 14.0 Gev.

LOS CONOS SENCILLOS DE SOMBRA

a cono para $\varphi = 22.5^\circ E$; b cono para $\varphi = 112.5^\circ E$; c cono de Kasper; d cono de Schremp.

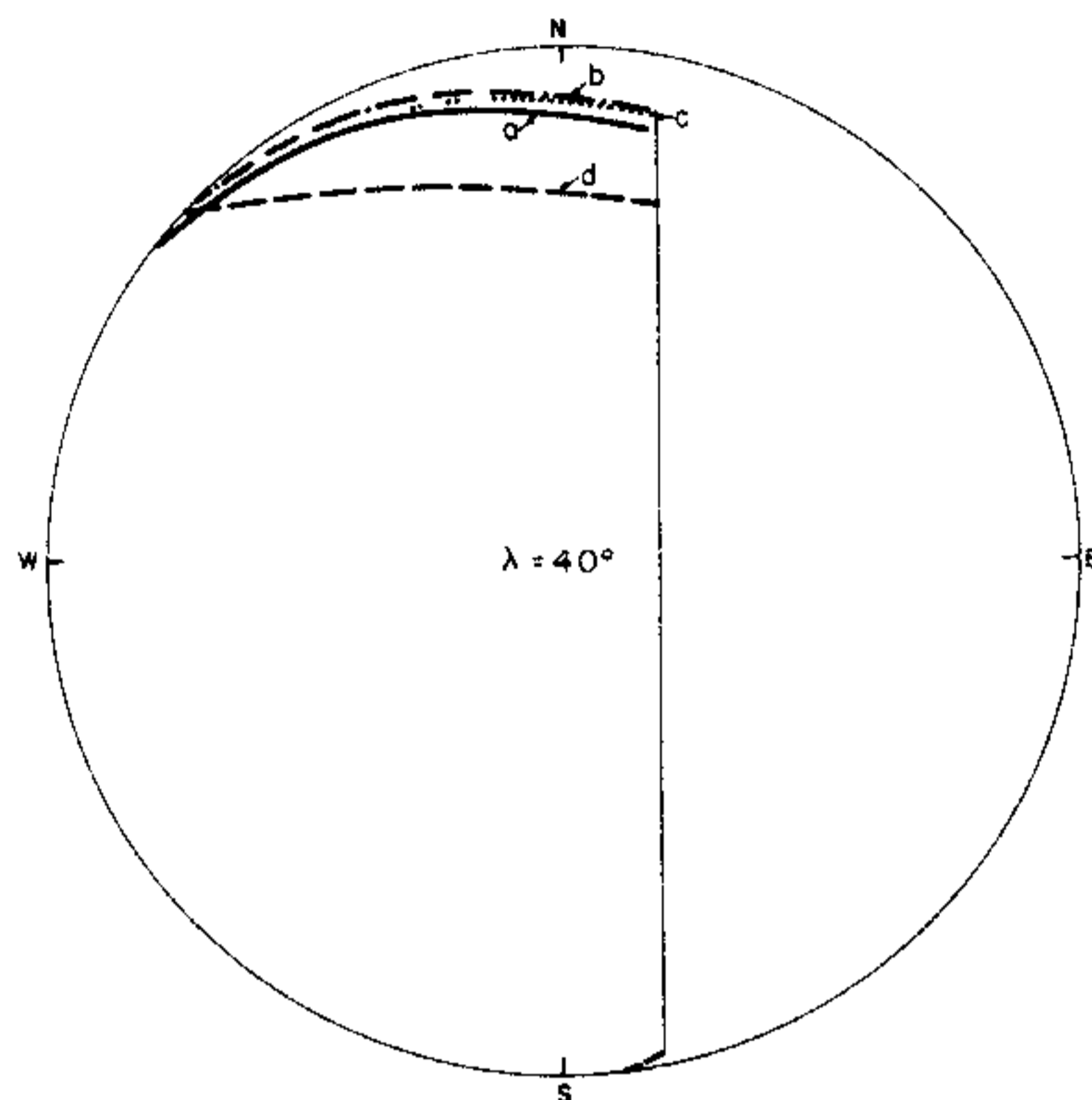


Figura 3. Conos para protones de energía de 4.49 Gev. La línea vertical corresponde al cono de Stömer.

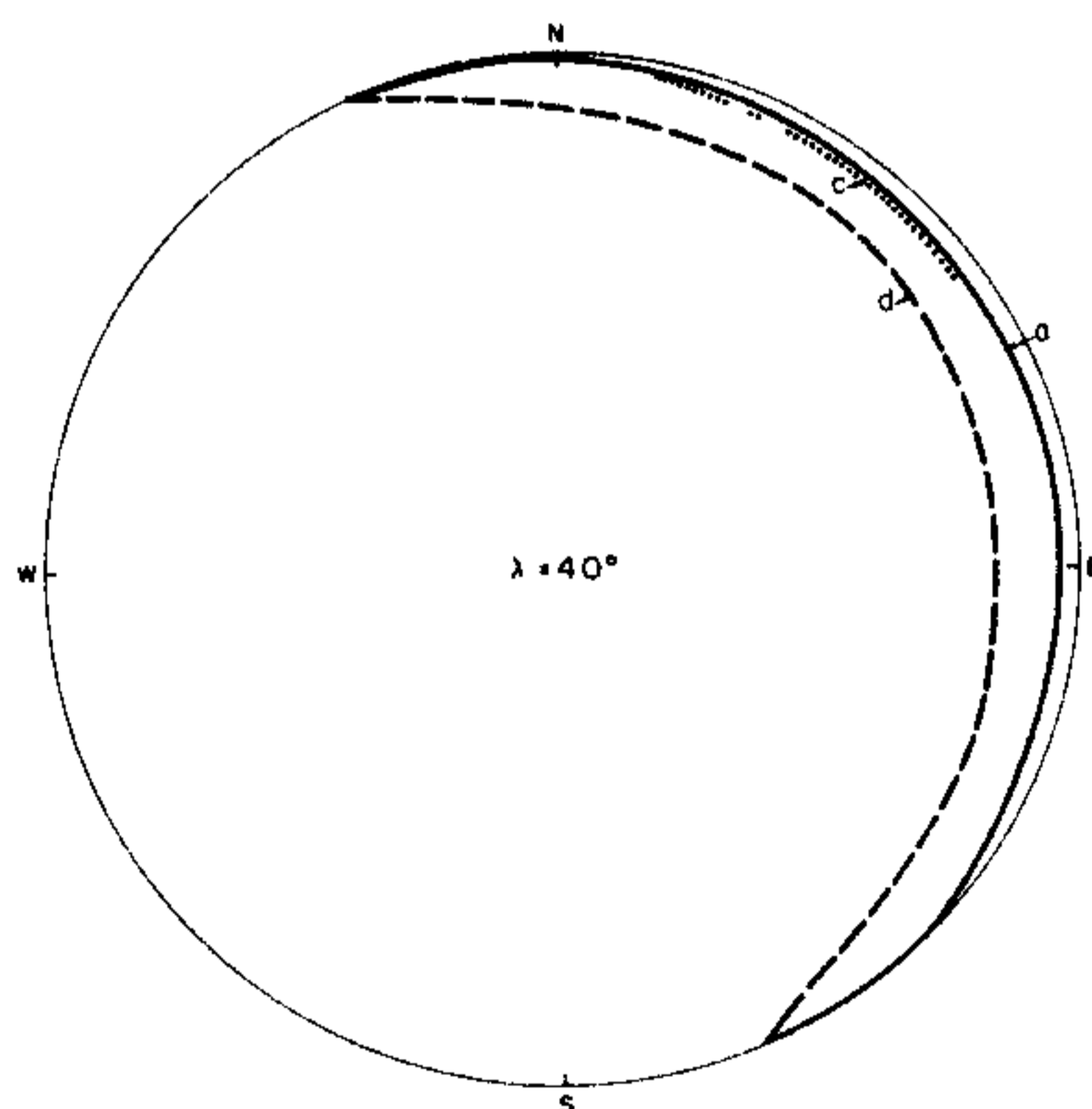


Figura 4. Conos para protones de energía de 14.0 Gev.

LOS CONOS SENCILLOS DE SOMBRA

a cono para $\varphi = 22.5^\circ E$; b cono para $\varphi = 112.5^\circ E$; c cono de Kasper; d cono de Schremp.

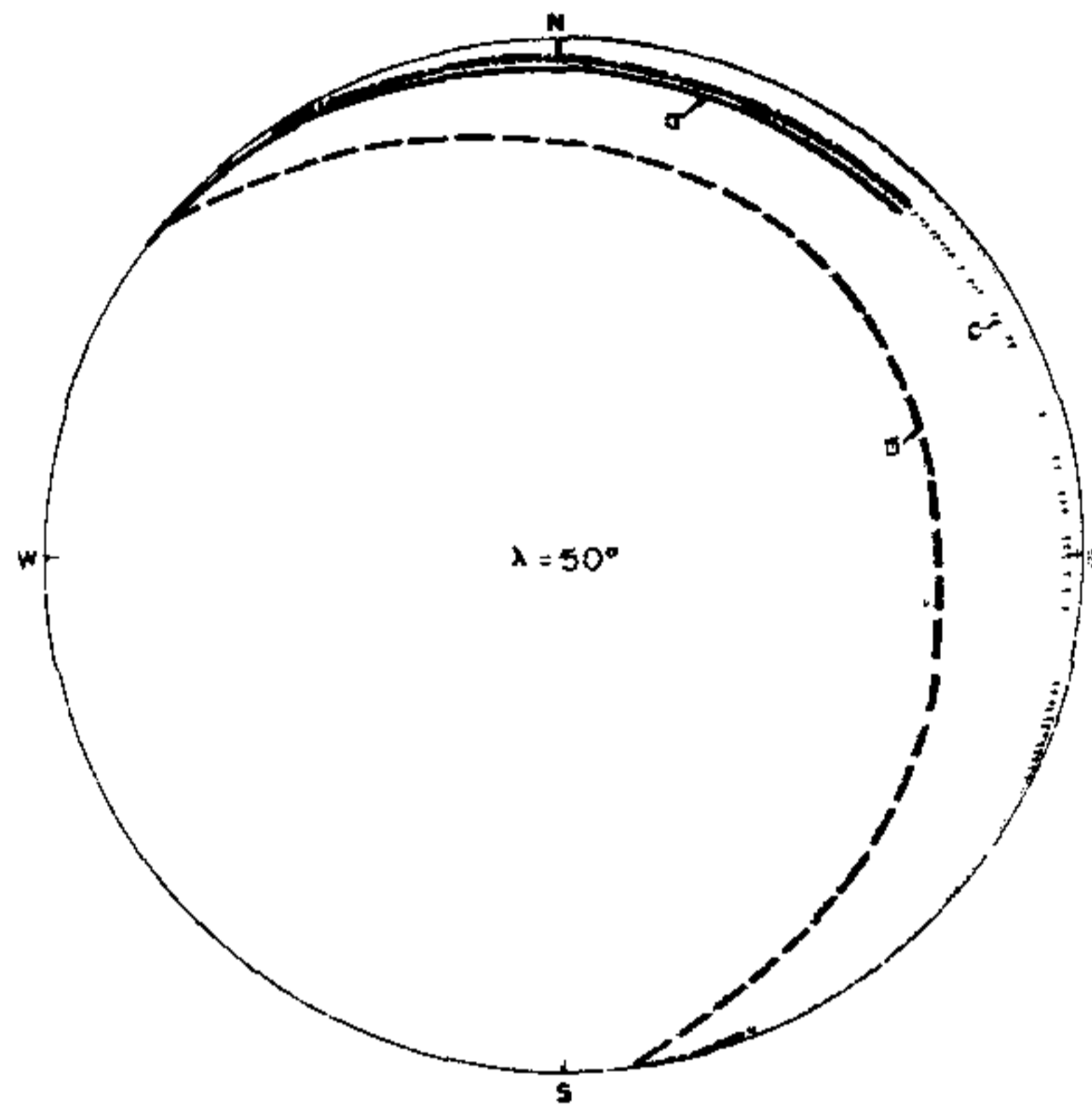


Figura 5. Conos para protones de energía de 4.49 Gev. (Se desconoce la parte de los conos a y b entre 45° y 157°).

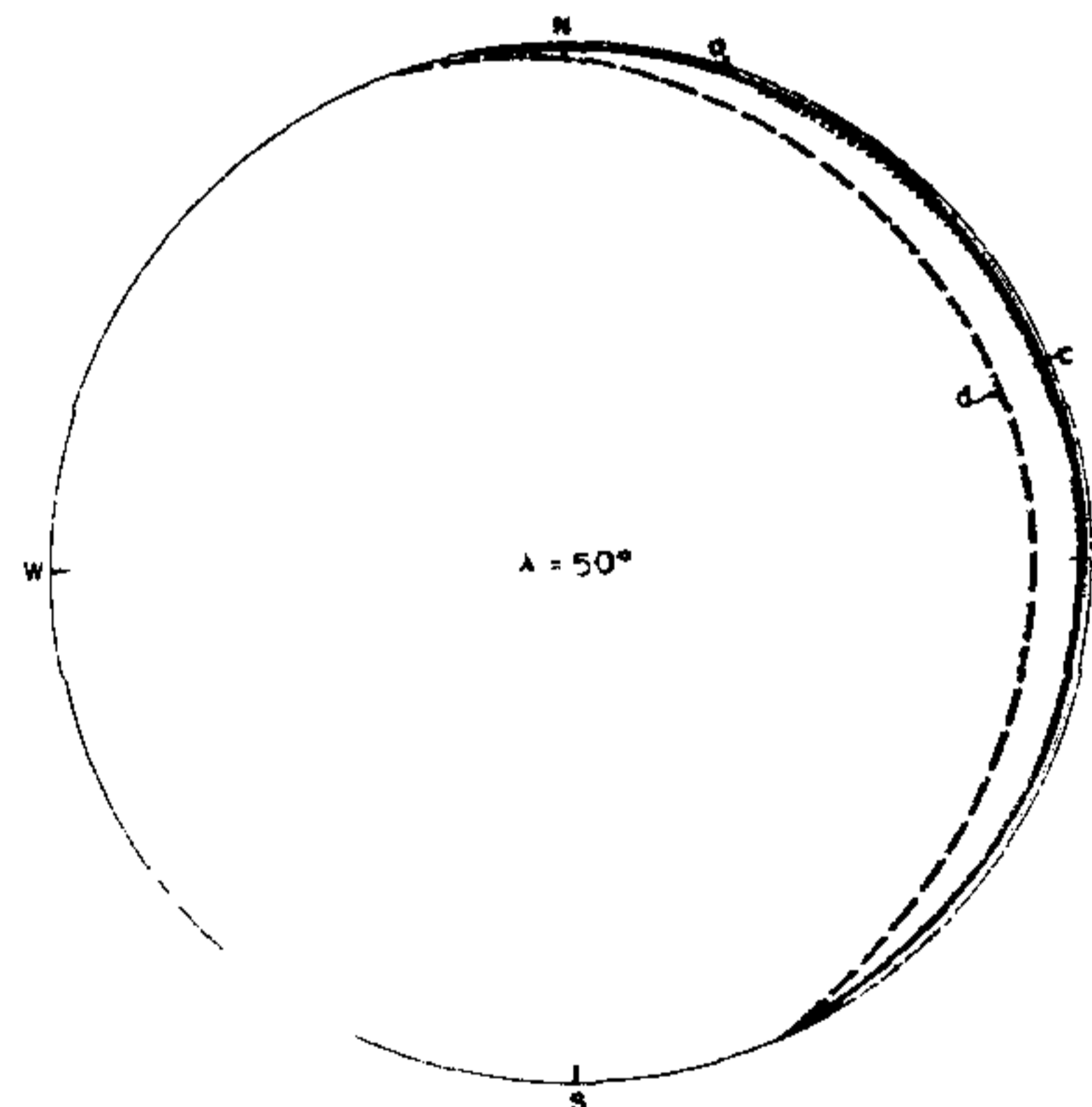


Figura 6. Conos para protones de energía de 14.0 Gev. (El efecto de longitud es despreciable).

LOS CONOS SENCILLOS DE SOMBRA

a cono para $\varphi = 22.5^\circ \text{E}$; b como para $\varphi = 112.5^\circ \text{E}$; c cono de Kasper; d cono de Schremp.

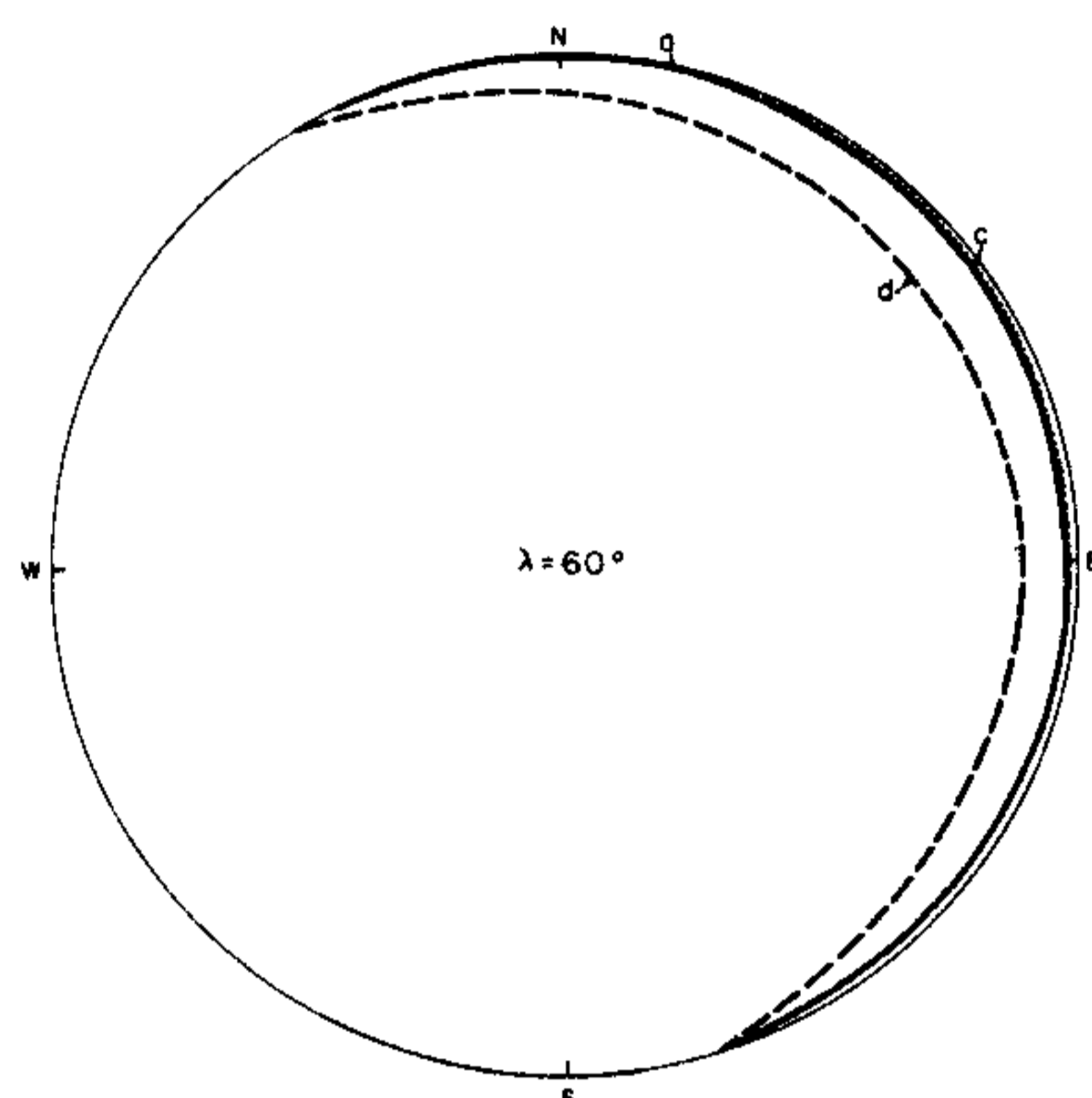


Figura 7. Conos de protones de energía de 8.61 GeV. (El efecto de longitud es despreciable).

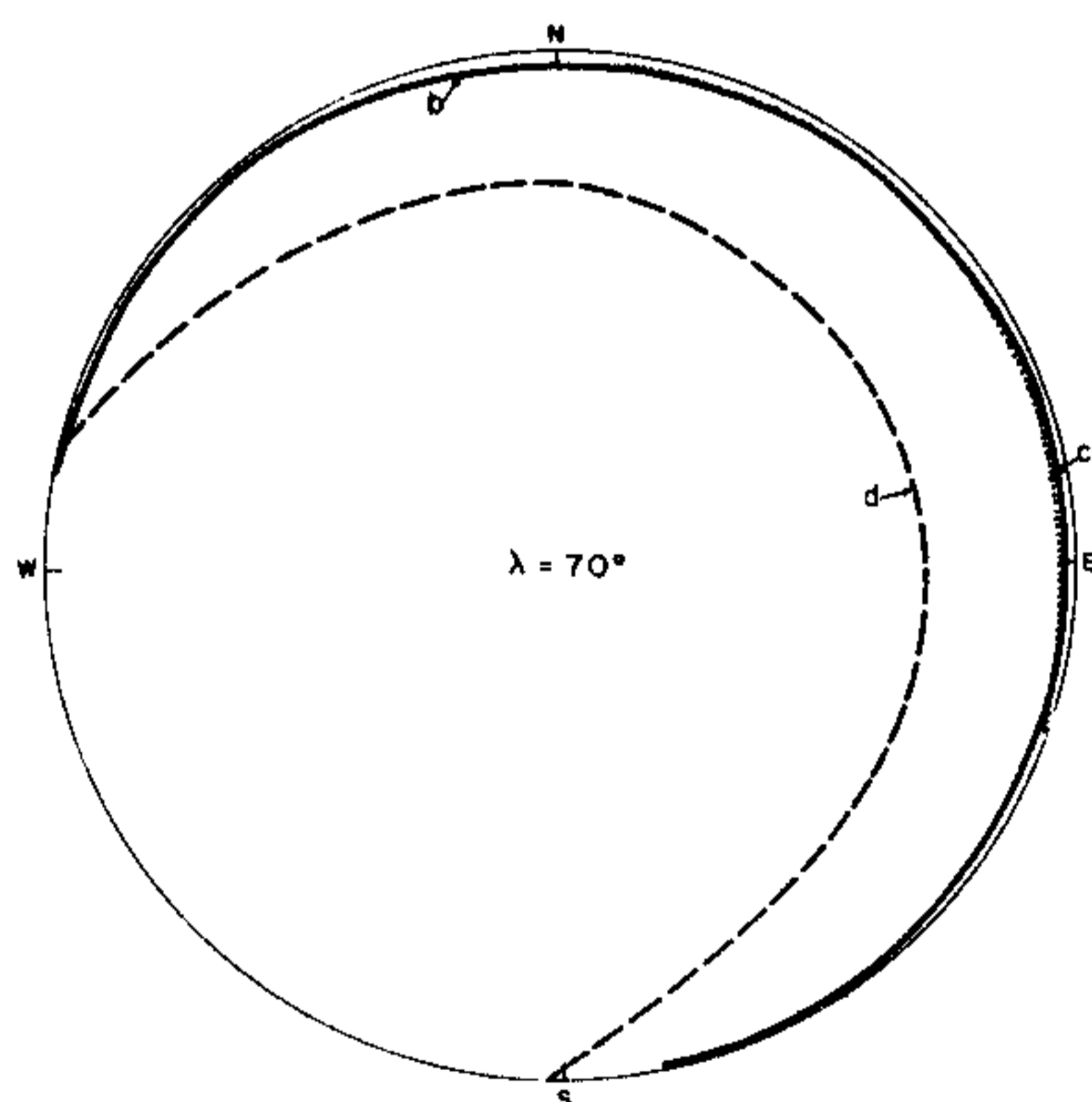


Figura 8. Conos para protones de energía de 0.172 GeV.