

CALCULO DE LA DISTRIBUCION ANGULAR DE LA REACCION
 $\text{Li}^6 (n; n', \gamma) \text{Li}^6$ MEDIANTE EL MODELO DE CAPAS DE
ACOPLAMIENTO INTERMEDIO

Cecilia Mossin Kotin

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

(Recibido: 15 febrero 1960)

RESUMEN

The intermediate-coupling shell model is used to calculate the angular distribution of the inelastic scattering $\text{Li}^6 (n, n') \text{Li}^6$ and the angular correlation $\text{Li}^6 (n; n', \gamma) \text{Li}^6$, both involving the 7.46 MeV compound state of Li^7 . The intermediate-coupling parameter $\zeta = 1.08$ was used, which is in good agreement with the energy levels of Li^7 . It is the only parameter that enters in this reaction.

1. INTRODUCCION

Desde hace algunos años se está aplicando el modelo de acoplamiento intermedio para estudiar los niveles de energía de los núcleos. En particular se han estudiado los niveles de la capa p de los núcleos porque aún esta configuración sencilla no es consistente con ninguno de los modelos de acoplamiento conocidos: el L-S y el $j-j$ ^{1, 2}. Inglis² ha dado una interpretación teórica de las series de niveles de energía de núcleos ligeros, en términos del acoplamiento intermedio; puesto que ninguno de los modos extremos de acoplamiento puede dar una explicación correcta de los datos experimentales conocidos, es útil considerar un modelo de "capas" en el que las fuerzas centrales entre los nucleones (que dan origen al acoplamiento L-S) y las fuerzas spin-órbita (que dan origen al acoplamiento $j-j$) son de intensidades comparables.

Lane³ llevó adelante este mecanismo y señaló que el modelo de acoplamiento intermedio puede dar cuenta de las cantidades "dinámicas" del tipo hallado en las reacciones nucleares, tales como los anchos reducidos de los niveles de absorción y emisión de nucleones, y los elementos de matriz de las transiciones electromagnéticas. Se examinaron en detalle los núcleos especulares C^{13} y N^{13} y el análisis muestra que todos los datos referentes a las propiedades ya mencionadas concuerdan de modo satisfactorio utilizando el modelo de acoplamiento intermedio si se da al parámetro característico el valor 4.5.

Se estudiaron otros casos particulares: entre ellos la distribución del acoplamiento de los momentos angulares en la reacción $C^{13}(p, \gamma)N^{14}$ que revela la influencia del modelo elegido⁵.

En este trabajo estudiamos la reacción de dispersión inelástica con emisión subsiguiente de radiación γ : $Li^6(n, n')Li^{6*} \gamma Li^6$, desde el punto de vista del acoplamiento intermedio. El núcleo compuesto Li^7 que se forma es de interés, porque tanto él como su núcleo espejo Be^7 son los núcleos más ligeros y al mismo tiempo los más simples estables para los cuales la descripción del estado fundamental en términos del acoplamiento L-S no es suficiente sino que incluye el acoplamiento spin-órbita. A fin de obtener magnitudes medibles experimentalmente, hemos calculado la función de distribución angular correspondiente al proceso

de dispersión inelástica $\text{Li}^6(n; n') \text{Li}^{6*}$ y la función de correlación angular correspondiente a $\text{Li}^6(n; n', \gamma) \text{Li}^6$. Ambas funciones de dependencia angular, la de distribución y la de correlación, deben mostrar con claridad la influencia de algunos de los modos de acoplamiento posibles y podrán, por lo tanto, ser útiles para comprobar cuál de los modos de acoplamiento de las fuerzas perturbadoras es el predominante.

2. Las funciones de distribución angular

Es sabido que el "ancho reducido" correspondiente a la captura o emisión de un nucleón, según fue definido por Wigner y Eisenbud⁶, puede ser expresado así:

$$\gamma_l = R_l^2(r_0) \sum_s \beta_s^2 \quad (1)$$

donde $R(r_0)$ es la función radial generalmente desconocida e independiente del acoplamiento de spines, y β_s es la parte angular de la misma función y depende del esquema de acoplamiento elegido; s es el "spin del canal" de emisión o absorción y la suma se efectúa sobre los canales posibles.

Si se consideran transiciones con un sólo valor posible de l en los procesos de emisión o absorción, suprimimos la parte radial del ancho reducido, como un factor proporcional de las funciones de distribución angular. Por lo tanto, la distribución angular correspondiente a la dispersión inelástica se puede escribir (referida al sistema de centro de masa)⁷:

$$W(\theta) = \sum_{k, s_1, s_2} (-)^{s_1 - s_2} \beta_{s_1}^2 \beta_{s_2}^2 Z(l_1 J, l_1 J, s_1, k) Z(l_2 J, l_2 J, s_2, k) \\ \times P_k(\cos \theta) \quad (2)$$

donde los subíndices 1 y 2 se usan para las partículas incidente y emergente, res-

pectivamente.

Z es definido así⁸:

$$Z(l J l' J', sk) = i^{l' - l + k} [(2l + 1)(2l' + 1)(2J + 1)(2J' + 1)]^{1/2} \times \\ \times W(l J l' J', sk) (ll' 00 | k0)$$

Los $P_k(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre, W es un coeficiente de Racah y $(ll' 00 | k0)$ es un coeficiente de Clebsch-Gordan.

Como β_s depende del valor particular de s, cada β_s^2 da el peso relativo del particular "spin del canal" en la función de distribución angular, y por lo tanto puede informar acerca del esquema de acoplamiento.

Si después de la emisión del nucleón el núcleo residual queda en estado excitado y es emitido un rayo γ , la función de correlación angular es la siguiente⁹:

$$W(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_{12}, \varphi_{12}) = \sum (-1)^\chi \beta_{L_1}^2 \beta_{L_{12}}^2 [(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)] \times \\ \times Z(l_1 J_1 l_1 J_1, s_1 k_1) Z(l_{12} L_{12} l_{12} L_{12}, i_{12} k_{12}) Z_1(L_2 J_2 L_2 J_2, I_2 k_2) \times \\ \times \left\{ \begin{array}{c} J_1 J_2 L_{12} \\ J_1 J_2 L_{12} \\ k_1 k_2 k_{12} \end{array} \right\} \Lambda_{k_1 k_2 k_{12}} \quad (3)$$

donde $\chi = s_1 + I_2 + i_{12} - J_1 - J_2 - L'_{12} + L_2 + L'_2 + 1/2(k_1 - k_2 + k_{12})$,

$$Z_1(L J L' J', I k) = \text{Re} \{ i^{L' - \pi' - L + \pi + k + 2} [(2L + 1)(2L' + 1)(2J + 1)(2J' + 1)]^{1/2} \\ \times (LL' - II | k0) W(L J L' J', I k) \}$$

π vale cero para la radiación eléctrica y uno para la radiación magnética; $\{ \}$ es el coeficiente $9j$ de Wigner y

$$\Lambda_{k_1 k_2 k_{12}} = \sum_{\mu_1 \mu_2} (k_1 k_2 \mu_1 \mu_2 | k_{12} \mu_1 + \mu_2) \left[\frac{(4\pi)^3}{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)(2k_{12} + 1)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times Y_{k_1}^{\mu_1}(\theta_1 \varphi_1) Y_{k_2}^{\mu_2}(\theta_2 \varphi_2) Y_{k_{12}}^{\mu_1 + \mu_2}(\theta_{12} \varphi_{12})$$

donde $Y_k^\mu(\theta \varphi)$ son los armónicos esféricos según son definidos por Condon y Shortley¹⁰.

Los subíndices 1 y 12 indican las partículas, incidente y emergente, respectivamente; 2 indica la radiación emitida. Con $(\theta_1 \varphi_1)$, $(\theta_2 \varphi_2)$, $(\theta_{12} \varphi_{12})$ indicamos los ángulos polares correspondientes a las direcciones de las tres radiaciones con respecto a cierto sistema determinado de coordenadas. Las partículas son descritas por su momento orbital angular \underline{l} , su spin \underline{s} y su momento angular total \underline{L} . Los spines de los dos estados intermedios son indicados con J_1 y J_2 ; los spines nucleares correspondientes a los estados inicial y final, con I_1 y I_2 . k_1 , k_2 y k_{12} indican el orden de los polinomios de Legendre. Las sumas se efectúan sobre los valores posibles de β_{L_1} y $\beta_{L_{12}}$ donde L_1 y L_{12} corresponden a la anotación ya señalada.

La relación entre los coeficientes β_s y β_L es la siguiente¹¹:

$$\beta_L = \sum_s (-)^{J+1/2-s} U(1/2 J J_0, L s) \beta_s \quad (4)$$

donde J_0 y J indican los spines de los núcleos inicial y compuesto respectivamente.

La función angular β_s

Según la expresión (1) β_s es, en el "ancho reducido", la parte de la función que depende de los ángulos γ , a su vez, función del modelo de acoplamiento elegido.

$$\beta_s = \sqrt{n} \langle \alpha \text{LST} | \alpha_0 L_0 S_0 T_0 \rangle V_s^x \quad (5)$$

donde n es el número de partículas exteriores a la capa cerrada; LST y α determinan completamente una función de onda antisimétrica. α se refiere a la partición que describe la simetría espacial de la función de onda. $\langle | \rangle$ es un coeficiente de parentesco fraccionario (los coeficientes de parentesco fraccionario correspondientes a la capa p , que usaremos después, han sido tabulados por Jahn y Van Wieringen¹² para el acoplamiento L-S y por Edmonds y Flowers¹² para el caso $j-j$). V_s significa:

$$\text{en el caso: L-S: } V_s^{L-S} = (-)^{L_0 + l - L} U(L_0 S_0 s \frac{1}{2}, JS) U(l L_0 JS, Ls)$$

$$\text{en el caso } j-j: V_s^{j-j} = (-)^{J_0 + 1/2 - s} U(l \frac{1}{2} J J_0, js)$$

donde U es el coeficiente de Racah normalizado:

$$U(abcd, ef) = \sqrt{(2e+1)(2f+1)} W(abcd, ef)$$

Para obtener la expresión de β_s que corresponde al acoplamiento nuclear intermedio, se recordarán previamente las características de este modelo.

Se supone que las partículas de la capa no completa interactúan entre sí mediante una interacción central más una interacción spin-órbita. Por lo tanto el hamiltoniano matricial total es

$$H = H_1 + H_2 (\zeta)$$

Aquí H_1 indica la matriz de interacción central para estados L-S puros; H_2 es matriz diagonal. Se utiliza el potencial de saturación de Rosenfeld para la interacción de dos partículas¹³, o sea

$$H_1 = \sum_{i < j} V(r_{ij}) (0.1 + 0.23 \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j$$

La dependencia spin-órbita es expresada mediante la fuerza spin-órbita relativa a una partícula

$$H_2 = \sum_i a \vec{l}_i \cdot \vec{s}_i$$

donde a es una función del radio orbital, pero que consideramos constante. (Los elementos de matriz de H_2 han sido obtenidos en términos de los coeficientes de parentesco fraccionario de la capa p)⁴.

El parámetro de acoplamiento intermedio es $\zeta = a/K$ (a se refiere a la interacción $j-j$; K es la integral de intercambio y está vinculada a la interacción L-S); ζ determina la intensidad relativa de las dos interacciones.

La función de onda nuclear correspondiente a este modelo se obtiene mediante los conocidos cálculos de acoplamiento intermedio, utilizando las funciones de onda L-S como base. Luego en la matriz total habrá elementos no diagonales debidos a H_2 . J y T son buenos números cuánticos y para hallar las combinaciones adecuadas de las funciones L-S, consideramos las funciones correspondientes a un particular J y un particular T .

Los coeficientes de las combinaciones lineales de las funciones L-S dependen de ζ y será posible ajustar este parámetro de modo tal, que la combinación correcta de funciones de onda explique el esquema de los niveles de energía. Esta combinación es precisamente utilizada para calcular β_s (Forma 5).

Mediante la ecuación secular obtenemos los valores de las energías corres-

pendientes a los diferentes niveles L-S. Los coeficientes de la combinación lineal surgen de la diagonalización de la matriz total.

Sobre la base de estas consideraciones, la función de onda nuclear para el acoplamiento intermedio resulta ser:

$$\psi_{JT} = \sum_{\alpha LS} C_{\alpha LS}^{JT}(\zeta) \psi_{\alpha LSJT} \quad (6)$$

En términos de estas constantes, (5) es

$$\beta_s(\zeta) = \sum_{\substack{\alpha LS \\ \alpha_0 L_0 S_0}} (-)^{l+L_0-L} C_{\alpha LS}^{JT}(\zeta) C_{\alpha_0 L_0 S_0}^{J_0 T_0}(\zeta_0) \langle \alpha L S T | \alpha_0 L_0 S_0 T_0 \rangle \times \\ \times U(L_0 S_0 s \frac{1}{2}, J_0 S) U(L_0 S l J, s L) \quad (5')$$

La reacción $\text{Li}^6(n; n') \text{Li}^{6*} \gamma(4.52 \text{ MeV}) \text{Li}^6$

Consideremos ahora el caso particular del Li^6 bombardeado por neutrones; el núcleo residual queda en estado excitado y emite un rayo γ de 4.52 MeV (dipolo magnético) con lo que alcanza el estado fundamental. De acuerdo con las consideraciones precedentes hemos obtenido la función de distribución angular para la reacción ${}^{14} \text{Li}^6(n; n') \text{Li}^{6*}$ y la función de correlación angular de

$$\text{Li}^6(n; n', \gamma) \text{Li}^6$$

Para obtener las funciones en acoplamiento intermedio, en la representación L-S, damos el conjunto completo de autofunciones L-S para los tres estados en que estamos interesados⁴.

Los miembros del conjunto completo se identifican con la notación espectroscópica conocida $^{2T+1} 2S+1 L_J$

Estado		Conjunto Completo		
Li^6 estado fundamental	$J = 1, T = \frac{1}{2}$	$^{13}\text{S}_1$ [2]	$^{13}\text{D}_1$ [2]	$^{11}\text{P}_1$ [11]
Li^6 excitado 4.52 MeV	$J = 2, T = \frac{1}{2}$		$^{13}\text{D}_2$ [2]	
Li^7 excitado 7.46 MeV	$J = 5/2, T = \frac{1}{2}$	$^{22}\text{F}_{5/2}$ [3]	$^{24}\text{P}_{5/2}$ [21]	$^{22}\text{D}_{5/2}$ [21]
			$^{24}\text{D}_{5/2}$ [21]	

La matriz de interacción total es la siguiente⁴:

$$\begin{array}{c}
 H_1 \\
 \begin{pmatrix} 2.4 & y & -2.4 \\ 0.99 & y & +2.03 \\ -0.39 & y & +3.57 \\ 0.99 & y & -0.03 \end{pmatrix} + \zeta
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 ^{22}\text{F}_{5/2} [3] \quad ^{24}\text{P}_{5/2} [21] \quad ^{22}\text{D}_{5/2} [21] \quad ^{24}\text{D}_{5/2} [21] \\
 \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -\sqrt{7/9} & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3/4} & 0 \\ -\sqrt{7/9} & -\sqrt{3/4} & 1/3 & \sqrt{7/36} \\ 1/3 & 0 & \sqrt{7/36} & -1/6 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Se ha utilizado la conveniente fórmula de Racah¹⁵ para los elementos de la matriz diagonal, en términos de la integral directa L y la integral de intercambio K de la capa 1-p. Para el cálculo numérico aceptamos el valor $y = L/K = 6$. Dando a ζ el valor 1.08^4 se obtiene concordancia con el esquema de niveles observado en el Li^7 . Para diagonalizar la matriz hemos empleado el método conocido de cálculo de la ecuación secular. Los autovalores de la ecuación son los niveles de energía en unidades K. Los elementos de la matriz unitaria que diagonaliza a la matriz dada son los coeficientes de la solución que nos interesa.

La matriz unitaria es la siguiente:

$^{22}\text{F}_{5/2}$ [3]	$^{24}\text{F}_{5/2}$ [21]	$^{22}\text{D}_{5/2}$ [21]	$^{24}\text{D}_{5/2}$ [21]
0.0995	0.130	0.995	- 0.111
- 0.0518	0.028	0.0813	0.995
- 0.0895	0.959	- 0.254	- 0.0527
- 0.997	0.012	- 0.0356	- 0.0673

Los elementos de la tercera línea son los coeficientes de (6) correspondientes al nivel excitado en consideración del Li^7 .

Aplicamos las funciones de orden para calcular (3) y para obtener la distribución angular.

Substituimos en (2') los valores numéricos

$l = 1$; $s_1 = 3/2$, que es la única posibilidad; s_2 puede tomar los valores $3/2, 5/2$ y obtenemos para β_{s_2}

$$\beta_{3/2} = -0.0906 \quad ; \quad \beta_{5/2} = 0.070$$

correspondientes al doble valor del spin del canal de salida.

$\beta_{s_1}^2$ puede ser suprimido como factor común.

Obtenemos la expresión siguiente:

$$W(\theta) = P_0(\cos \theta) + 0.110 P_2(\cos \theta) \quad (2')$$

La función de correlación angular relativa al proceso en dos pasos $\text{Li}^6(n; n', \gamma) \text{Li}^6$ se obtiene de (3). Con el objeto de simplificar la fórmula, como ella depende de los ángulos polares de las direcciones de las tres radiaciones respecto de cierto sistema fijo de ejes, se supone que el neutrón incidente tiene la dirección z , y que el neutrón emergente en el proceso inelástico se observa siempre a ángulo recto respecto de la dirección z y se determina la distribución del rayo γ en el mismo plano de las dos anteriores radiaciones. Con esta condición

los coeficientes están tabulados, así como los otros, Z , Z_1 y X^{17} .

El conjunto completo de números cuánticos que especifican la reacción es:

$$l = 1; l_{12} = 1; J_1 (\text{Li}^7) = 5/2; J_2 (\text{Li}^6 \text{ nivel excitado}) = 2;$$

$$i_{12} = 1/2; J_2 (\text{Li}^6 \text{ estado fundamental}) = 1; s_1 = 3/2; L_{12} \text{ puede tomar dos valores } 3/2 \text{ y } 1/2; L_2 = 2$$

Hemos obtenido correspondiendo a los valores de L_{12} , los siguientes de $\beta_{L_{12}}^2$ por (6), ya que los β_{s_2} son conocidos

$$\beta_{1/2}^2 = 0.00665 \quad ; \quad \beta_{3/2}^2 = 0.00643$$

$\beta_{L_1}^2$ puede ser suprimido por ser factor común.

Obtenemos finalmente

$$W(00, \pi/2, 0, \theta, 0) = P_0 + 0.154 P_2 - 0.033 P_2^2 \quad (3')$$

Puesto que β_s depende de ζ , las fórmulas (2') y (3') pueden ser un instrumento experimental para decidir acerca del parámetro de acoplamiento intermedio, conocido ya por medio del esquema de niveles de energía.

Agradezco al Dr. Otto Hittmair por haberme interesado en este tema y por sus útiles críticas y consejos.

REFERENCIAS

- 1.- G.E. Tauber y T.Y. Wu, Phys.Rev. 93, 295 (1954); Phys.Rev. 94, 1307 (1954)
- 2.- D.R. Inglis, Rev.Mod.Phys. 25, 390 (1953)

- 3.- A.M. Lane, *Phys.Rev.* **92**, 839 (1953);
Proc.Phys.Soc. (London) **A 66**, 977 (1953)
- 4.- T. Auerback y J.B. French, *Phys.Rev.* **98**, 1276 (1955)
- 5.- O. Hittmair, *Zeit.Für Naturforschung* **11a**, 94 (1956)
- 6.- E.P. Wigner y L. Eisenbud, *Phys.Rev.* **72**, 29 (1952)
- 7.- J.M. Blatt y L.C. Biedenharn, *Rev.Mod.Phys.* **24**, 258 (1952)
- 8.- L.C. Biedenharn y M.E. Rose, *Rev.Mod.Phys.* **25**, 729 (1953)
- 9.- G. Racah, *Phys.Rev.* **84**, 910 (1951)
- 10.- E.U. Condon y G.H. Shortley, *Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge 1935
- 11.- O. Hittmair, *Z. Physik* **144**, 453 (1956)
- 12.- H.A. Hahn y H. Van Wieringen, *Proc.Roy.Soc. (London)* **A 209**, 502 (1951)
A.R. Edmonds y B.H. Flowers, *Proc.Roy.Soc. (London)* **A 214**, 515 (1952)
- 13.- L. Rosenfeld, *Nuclear Forces*, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1948
- 14.- F. Aizenberg y T. Lauritsen, *Rev.Mod.Phys.* **24**, 321 (1952)
Rev.Mod.Phys. **27**, 77 (1955)
- 15.- G. Racah, *Hel.Phys.Acta* **23**, suppl. 3, 229 (1950)
- 16.- H.H. Hummel y D.R. Inglis, *Phys.Rev.* **71**, 736 (1950)
- 17.- W.T. Sharp, J.M. Kennedy, B.J. Sears y M.G. Hoyle, *Tables of coefficients for angular distribution analysis* (1953)