TABLAS DE VALORES DE MOMENTOS ANGULARES Y CUADRUPOLOS ELECTRICOS DE ESTADOS ASOCIADOS CON LA INTERACCION CUADRUPOLO-CUADRUPOLO EN UN OSCILADOR ARMONICO

A. Barragan
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

(Recibido: 30 Octubre 1960)

RESUMEN

In this paper we give tables for the energy levels for a system of N particles in a harmonic oscillator common potential with a quadrupole-quadrupole interaction. Each level is identified by the value of the energy of the reduced two particle state ρ, *its pseudo spin* f, *its total angular momentum* λ *and its quadrupole moment* ω'. *We also give a graph for the levels associated with values* $E = 0, 1, \ldots, 12$ *of the energy of the harmonic oscillators. The tables and graphs are based on the theory for the quadrupole-quadrupole interaction developed by V. Bargmann and M. Moshinsky.*

En una serie de trabajos V. Bargmann y M. Moshinsky[1,2] han analizado el problema de los posibles niveles de energía de un sistema de N partículas en un potencial de oscilador armónico con una interacción de tipo cuadrupolo-cuadrupolo. En unidades en las que

$$\hbar = m = \omega = 1 \tag{1}$$

siendo $\hbar$ la constante de Planck entre 2π, m la masa de la partícula y ω la frecuencia del oscilador, la energía ϵ del estado queda de acuerdo con la mencionada teoría dada por:

$$\epsilon = E + \frac{A}{6\mathcal{I}} \tag{2}$$

donde E representa estados de energía del oscilador armónico sin interacción, $E = 0, 1, 2.....$,

$$A = -\rho(\rho+6) - 12f(f+1) + 3\lambda(\lambda+1) \tag{3}$$

e $\mathcal{I}$ es una constante con significado de momento de inercia.

Los parámetros ρ, f se ligan con la energía E por medio de las siguientes relaciones:

$$\rho = E, E-3, E-6, \ldots \begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix} \tag{4}$$

$$f = \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}-1, \ldots \begin{matrix}\frac{1}{2}\\0\end{matrix}, \tag{5}$$

λ representa momentos angulares totales del sistema.

Uno de los puntos básicos de la teoría consiste en encontrar los valores de λ compatibles con los de la energía ρ y pseudo spin f, en la ecuación (3).

En el segundo de los trabajos mencionados[2] se demostró que los valores λ podían obtenerse usando de las desigualdades:

$$\begin{matrix} 0 \leq 2q \leq K_2 \\ K_2 - \lambda \leq 2q \leq K_1 - \lambda \end{matrix} \qquad \text{si } K_1 - \lambda \quad \text{par} \tag{6}$$

$$0 \leqslant 2q \leqslant K_2 - 1$$

$$K_2 - \lambda \leqslant 2q \leqslant K_1 - 1 - \lambda \qquad \text{si } K_1 - \lambda \text{ non} \tag{7}$$

donde

$$K_1 = \frac{\rho}{2} + f \quad , \qquad K_2 = \frac{\rho}{2} - f$$

Son compatibles únicamente valores de ρ, f, y λ que den valores enteros de q que satisfagan las desigualdades (6) ó (7).

Para los valores de q obtenidos mediante las desigualdades (6) ó (7) se puede construir una matriz $\beta_{q'q}$ definida de la siguiente manera:

$$\beta_{q-1,q} = -2q(\lambda - K_2 + 2q)\ (\lambda - K_2 + 2q - 1) \tag{8a}$$

$$\beta_{q+1,q} = (K_2 - 2q)\ (K_2 - 2q - 1)\ (K_1 - \lambda - 2q) \qquad K_1 - \lambda \text{ par} \tag{8b}$$

$$\beta_{qq} = (K_2 - 2q)^2 (K_1 + 1) + (K_2 - 2q)\ (\lambda - K_2 + 2q)\ (\lambda + 4q + 1) + (K_2 - 2q) +$$

$$+ K_2 \lambda - \tfrac{1}{3}(K_1 + K_2 + \tfrac{3}{2})\ \lambda(\lambda + 1) \tag{8c}$$

$$\beta_{q-1,q} = -2q(\lambda - K_2 + 2q)\ (\lambda - K_2 + 2q - 1) \tag{9a}$$

$$\beta_{q+1,q} = (K_2 - 2q - 1)\ (K_2 - 2q - 2)\ (K_1 - \lambda - 2q - 1) \qquad K_1 - \lambda \text{ non} \tag{9b}$$

$$\beta_{qq} = (K_2 - 2q - 1)\ [(2K_1 + 2\lambda + 3) + (K_2 - 1 - 2q)\ (K_1 - 1) + (\lambda - K_2 + 2q)\ (\lambda + 4q)] +$$

$$+ (K_1 + 1) + (K_2 - 1)\ (\lambda - 1) - \tfrac{1}{3}(K_1 + K_2 + \tfrac{3}{2})\ \lambda(\lambda + 1) \tag{9c}$$

$$\beta_{q'q} = 0 \qquad \text{si} \quad q' \neq q \pm 1,\ q$$

De los valores $\| \beta_{q'q} \|$ puede construirse la ecuación secular

$$\det.\ (\beta_{q'q} - \omega\, \delta_{q'q}) = 0 \tag{10}$$

y de aquí obtener los eigenvalores de ω asociados con el operador Ω definido en la referencia 2.

Finalmente es posible mostrar que el momento cuadrupolar del estado ρ, f, λ que designaremos por ω', está relacionado con ω por la fórmula

$$\omega' = \omega \frac{6}{(\lambda + 1)(2\lambda + 3)} \tag{11}$$

En la tabla I se dan los valores λ, ω, ω', compatibles con una ρ, f dadas usando (5, 6, 7, 10, 11). La primera columna da la ρ, la segunda f, la tercera λ ob enida de (ω) ó (7) y la cuarta de la A definida en (3). La quinta columna da la ω obtenida de la ecuación secular (10). Si sólo h y una q posible, se tiene que $\omega = \beta_{qq}$. La sexta columna da la ω' definida por (11) en términos de fracciones simples o raices cuadradas de fracciones simples. Finalmente, la séptima columna da ω' en términos de fracciones decimales. Se calculan todos los valores hasta $\rho = 12$.

En la tabla II se dan los valores $\beta_{q'q}$ en el caso que hay dos valores de q compatibles con ρ, f, λ determinados, indicando en las primeras tres columnas ρ, f, λ respectivamente. En la cuarta columna se indican los dos valores q_1, q_2 compatibles con el triplete (ρ, f, λ) y en la quinta columna se dan las matrices $\beta_{q'q}$ en el orden indicado de los elementos.

En la tabla III se da el valor de $\beta_{q'q}$ para el único caso que se presenta para $\rho \leqslant 12$ en que hay tres valores de q.

Las tablas que se presentan son de importancia para determinar los niveles de energía, momentos angulares y cuadrupolos eléctricos de los estados asociados a la interacción cuadrupolo-cuadrupolo.

Además de las tablas se presenta una gráfica de niveles de energía que se calculan con ayuda de la fórmula (3). Las diferentes columnas de la gráfica corresponden a $E = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Para cada una de estas columnas la ρ está dada por (4), la f por (5) y la λ está dada en la 3a. columna de la tabla I. Para esos valores de ρ, f, λ se calcula A, tomando el valor más bajo de A a lo largo de la línea marcada con 0. Cada uno de los niveles está marcado por un triplete (ρ, f, λ) y se indica el número de valores q correspondientes (cuando son más de uno) por el exponente 2, 3, etc. En algunos casos el mismo nivel corresponde a más de un triplete.

REFERENCIAS

1 V. Bargmann y M. Moshinsky. Nuclear Physics 18, 697 (1960)

2 V. Bargmann y M. Moshinsky. Nuclear Physics (en prensa)

TABLA I

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
0	0	0	0	0	0	0.00
1	1/2	1	- 10	- 5/3	- 1	- 1.00
2	1	0	- 40	0	0	0.00
		2	- 22	- 7	- 2	- 2.00
	0	1	- 10	5/3	1	1.00
3	3/2	1	- 66	- 3	- 9/5	- 1.80
		3	- 36	- 18	- 3	- 3.00
	1/2	1	- 30	0	0	0.00
		2	- 18	0	0	0.00
4	2	0	- 112	0	0	0.00
		2	- 94	- 11	- 33/7	- 4.71
		4	- 52	- 110/3	- 4	- 4.00
	1	1	- 58	7/3	7/5	1.40
		2	- 46	- 7	- 2	- 2.00
		3	- 28	- 6	- 1	- 1.00
	0	0	- 40	0	0	0.00
		2	- 22	7	2	2.00
5	5/2	1	- 154	- 13/3	- 13/5	- 2.60
		3	- 124	- 26	- 13/3	- 4.33
		5	- 70	- 65	- 5	- 5.00
	3/2	1	- 94	2/3	2/5	0.40
		2	- 82	- 2	- 4/7	- 0.57
		3	- 64	- 21	- 7/2	- 3.50
		4	- 40	- 55/3	- 2	- 2.00
	1/2	1	- 58	- 7/3	- 7/5	- 1.40
		2	- 46	7	2	2.00

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
5	1/2	3	- 28	6	1	1.00
6	3	0	- 216	0	0	0.00
		2	- 198	- 15	- 30/7	- 4.28
		4	- 156	- 50	- 60/11	- 5.45
		6	- 90	- 105	- 6	- 6.00
	2	1	- 138	3	9/5	1.80
		2	- 126	- 9	- 18/7	- 2.57
		3	- 108	- 12	- 2	- 2.00
		4	- 84	- 44	- 24/5	- 4.80
		5	- 54	- 39	- 3	- 3.00
	1	0	- 96	0	0	0.00
		2	- 78	$\sqrt{105}$	$\sqrt{420/7}$	2.93
				$-\sqrt{105}$	$-\sqrt{420/7}$	- 2.93
		3	- 60	0	0	0.00
		4	- 36	0	0	0.00
	0	1	- 66	3	9/5	1.80
		3	- 36	18	3	3.00
7	7/2	1	- 274	- 17/3	- 17/5	- 3.40
		3	- 244	- 34	- 17/3	- 5.66
		5	- 220	- 85	- 85/13	- 6.54
		7	- 112	- 476/3	- 7	- 7.00
	5/2	1	- 190	4/3	4/5	0.80
		2	- 178	- 4	- 8/7	- 1.14
		3	- 160	- 27	- 9/2	- 4.50
		4	- 136	- 89/3	- 178/55	- 3.24
		5	- 106	- 78	- 6	- 6.00
		6	- 70	- 70	- 4	- 4.00
	3/2	1	- 130	- 11/3	- 11/5	- 2.20
		2	- 118	11	22/7	3.14
		3	- 100	$-11+\sqrt{241}$	$-\frac{11+\sqrt{241}}{6}$	0.76
				$-11-\sqrt{241}$	$-\frac{11-\sqrt{241}}{6}$	- 4.42

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
7	3/2	4	- 76	- 44/3	- 8/5	- 1.60
		5	- 46	- 13	- 1	- 1.00
	1/2	1	- 94	- 2/3	- 2/5	- 0.40
		2	- 82	2	4/7	0.57
		3	- 64	21	7/2	3.50
		4	- 40	55/3	2	2.00
8	4	0	- 352	0	0	0.00
		2	- 334	- 19	- 38/7	- 5.43
		4	- 292	- 190/3	- 76/11	- 6.91
		6	- 226	- 133	- 38/5	- 7.60
		8	- 136	- 228	- 8	- 8.00
	3	1	- 250	11/3	11/5	2.20
		2	- 238	- 11	- 22/7	- 3.14
		3	- 220	- 18	- 3	- 3.00
		4	- 196	- 166/3	- 332/55	- 6.04
		5	- 166	- 57	- 57/13	- 4.38
		6	- 130	- 125	- 50/7	- 7.14
		7	- 88	- 340/3	- 5	- 5.00
	2	0	- 184	0	0	0.00
		2	- 166	$\sqrt{193}$	$\sqrt{772/49}$	3.97
				$-\sqrt{193}$	$-\sqrt{772/49}$	- 3.97
		3	- 148	0	0	0.00
		4	- 124	- 22/3	- 4/5	- 0.80
				- 160/3	- 64/11	- 5.82
		5	- 94	- 39	- 3	- 3.00
		6	- 58	- 35	- 2	- 2.00
	1	1	- 130	11/3	11/5	2.20
		2	- 118	- 11	- 22/7	- 3.14
		3	- 100	$11+\sqrt{241}$	$\frac{11+\sqrt{241}}{6}$	4.42
				$11-\sqrt{241}$	$\frac{11-\sqrt{241}}{6}$	- 0.75
		4	- 76	44/3	8/5	1.60

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
8	1	5	- 46	13	1	1.00
	0	0	- 112	0	0	0.00
		2	- 94	11	22/7	3.14
		4	- 62	110/3	4	4.00
9	9/2	1	- 426	- 7	- 21/5	- 4.20
		3	- 396	- 42	- 7	- 7.00
		5	- 372	- 105	- 105/13	- 8.08
		7	- 264	- 196	- 147/17	- 8.65
		9	- 162	- 315	- 9	- 9.00
7/2	1	1	- 318	2	6/5	1.20
		2	- 306	- 6	- 12/7	- 1.71
		3	- 288	- 33	- 11/?	- 5.50
		4	- 264	- 41	- 246/55	- 4.47
		5	- 234	- 96	- 96/13	- 7.38
		6	- 196	- 96	- 192/35	- 5.48
		7	- 156	- 187	- 33/4	- 8.25
		8	- 108	- 171	- 6	- 6.00
5/2	1	1	- 234	- 5	- 3	- 3.00
		2	- 222	15	30/7	4.28
		3	- 204	$-15+\sqrt{345}$	$-5+\sqrt{3105}$	0.59
				$-15-\sqrt{345}$	$-5-\sqrt{3105}$	- 5.59
		4	- 180	- 20	- 24/11	- 2.18
		5	- 150	$-60+\sqrt{1065}$	$-\frac{60+\sqrt{38340}}{13}$	- 2.10
				$-60-\sqrt{1065}$	$-\frac{60-\sqrt{38340}}{13}$	- 7.12
		6	- 114	- 75	- 30/7	- 4.28
		7	- 72	- 68	- 3	- 3.00
3/2	1	1	- 174	0	0	0.00
		2	- 162	0	0	0.00
		3	- 144	$\sqrt{945}$	$\sqrt{\frac{105}{4}}$	5.12
				$-\sqrt{945}$	$-\sqrt{\frac{105}{4}}$	- 5.12

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
9	3/2	4	- 120	$\sqrt{385}$	$\sqrt{\frac{13860}{55}}$	2.14
				$-\sqrt{385}$	$-\sqrt{\frac{13860}{55}}$	- 2.14
		5	- 90	0	0	0.00
		6	- 54	0	0	0.00
	1/2	1	- 134	- 3	- 9/5	- 1.80
		2	- 146	9	18/7	2.57
		3	- 64	12	2	2.00
		4	- 84	44	264/55	4.80
		5	- 54	39	3	3.00
10	5	0	- 520	0	0	0.00
		2	- 502	- 23	- 46/7	- 6.57
		4	- 460	- 230/3	- 92/11	- 8.36
		6	- 394	- 161	- 46/5	- 9.20
		8	- 304	- 276	- 184/19	- 9.68
		10	- 190	- 1265/3	- 10	- 10.00
4		1	- 394	13/3	13/5	2.60
		2	- 382	- 13	- 26/7	- 3.71
		3	- 364	- 24	- 4	- 4.00
		4	- 340	- 200/3	- 80/11	- 7.27
		5	- 310	- 75	- 75/13	- 5.77
		6	- 274	- 151	- 302/35	- 8.62
		7	- 232	- 446/3	- 223/34	- 6.56
		8	- 284	- 266	- 28/3	- 9.33
		9	- 130	- 245	- 7	- 7.00
3		0	- 304	0	0	0.00
				$\sqrt{313}$	$\frac{\sqrt{1252}}{7}$	5.05
		2	- 286	$-\sqrt{313}$	$-\frac{\sqrt{1252}}{7}$	- 5.05
		3	- 268	0	0	0.00

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
10	3			$-\frac{119}{3}+\sqrt{649}$	$-\frac{238+\sqrt{23364}}{55}$	- 1.55
		4	- 244	$-\frac{119}{3}-\sqrt{649}$	$-\frac{238-\sqrt{23364}}{55}$	- 7.11
		5	- 214	- 51	- 51/13	- 3.92
				$-102+\sqrt{1969}$	$-\frac{204+\sqrt{7876}}{35}$	- 3.29
		6	- 178	$-102-\sqrt{1969}$	$-\frac{204-\sqrt{7876}}{35}$	- 8.37
		7	- 136	- 374/3	- 187/34	- 5.50
		8	- 88	- 114	- 4	- 4.00
2	1	1	- 224	13/3	13/5	2.60
		2	- 218	- 13	- 26/7	- 3.71
		3	- 196	36	6	6.00
				- 10	- 5/3	- 1.66
				$-\frac{55}{3}+\sqrt{1633}$	$-2+\frac{\sqrt{58788}}{55}$	2.04
		4	- 172	$-\frac{55}{3}-\sqrt{1633}$	$-2-\frac{\sqrt{58788}}{55}$	- 6.77
				$-20+\sqrt{673}$	$-\frac{20+\sqrt{673}}{13}$	0.45
		5	- 142	$-20-\sqrt{673}$	$-\frac{20-\sqrt{673}}{13}$	- 3.53
		6	- 106	- 25	- 10/7	- 1.43
		7	- 64	- 68/3	- 1	- 1.00
1	0	1	- 184	0	0	0.00
				$\sqrt{193}$	$\frac{\sqrt{772}}{7}$	3.97
		2	- 166	$-\sqrt{193}$	$-\frac{\sqrt{772}}{7}$	- 3.97
		3	- 148	0	0	0.00
				160/3	64/11	5.82
		4	- 124	22/3	4/5	0.80
		5	- 94	39	3	3.00
		6	- 58	35	2	2.00
0	1	1	- 154	13/3	13/5	2.60

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
10	0	3	- 124	26	13/3	4.33
		5	- 70	65	5	5.00
11	11/2	1	- 610	- 25/3	- 5	- 5.00
		3	- 580	- 50	- 25/3	- 8.33
		5	- 526	- 125	- 125/13	- 9.61
		7	- 448	- 700/3	- 175/17	- 10.29
		9	- 346	- 375	- 75/7	- 10.71
		11	- 220	- 550	- 11	- 11.00
9/2		1	- 478	8/3	8/5	1.60
		2	- 466	- 8	- 16/7	- 2.28
		3	- 448	- 39	- 13/2	- 6.50
		4	- 424	- 157/3	- 314/55	- 5.71
		5	- 394	- 114	- 114/13	- 8.77
		6	- 358	- 122	- 244/35	- 6.97
		7	- 316	- 667/3	- 667/68	- 9.81
		8	- 268	- 217	- 434/57	- 7.61
		9	- 214	- 364	- 52/5	- 10.40
		10	- 154	- 1012/3	- 8	- 8.00
11	7/2	1	- 370	- 19/3	- 19/5	- 3.80
		2	- 358	19	38/7	5.43
				$-19+\sqrt{481}$	$-\frac{19+\sqrt{481}}{6}$	0.48
		3	- 340	$-19-\sqrt{481}$	$-\frac{19-\sqrt{481}}{6}$	- 6.82
		4	- 316	- 76/3	- 152/55	- 2.76
				$-76+\sqrt{1201}$	$-\frac{76+\sqrt{1201}}{13}$	- 3.19
		5	- 286	$-76-\sqrt{1201}$	$-\frac{76-\sqrt{1201}}{13}$	- 8.51
		6	- 250	- 95	- 38/7	- 5.43
				$-\frac{475}{3}+\sqrt{3385}$	$-\frac{475+\sqrt{30465}}{68}$	- 4.41
		7	- 208	$-\frac{475}{3}-\sqrt{3385}$	$-\frac{475-\sqrt{30465}}{68}$	- 9.55

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
11	7/2	8	- 160	- 190	- 20/3	- 6.67
		9	- 106	- 15	- 5	- 5.00
	5/2	1	- 286	2/3	2/5	0.40
		2	- 274	- 2	- 4/7	- 0.57
				$2+\sqrt{1489}$	$\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1489}{6}}$	6.76
		3	- 256	$2-\sqrt{1489}$	$\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1489}{6}}$	- 6.10
				$-\frac{10}{3}+\sqrt{673}$	$-\frac{20+\sqrt{24228}}{55}$	2.47
		4	- 232	$-\frac{10}{3}-\sqrt{673}$	$-\frac{20-\sqrt{24228}}{55}$	- 3.19
				$-55+\sqrt{2713}$	$-\frac{55+\sqrt{2713}}{13}$	- 0.23
		5	- 202	$-55-\sqrt{2713}$	$-\frac{55-\sqrt{2713}}{13}$	- 8.23
				$-51+\sqrt{1201}$	$-\frac{102+\sqrt{1201}}{35}$	- 0.93
		6	- 166	$-51-\sqrt{1201}$	$-\frac{102-\sqrt{1201}}{35}$	- 4.89
		7	- 124	- 187/3	- 11/4	- 2.75
		8	- 76	- 57	- 2	- 2.00
	3/2	1	- 226	- 13/3	- 13/5	- 2.60
		2	- 214	13	26/7	3.71
		3	- 196	10	5/3	1.67
				- 36	- 6	- 6.00
				$\frac{65}{3}+\sqrt{1633}$	$\frac{130+\sqrt{58788}}{55}$	6.77
		4	- 172	$\frac{65}{3}-\sqrt{1633}$	$\frac{130-\sqrt{58788}}{55}$	- 2.05
				$20+\sqrt{673}$	$\frac{20+\sqrt{673}}{13}$	3.53
		5	- 142	$20-\sqrt{673}$	$\frac{20-\sqrt{673}}{13}$	- 0.45
		6	- 106	25	10/7	1.43
		7	- 64	68/3	1	1.00
	1/2	1	- 190	- 4/3	- 4/5	- 0.80

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
11	1/2	2	- 178	4	8/7	1.14
		3	- 160	27	9/2	4.50
		4	- 136	89/3	178/55	3.24
		5	- 106	78	6	6.00
		6	- 70	70	4	4.00
12	6	0	- 720	0	0	0.00
		2	- 702	- 27	- 54/7	- 7.71
		4	- 660	- 90	- 108/11	- 9.82
		6	- 594	- 189	- 378/35	- 10.80
		8	- 504	- 324	- 216/19	- 11.37
		10	- 390	- 495	- 270/23	- 11.73
		12	- 252	- 702	- 12	- 12.00
	5	1	- 570	5	3	3.00
		2	- 558	- 15	- 30/7	- 4.28
		3	- 540	- 30	- 5	- 5.00
		4	- 516	- 78	- 468/55	- 8.51
		5	- 486	- 93	- 93/13	- 7.15
		6	- 450	- 177	- 354/35	- 10.11
		7	- 408	- 184	- 138/17	- 8.12
		8	- 360	- 312	- 208/19	- 10.95
		9	- 306	- 303	- 303/35	- 8.66
		10	- 246	- 483	- 126/11	- 11.45
		11	- 180	- 450	- 9	- 9.00
4		0	- 456	0	0	0.00
				$\sqrt{465}$	$\frac{\sqrt{1860}}{7}$	6.16
		2	- 438	$-\sqrt{465}$	$-\frac{\sqrt{1860}}{7}$	- 6.16
		3	- 420	0	0	0.00
				$-49+\sqrt{801}$	$-\frac{294+\sqrt{28836}}{55}$	- 2.25
		4	- 396	$-49-\sqrt{801}$	$-\frac{294-\sqrt{28836}}{55}$	- 8.43

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
12	4	5	- 366	- 63	- 63/13	- 4.85
				$-126-\sqrt{2121}$	$-\frac{252+\sqrt{8484}}{35}$	- 4.57
		6	- 330	$-126+\sqrt{2121}$	$-\frac{252-\sqrt{8484}}{35}$	- 9.83
		7	- 288	- 154	- 231/34	- 6.79
				$-231+\sqrt{5481}$	$-\frac{462+\sqrt{21924}}{57}$	- 5.50
		8	- 240	$-231-\sqrt{5481}$	$-\frac{462-\sqrt{21924}}{57}$	- 10.70
		9	- 186	- 273	- 39/5	- 7.80
		10	- 126	- 253	- 6	- 6.00
12	3	1	- 354	5	3	3.00
		2	- 342	- 15	- 30/7	- 4.28
				$\frac{30+\sqrt{3780}}{2}$	$\frac{30+\sqrt{3780}}{12}$	7.62
		3	- 324	$\frac{30-\sqrt{3780}}{2}$	$\frac{30-\sqrt{3780}}{12}$	- 2.62
				$\frac{50+\sqrt{9220}}{2}$	$-\frac{150+\sqrt{82980}}{55}$	2.51
		4	- 300	$\frac{50-\sqrt{9220}}{2}$	$-\frac{150-\sqrt{82980}}{55}$	- 7.97
				$-\frac{60+\sqrt{3780}}{2}$	$-\frac{60-\sqrt{3780}}{26}$	0.05
		5	- 270	$-\frac{60-\sqrt{3780}}{2}$	$-\frac{60-\sqrt{3780}}{26}$	- 4.67
				$-\frac{204+\sqrt{17316}}{2}$	$-\frac{204+\sqrt{17316}}{35}$	- 2.07
		6	- 234	$-\frac{204-\sqrt{17316}}{2}$	$-\frac{204-\sqrt{17316}}{35}$	- 9.59
				$-\frac{190+\sqrt{8356}}{2}$	$-\frac{570+\sqrt{75204}}{136}$	- 2.17
		7	- 192	$-\frac{190-\sqrt{8356}}{2}$	$-\frac{570-\sqrt{75204}}{136}$	- 6.21
		8	- 144	- 114	- 4	- 4.00
		9	- 110	- 105	- 3	- 3.00
2		0	- 288	0	0	0.00

ρ	f	λ	A	ω	ω'	ω' dec.
				$\sqrt{297}$	$\sqrt{\frac{1188}{49}}$	4.92
12	2	2	- 270	$-\sqrt{297}$	$-\sqrt{\frac{1188}{49}}$	- 4.92
		3	- 252	0	0	0.00
				0	0	0.00
				$\sqrt{5092}$	$\sqrt{\frac{210672}{3025}}$	7.78
		4	- 228	$-\sqrt{5092}$	$-\sqrt{\frac{210672}{3025}}$	- 7.78
				$\sqrt{2457}$	$\sqrt{\frac{2457}{169}}$	3.81
		5	- 198	$-\sqrt{2457}$	$-\sqrt{\frac{2457}{169}}$	- 3.81
				$\sqrt{945}$	$\sqrt{\frac{756}{245}}$	1.76
		6	- 162	$-\sqrt{945}$	$-\sqrt{\frac{756}{245}}$	- 1.76
		7	- 120	0	0	0.00
		8	- 72	0	0	0.00
1		1	- 234	5	3	3.00
		2	- 222	- 15	- 30/7	- 4.28
				$\frac{30+\sqrt{1380}}{2}$	$\frac{30+\sqrt{1380}}{12}$	5.60
		3	- 204	$\frac{30-\sqrt{1380}}{2}$	$\frac{30-\sqrt{1380}}{12}$	- 0.60
		4	- 180	20	24/11	2.18
				$\frac{120+\sqrt{4260}}{2}$	$\frac{120+\sqrt{4260}}{26}$	7.12
		5	- 150	$\frac{120-\sqrt{4260}}{2}$	$\frac{120-\sqrt{4260}}{26}$	- 2.10
		6	- 114	75	30/7	4.28
		7	- 72	68	3	3.00
0		0	- 216	0	0	0.00
		2	- 198	15	30/7	4.28
		4	- 156	50	60/11	5.45
		6	- 190	105	6	6.00

TABLA II

Valores de la Matriz $||\beta_{q'q}||$ para Soluciones de Valores Dobles de q Dados por las Ecuaciones

ρ	f	λ	q_1 / q_2	$\beta_{q_1q_1}$ / $\beta_{q_2q_1}$	$\beta_{q_1q_2}$ / $\beta_{q_2q_2}$
6	1	2	0	11	- 4
			1	4	- 11
7	3/2	3	0	6	- 12
			1	4	- 28
8	2	2	0	15	- 4
			1	8	- 15
8	2	4	0	- 16/3	- 24
			1	4	- 166/3
8	1	3	0	28	- 4
			1	12	- 6
9	5/2	3	0	6	- 12
			1	8	- 36
9	5/2	5	0	- 25	- 40
			1	4	- 95
9	3/2	3	0	31	- 4
			1	4	- 31
9	3/2	4	0	23	- 12
			1	12	- 23
10	3	2	0	19	- 4
			1	12	- 19
10	3	4	0	- 32/3	- 24
			1	8	- 206/3
10	3	6	0	- 55	- 60
			1	4	- 149
10	2	3	0	38	- 4
			1	24	- 12

ρ	f	λ	q_1 q_2	$\beta_{q_1 q_2}$ $\beta_{q_2 q_1}$	$\beta_{q_1 q_2}$ $\beta_{q_2 q_2}$
10	2	4	0	58/3	- 12
			1	4	- 188/3
10	2	5	0	11	- 24
			1	12	- 51
10	1	2	1	15	- 8
			2	4	- 15
10	1	4	0	166/3	- 4
			1	24	16/3
11	7/2	3	0	6	- 12
			1	12	- 44
11	7/2	5	0	- 37	- 40
			1	8	- 115
11	7/2	7	0	- 292/3	- 84
			1	4	- 658/3
11	5/2	3	0	41	- 4
			1	8	- 37
11	5/2	4	0	83/3	- 12
			1	24	- 103/3
11	5/2	5	0	- 2	- 24
			1	4	- 108
11	5/2	6	0	- 10	- 40
			1	12	- 92
11	3/2	3	1	12	- 24
			2	4	- 38
11	3/2	4	0	188/3	- 4
			1	12	- 58/3
11	3/2	5	0	51	- 12
			1	24	- 11
12	4	2	0	23	- 4
			1	16	- 23

$$\mathcal{H} = H - [\underline{Q}^2 / I]$$

$$H\psi = E\psi \quad , \quad \underline{\Lambda}^2\psi = \lambda(\lambda+1)\psi$$

$$\underline{Q}^2\psi = \left[\tfrac{1}{6}\rho(\rho+6) + 2f(f+1) - \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1)\right]\psi$$

$$\rho = E, E-3, \ldots \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$f = \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}-1, \ldots \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}$$

ρ	f	λ	q_1 q_2	$\beta_{q_1 q_1}$ $\beta_{q_2 q_1}$	$\beta_{q_1 q_2}$ $\beta_{q_2 q_2}$
12	4	4	0	- 16	- 24
			1	12	- 82
12	4	6	0	- 75	- 60
			1	8	- 177
12	4	8	0	- 154	- 112
			1	4	- 308
12	3	3	0	48	- 4
			1	36	- 18
12	3	4	0	24	- 12
			1	8	- 74
12	3	5	0	9	- 24
			1	24	- 69
12	3	6	0	- 35	- 40
			1	4	- 169
12	3	7	0	- 42	- 60
			1	12	- 148
12	2	2	1	19	- 8
			2	8	- 19
12	2	5	0	51	- 12
			1	12	- 51
12	2	6	0	39	- 24
			1	24	- 39
12	1	3	1	36	- 8
			2	12	- 6
12	1	5	0	95	- 4
			1	40	25

TABLA III

Valores de los Elementos de la Matriz $||\beta_{q'\,q}||$ para el Caso de Triplete

ρ	f	λ	q_1	$\beta_{q_0\,q_0}$	$\beta_{q_1\,q_0}$	$\beta_{q_2\,q_0}$
			q_2	$\beta_{q_0\,q_1}$	$\beta_{q_1\,q_1}$	$\beta_{q_2\,q_1}$
			q_3	$\beta_{q_0\,q_2}$	$\beta_{q_1\,q_2}$	$\beta_{q_2\,q_2}$
			0	74	48	0
12	2	4	1	- 4	0	4
			2	0	- 48	- 74

Esta página está intencionalmente en blanco