

DESCRIPCION CAUSAL DE LA DISPERSION
POTENCIAL DE BARGMANN

J. M. Lozano*

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México

(Recibido: 7 Noviembre 1960)

RESUMEN

In a previous paper, we have studied the time dependent description of the scattering by a general potential, and shown that the Laplace transform of the time dependent Green function of the problem satisfies dispersion relations. In this paper we obtain the explicit form of the time dependent Green function for a potential of the Bargmann type, and discuss the relation between the time dependent behavior of the Green function and the position of the poles and zeros of $S(\kappa)$ in the complex wave number plane.

* Subsidiado del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

I INTRODUCCION

En un trabajo anterior¹, que en adelante se citará como (I), se hizo un estudio de la dispersión de partículas no relativistas por un centro dispersor con simetría esférica de alcance no necesariamente finito.

En el caso de potenciales cortados, es sabido² que la función $S(\kappa)$ no tiene polos en el semiplano superior I_+ del plano complejo del momento κ , excepto posiblemente sobre el eje imaginario, en cuyo caso los polos representan estados ligados. Por otra parte, si a es el alcance del potencial, la función $S(\kappa) \exp(2i\kappa a) \rightarrow 0$ si $|\kappa| \rightarrow \infty$ en I_+ . Estas propiedades implican relaciones de dispersión para la función $S(\kappa) \exp(2i\kappa a)$.

La situación en el caso de potenciales no cortados es diferente, ya que es posible que existan potenciales que den lugar a una matriz $S(\kappa)$ que tenga polos en I_+ fuera del eje imaginario³. Este hecho impide que la función $S(\kappa)$ satisfaga relaciones de dispersión del tipo usual y además presenta el problema de cómo interpretar los polos de la función $S(\kappa)$ en el semiplano I_+ .

En (I) se atacó el problema de obtener la función de onda dependiente del tiempo en términos de una función, que se designará como función de dispersión y cuyas propiedades analíticas son tales que dan lugar a relaciones de dispersión. En (I) esas propiedades se obtuvieron por una parte, como consecuencia de la condición de causalidad formulada como sigue: la función de onda dependiente del tiempo asociada con cualquier paquete de onda inicial, está acotada en todo tiempo; y por otra parte, se demostró directamente, construyendo la función de dispersión en términos de funciones de Jost⁴, que la función de dispersión tiene esas propiedades. Finalmente se discute en (I) la dispersión por el potencial de Eckart⁵, para el que las funciones de Jost, y por tanto la función de dispersión, tienen una forma especialmente simple, obteniéndose la función de onda dependiente del tiempo en términos de unas funciones básicas de interacción de Green (BIG) asociadas con los polos y los ceros de la función S , y cuyo comportamiento en el curso del tiempo es conocido, el cual permite hacer una interpretación de los polos de la matriz S .

El propósito del presente trabajo es ilustrar los resultados obtenidos en (I) con un ejemplo un poco más complejo que el presentado allí. Este ejemplo es el de la dispersión por un potencial de Bargmann que da lugar a una función $S(\kappa)$ con cuatro polos, dos de los cuales pueden estar en I_+ fuera del eje imaginario.

II PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Por simplicidad, se tratará el problema de la dispersión de una onda s por un potencial central. La ecuación que satisface la función de onda dependiente del tiempo $\phi(r, t) \equiv r\psi(r, t)$ es

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(r, t)}{\partial r^2} - V(r) \phi(r, t) = -i \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

donde $V(r)$ es el potencial y $\hbar = m = 1$; m es la masa de la partícula.

Como la descripción en el curso del tiempo de la dispersión por un potencial puede expresarse en términos de la función de Green del problema, es posible restringir la discusión al caso en el que la condición inicial es

$$[\phi(r, t)]_{t=0} = -\frac{i}{2r_0} \delta(r-r_0) \quad (2)$$

La función de Green se denotará por $\phi(r, r_0, t)$. Como se demostró en (I), la función $\phi(r, r_0, t)$ está dada por

$$\phi(r, r_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(r, r_0, \kappa) e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 t} \kappa d\kappa, \quad (3)$$

donde la función $\bar{\phi}(r, r_0, \kappa)$, que se designará como función de dispersión, está dada para $r > r_0$ en la siguiente forma:

$$\bar{\phi}(r, r_0, \kappa) = \left\{ \frac{1}{2i\kappa r_0} [f(-\kappa) f(\kappa, r_0) - f(\kappa) f(-\kappa, r_0)] \right\} \frac{f(-\kappa, r)}{f(-\kappa)}. \quad (4)$$

Las funciones $f(\pm\kappa, r)$ son las funciones de Jost⁴ que satisfacen la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \kappa^2 - 2V(r) \right] f(\pm\kappa, r) = 0. \quad (5)$$

y la condición asintótica

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(\pm\kappa, r) e^{\pm i\kappa r} = 1, \quad (6)$$

y se ha definido

$$f(\pm\kappa) \equiv f(\pm\kappa, 0) \quad (7)$$

En (I) se demostró que la expresión entre llaves {} en la ecuación (4) es una función entera del momento κ , y por otra parte, Bargmann⁷ ha probado que si el potencial $V(r)$ satisface la condición

$$\int_0^\infty |V(r)| dr < M < \infty, \quad (8)$$

entonces la función $f(-\kappa, r)$, como función de κ es analítica en I_+ , y la función $f(\kappa, r)$ es analítica en I_- .

El problema es ahora, obtener explícitamente la forma de las funciones de Jost y de la función de dispersión para un potencial de Bargmann con el fin de poder exhibir la función de Green dependiente del tiempo y de interpretar los polos de la matriz $S(\kappa)$, que como es sabido, está dada por

$$S(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{f(-\kappa)} \quad (9)$$

Es evidente que los polos de la matriz $S(\kappa)$ están en los polos de la función $f(\kappa)$ y en los ceros de la función $f(-\kappa)$, mientras que los polos de la función de dispersión dada por la ecuación (4) están en los ceros de $f(-\kappa)$.

III EL POTENCIAL DE BARGMANN Y LA FUNCION DE DISPERSION

Bargmann⁶ ha desarrollado un procedimiento mediante el cual se puede explícitamente construir un potencial $V(r)$ y las funciones de Jost asociadas a él, de manera de obtener una matriz $S(\kappa)$ con cuatro polos. Los resultados pueden resumirse como sigue:

Sean α y β dos números complejos distintos cuyas partes real e imaginaria sean positivas. Entonces, si el potencial se pone

$$V(r) = \left(\frac{\omega'(r)}{\omega(r)} \right)^2 - \frac{\omega''(r)}{\omega(r)} = - \frac{d^2}{dr^2} \log \omega(r) , \quad (10)$$

donde la función $\omega(r)$ está definida por

$$\omega(r) = \sum_{n_1 n_2} a_{n_1 n_2} e^{(n_1 \beta + n_2 \beta^*) r} , \quad (11)$$

donde n_1 y n_2 toman los valores ± 1 y las cuatro constantes $a_{n_1 n_2}$ están dadas por

$$a_{n_1 n_2} = \frac{n_1(\alpha + n_1 \beta)(\alpha^* + n_1 \beta) n_2(\alpha + n_2 \beta^*)(\alpha^* + n_2 \beta^*)}{n_1 \beta + n_2 \beta^*} , \quad (12)$$

entonces la función de Jost $f(\kappa, r)$ es

$$f(\kappa, r) = e^{-i\kappa r} \left[1 + \frac{A(r)}{\kappa - i\beta} + \frac{B(r)}{\kappa + i\beta^*} \right] , \quad (13)$$

donde

$$A(r) = \frac{2i\beta}{\omega(r)} \left[a_{-1,1} e^{(\beta^* - \beta)r} + \frac{\beta + \beta^*}{\beta - \beta^*} a_{-1,1} e^{-(\beta + \beta^*)r} \right] \quad (14)$$

y
$$B(r) = A(r)^* \tag{15}$$

En particular, para $r = 0$, se tiene que

$$f(\kappa) = \frac{(\kappa - ia)(\kappa - ia^*)}{(\kappa - i\beta)(\kappa - i\beta^*)} \tag{16}$$

Por tanto, la función $S(\kappa)$ es, según la ecuación (9),

$$S(\kappa) = \frac{(\kappa - ia)(\kappa - ia^*)(\kappa + i\beta)(\kappa + i\beta^*)}{(\kappa + ia)(\kappa + ia^*)(\kappa - i\beta)(\kappa - i\beta^*)} \tag{17}$$

Evidentemente, la función $S(\kappa)$ tiene un polo en cada cuadrante, como se muestra en la figura 1.

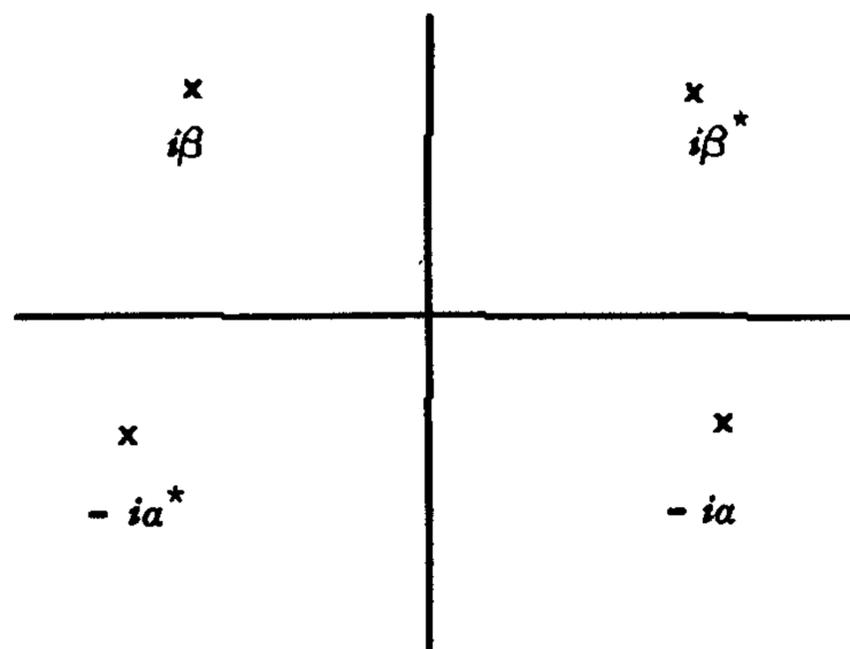


Figura 1

Polos de la matriz $S(\kappa)$ en el plano κ

La forma explícita del potencial $V(r)$ definido por las ecuaciones (10), (11) y (12), es bastante complicada, pero su valor en el origen y su forma asintótica para distancias muy grandes son, como puede verse por un cálculo elemental,

$$V(0) = a^2 + a^{*2} - (\beta^2 + \beta^{*2}) \tag{18}$$

y

$$V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 8|\beta|^2 \left| \frac{a_{1,-1}}{a_{11}} \right| \cos(2\beta_y r + \delta) e^{-2\beta_x r}, \quad (19)$$

donde

$$\delta = \arg\left(-\frac{a_{1,-1}}{a_{11}} \beta^{*2}\right). \quad (20)$$

En la figura 2 se indica la forma del potencial.

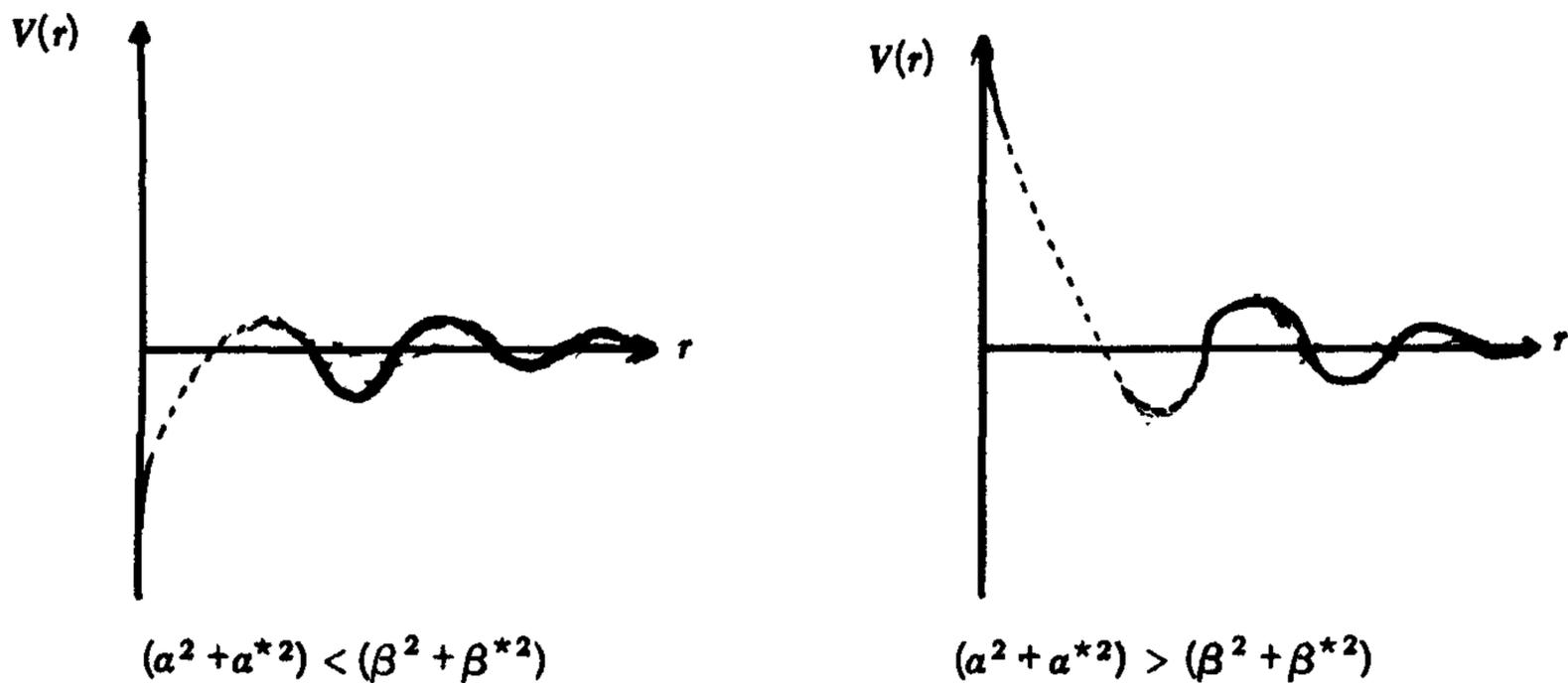


Figura 2

Ahora es conveniente construir explícitamente la función de dispersión $\bar{\phi}(r, r_0, \kappa)$ dada por la ecuación (4), mediante el uso de la forma de las funciones de Jost dada en la ecuación (13). Mediante una manipulación algebraica directa, aunque un poco laboriosa, se puede demostrar⁸ que si se definen las funciones $C_1(r)$, $C_2(r)$, $D_1(r)$ y $D_2(r)$ en la siguiente forma:

$$C_1(r) = \frac{4\beta}{\omega(0)\omega(r)} \left[a_{-11} + \frac{\beta + \beta^*}{\beta - \beta^*} a_{-1,-1} \right] \left[a_{11} e^{\beta^* r} + \frac{\beta - \beta^*}{\beta + \beta^*} a_{1,-1} e^{-\beta^* r} \right], \quad (21)$$

$C_2(r)$ se obtiene de $C_1(r)$ intercambiando β y β^* ,

$$D_1(r) = \frac{1}{a^* - a} \left\{ (\beta^* - a) [i(\beta - a) - A(r)] - (\beta - a) B(r) \right\}, \quad (22)$$

$D_2(r)$ se obtiene de $D_1(r)$ intercambiando a y a^* , y β y β^* , donde las funciones $A(r)$ y $B(r)$ están dadas en las ecuaciones (14) y (15), entonces la función de dispersión asociada al potencial de Bargmann está dada por

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(r, r_0, \kappa) &= \\ &= \frac{1}{2i\kappa r_0} \left\{ -2i \operatorname{sen} \kappa r_0 + C_1(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(\kappa - i\beta)r_0}{\kappa - i\beta} - \frac{\operatorname{sen}(\kappa + i\beta)r_0}{\kappa + i\beta} \right] \right. \\ &\quad \left. + C_2(r_0) \left[\frac{\operatorname{sen}(\kappa - i\beta^*)r_0}{\kappa - i\beta^*} - \frac{\operatorname{sen}(\kappa + i\beta^*)r_0}{\kappa + i\beta^*} \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{D_1(r)}{\kappa + ia} + \frac{D_2(r)}{\kappa + ia^*} \right] e^{i\kappa r}. \end{aligned} \quad (23)$$

Es evidente que la función entre llaves {} es una función entera de κ , de modo que los únicos polos de la función de dispersión $\bar{\phi}(r, r_0, \kappa)$ están en los puntos $\kappa = ia$ y $\kappa = -ia^*$, que son los ceros de la función $f(-\kappa)$.

Si se sustituye ahora la función $\bar{\phi}(r, r_0, \kappa)$ en la ecuación (3), que da la función de Green dependiente del tiempo, es posible evaluar explícitamente esta función.

IV. LAS FUNCIONES BASICAS DE INTERACCION DE GREEN

Si se expresan los senos de la función de dispersión dada en la ecuación (23) en términos de exponenciales, se ve que las integrales que hay que evaluar son de los tipos

$$G(r \pm r_0, t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\kappa(r \pm r_0) - \frac{1}{2}\kappa^2 t]} d\kappa \quad (24)$$

y

$$\chi(r \pm r_0, k, t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\kappa(r \pm r_0) - \frac{1}{2}\kappa^2 t]} \frac{d\kappa}{\kappa - k} \quad (25)$$

La función $G(r \pm r_0, t)$ es la función de Green dependiente del tiempo cuando no hay potencial, y su valor es

$$G(r \pm r_0, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{(r \pm r_0)^2}{2t}}, \quad (26)$$

la cual representa términos de difusión pura del paquete.

La función $\chi(r \pm r_0, k, t)$ está asociada con los valores de κ que son los ceros y los polos de la función $f(-\kappa)$, y con los polos de $f(\kappa)$, o sea, con los polos de la matriz $S(\kappa)$ y con algunos de sus ceros; esto es, están asociadas con algunas propiedades intrínsecas de la función $S(\kappa)$, y a través de ella están relacionadas con la interacción, de modo que pueden ser designadas como funciones básicas de interacción de Green (BIG). Estas funciones han sido estudiadas anteriormente⁹, y su forma explícita está dada por

$$\chi(r, k, t) = e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} \operatorname{erfc} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{r - kt}{\sqrt{2t}} \right], \quad (27)$$

donde

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2} du \quad (28)$$

La forma asintótica de las funciones χ para tiempos muy grandes es⁹

$$\chi(r, k, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{\pi k^2 t}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{r^2}{2t}} & , \quad \frac{3}{4}\pi < \arg k < \frac{7\pi}{4} \\ 2e^{i(kr - \frac{1}{2}k^2 t)} - \sqrt{\frac{2}{\pi k^2 t}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{r^2}{2t}} & , \quad -\frac{\pi}{4} < \arg k < \frac{3\pi}{4} . \end{cases} \quad (29)$$

Ahora bien, aunque en la evaluación explícita de la función de Green dependiente del tiempo, las funciones $\chi(r \pm r_0, k, t)$ aparecen asociadas no sólo a los ceros de la función $f(-\kappa)$, que son los polos de la función de dispersión, sino también a los polos de las funciones $f(-\kappa)$ y $f(\kappa)$, es necesario ver de que manera se combinan las funciones χ asociadas a esos polos de modo que su contribución se anule.

En primer lugar, hay que notar que la función de Green dependiente del tiempo dada por la ecuación (3), puede ponerse, según las ecuaciones (4) y (9), en la forma

$$\phi(r, r_0, t) = \frac{1}{4\pi i r_0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\kappa, r_0) f(-\kappa, r) - S(\kappa) f(-\kappa, r_0) f(-\kappa, r)] e^{-i\frac{1}{2}\kappa^2 t} d\kappa \quad (30)$$

Ahora bien, por la forma de las funciones $f(\pm\kappa, r)$ dada por la ecuación (13) se ve claramente que el primer término del integrando contiene un factor $\exp i\kappa(r-r_0)$, y que el segundo contiene un factor $\exp i\kappa(r+r_0)$. Pero en el término $f(\kappa, r_0) f(-\kappa, r)$ no existe ningún polo de la función de dispersión, ya que estos polos están asociados sólo con los ceros de $f(-\kappa)$, entonces, no puede aparecer en la función de Green dependiente del tiempo $\phi(r, r_0, t)$, ningún término $\chi(r-r_0, k, t)$ asociado a los polos de la función de dispersión $\kappa = -i\alpha, -i\alpha^*$.

La función de Green dependiente del tiempo es

$$\begin{aligned}
\phi(r, r_0, t) = & -\frac{1}{4r_0} \left[G(r+r_0, t) - G(r-r_0, t) \right] \\
& + \frac{i}{8r_0} C_1(r_0) \left[1 + \frac{D_1(r)}{i(a+\beta)} + \frac{D_2(r)}{i(a^*+\beta)} \right] \left[e^{\beta r_0} \chi(r+r_0, i\beta, t) - e^{-\beta r_0} \chi(r-r_0, i\beta, t) \right] \\
& - \frac{i}{8r_0} C_1(r_0) \left[1 + \frac{D_1(r)}{i(a-\beta)} + \frac{D_2(r)}{i(a^*-\beta)} \right] \left[e^{-\beta r_0} \chi(r+r_0, -i\beta, t) - e^{\beta r_0} \chi(r-r_0, -i\beta, t) \right] \\
& + \frac{i}{8r_0} C_2(r_0) \left[1 + \frac{D_1(r)}{i(a+\beta^*)} + \frac{D_2(r)}{i(a^*+\beta^*)} \right] \left[e^{\beta^* r_0} \chi(r+r_0, i\beta^*, t) - e^{-\beta^* r_0} \chi(r-r_0, i\beta^*, t) \right] \\
& - \frac{i}{8r_0} C_2(r_0) \left[1 + \frac{D_1(r)}{i(a-\beta^*)} + \frac{D_2(r)}{i(a^*-\beta^*)} \right] \left[e^{-\beta^* r_0} \chi(r+r_0, -i\beta^*, t) - e^{\beta^* r_0} \chi(r-r_0, -i\beta^*, t) \right] \\
& - \frac{i}{4r_0} \frac{2a(a+a^*)(\beta-a)(\beta^*-a)}{(a^*-a)(\beta+a)(\beta^*+a)} f(ia, r_0) f(ia, r) e^{a(r+r_0)} \chi(r+r_0, -ia, t) \\
& - \frac{i}{4r_0} \frac{2a^*(a^*+a)(\beta-a^*)(\beta^*-a^*)}{(a-a^*)(\beta+a^*)(\beta^*+a^*)} f(ia^*, r_0) f(ia^*, r) e^{a^*(r+r_0)} \chi(r+r_0, -ia^*, t)
\end{aligned} \tag{31}$$

Como se ve de la ecuación (31), no aparece ningún término del tipo $\chi(r-r_0, k, t)$ con $k = -ia, -ia^*$, y los únicos términos asociados con los polos de la función de dispersión son del tipo $\chi(r+r_0, k, t)$ con $k = -ia, -ia^*$, lo cual indica físicamente que sólo la parte del paquete de onda inicial que recorre la distancia de r_0 a cero y de cero a r , manifiesta la interacción a través de los polos de la función de dispersión.

Además, los términos asociados con los polos en $-ia, -ia^*$ son los únicos

que revelan la interacción, ya que todas las otras funciones χ que aparecen en la ecuación (31) no tienen en realidad sentido físico sino más bien geométrico, ya que por una parte, sólo aparecen cuando el paquete inicial está fuera del origen, como se verá después, y por otra parte, aunque separadamente algunas de ellas puedan, por la forma asintótica dada en la ecuación (29), crecer indefinidamente cuando el tiempo tiende a infinito, y por tanto parezcan representar estados no causales, siempre aparecen asociadas de tal modo que su contribución se anula cuando el tiempo tiende a infinito, como puede verse estudiando el término típico

$$I_{\beta} = e^{\beta r_0} \chi(r + r_0, i\beta, t) - e^{-\beta r_0} \chi(r - r_0, i\beta, t) , \quad (32)$$

el cual, por la forma asintótica de las funciones χ , dada en la ecuación (29), se puede poner

$$I_{\beta} \sim \frac{e^{-\beta r}}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{e^{i\left[\frac{(r+r_0)^2}{2t} - i\beta(r+r_0)\right]}}{\frac{r+r_0 - i\beta t}{\sqrt{2t}}} - \frac{e^{i\left[\frac{(r-r_0)^2}{2t} - i\beta(r-r_0)\right]}}{\frac{r-r_0 - i\beta t}{\sqrt{2t}}} \right\} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (33)$$

Para entender mejor el significado puramente geométrico de esos términos, es conveniente ver que si se coloca la fuente en el origen, esto es, si se hace $r_0=0$, esos términos desaparecen. En efecto, de las ecuaciones (3), (23), (24) y (25), se ve que

$$\begin{aligned} \phi(r, 0, t) &= -\frac{i}{2} \left[D_1(r) + D_2(r) + \frac{r}{i} \right] G(r, t) \\ &= \frac{1}{2} \alpha D_1(r) \chi(r, -i\alpha, t) - \frac{1}{2} \alpha^* D_2(r) \chi(r, -i\alpha^*, t) \end{aligned} \quad (34)$$

Por tanto, los polos con significado físico son los que están asociados con los ceros de la función $f(-\kappa)$. Los polos de las funciones $f(\kappa)$ y $f(-\kappa)$ que aparecen en la ecuación (31), tienen un significado exclusivamente geométrico que fue

discutido en detalle en (I).

El autor agradece al Dr. Marcos Moshinsky y al Prof. V. Bargmann por las valiosas discusiones que contribuyeron a la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- 1 J.M. Lozano y M. Moshinsky. *Nuovo Cimento* (por publicarse)
- 2 W. Schützer y J. Tiomno, *Phys.Rev.* **83**, 249 (1951)
M. Moshinsky, *Anais da Academia Brasileira de Ciências* **4**, 343 (1952)
- 3 A. Martin, *Nuovo Cimento* **14**, 403 (1959)
- 4 R. Jost, *Helv.Phys. Acta* **20**, 246,(1947)
- 5 C. Eckart, *Phys.Rev.* **35**, 1303 (1930)
- 6 V. Bargmann, comunicación privada
- 7 V. Bargmann, *Rev.Mod.Phys.* **21**, 488 (1949)
- 8 J.M. Lozano, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de México (1960), apéndice 4
- 9 M. Moshinsky, *Phys.Rev.* **84**, 525 (1951)

Esta página está intencionalmente en blanco