

EFECTO DE UN CENTRO REPULSIVO EN UN MODELO
ESTADISTICO DE NUCLEOS PESADOS¹

Victor Flores Maldonado

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México

(recibido: 14 noviembre 1960)

RESUMEN

In earlier works^{4,5}, the binding energies of heavy nuclei have been computed theoretically by using a statistical model and a Yukawa interaction. The values obtained were very high compared with the experimental values. The present work uses the same model but a repulsive core is added to the Yukawa interaction. It is found that the repulsive core reduces the binding energy to a large extent, greatly improving the values obtained earlier. Nevertheless, the present results are not satisfactory yet. Some ways that would improve these results are indicated here.

INTRODUCCION

Como es bien conocido, no existe un método matemático exacto que pueda describir núcleos de más de dos nucleones. En su defecto se emplean métodos aproximados. Cada uno de estos métodos corresponde a un modelo simplificado del núcleo, el cual representa con cierta aproximación algunas de sus propiedades básicas.

Uno de tales modelos simplificados es el modelo estadístico del núcleo, el cual se considerará en el presente trabajo. Se hace uso de un método semiclásico que reemplaza, por un promedio estadístico, la función de onda dependiente de las coordenadas individuales de los nucleones. Por tanto, el método es similar al sugerido por L.H. Thomas² y E. Fermi³ para el caso de un átomo con muchos electrones.

Como consecuencia de lo que antecede se desprende que este método es aplicable solamente al caso de núcleos pesados.

Las ecuaciones del modelo estadístico correspondientes al caso nuclear han sido desarrolladas por J.A. McLennan Jr⁴, quien demuestra que se puede obtener una ecuación integral de la densidad de nucleones $\rho(\vec{r})$, mediante el uso del principio variacional. La condición es, que la energía total sea mínima con respecto a variaciones de la densidad y sujeta a la condición adicional que el número de nucleones sea constante, es decir,

$$\delta E = \delta (E_p + E_k) = 0 \quad (1)$$

$$\delta N = 0 \quad \text{donde} \quad N = \int \rho(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2)$$

El núcleo se supone esféricamente simétrico y de radio r_0 , es decir

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) \quad (3)$$

y

$$\rho(r) = 0 \quad \text{para} \quad r \geq r_0 \quad (4)$$

En la ecuación integral de la densidad se introduce el potencial de interacción que se desea investigar. En principio esta ecuación se puede resolver para obtener $\rho(r)$. Conociendo la densidad se pueden evaluar algunas propiedades del núcleo como son la energía cinética, la energía potencial y la energía total. Esta última susceptible de compararse con el valor experimental correspondiente.

La solución de la ecuación integral de la densidad es en general difícil. Para facilitar el cálculo se considera un potencial de interacción K , central y de dos cuerpos, es decir,

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = K(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (5)$$

J. A. McLennan obtuvo ⁴ una solución exacta para el caso de una interacción de Yukawa. Es decir si,

$$K(r) = -g^2 \frac{e^{-kr}}{r} \quad (6)$$

donde g es la carga mesónica y $\frac{1}{k}$ el alcance de la fuerza.

Ya que una solución exacta de la ecuación integral es difícil de obtener, se ha ensayado un método aproximado. Se supone una cierta densidad de neutrones, que se llamará función de prueba, la cual se hace depender de ciertos parámetros. Esta función se sustituye en la ecuación de la energía y los parámetros se ajustan hasta que la energía sea mínima. Siguiendo este procedimiento G.P. DeVault ⁵ obtuvo una solución aproximada, usando el potencial de la ecuación (6). Como existe la solución exacta, se puede comparar la aproximada con la exacta y ver la validez del método aproximado. La función de prueba que se usó es la siguiente,

$$\phi(x) = b \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^3 \quad (7)$$

donde b es una constante que se determina de acuerdo con el número total de partículas y x_0 es el parámetro variacional.

Los resultados obtenidos con este método aproximado son semejantes a los resultados del método exacto. Las energías de amarre calculadas son, sin embargo,

muy grandes en ambos casos. Con el objeto de investigar el efecto producido por la adición de un centro repulsivo al potencial de interacción, el autor del presente trabajo calculó⁶ la contribución debida al centro repulsivo siguiente.

$$\frac{g^A}{m' c^2} \frac{e^{-2kr}}{r^2} \quad (8)$$

Esta expresión para el centro repulsivo fue obtenida por J. Werle⁷ de la teoría mesónica clásica. Se usó en el cálculo la función de prueba (7). Sin embargo esta función de prueba tiene el inconveniente de ser un polinomio con derivada distinta de cero en el origen. La solución exacta no debe tener este defecto. El presente trabajo tiene como objeto informar sobre los resultados obtenidos cuando se usa un potencial de interacción con centro repulsivo y una función de prueba en la que se ha eliminado el inconveniente mencionado, es decir, la función de prueba tendrá derivada cero en el origen.

II ECUACIONES DE LA ENERGIA

Las expresiones que se usan aquí para calcular las energías cinéticas, potencial y total fueron obtenidas por J. A. McLennan Jr.⁴.

La energía cinética total del núcleo está dada en el modelo de gas de Fermi por^{2,3}

$$E_k = \xi \int \rho(r)^{3/2} d\vec{r} \quad (9)$$

La energía potencial puede calcularse con la expresión siguiente,

$$E_p = \frac{1}{2} \iint \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') K(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \quad (10)$$

donde $\xi = \frac{3h^2}{40m} \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2}$ La masa m de los nucleones se han tomado igual para el protón y el neutrón.

De acuerdo con la referencia (4), las ecuaciones (9) y (10) se pueden expresar en función de variables sin dimensiones. Las expresiones finales y definiciones se anotan a continuación:

$$E_k = \frac{3}{5} \frac{(4\pi g\gamma)^2}{k^5} \int_0^{x_0} \phi(x)^{5/3} x^2 dx \quad (11)$$

$$E_p = -\frac{1}{2} \frac{(4\pi g\gamma)^2}{k^5} \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} g(x, x') \phi(x) \phi(x') x^2 dx dx' \quad (12)$$

donde,

$$x = kr$$

$$\alpha = \frac{g^2 k}{m' c^2}$$

$$\rho(r) = \gamma \phi(x) \quad (13)$$

$$\gamma = \left(\frac{5\xi k^3}{12\pi g^2} \right)^3$$

$$g(x, x') = \frac{x'}{2x} \left[e^{-|x-x'|} - e^{-(x+x')} \right] - \frac{\alpha x'}{2x} \left[E_i\{2|x-x'|\} - E_i\{2(x+x')\} \right]$$

$$E_i\{\omega\} = \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

La interacción se ha supuesto de la forma

$$K(r) = -g^2 \frac{e^{-kr}}{r} + \frac{g^4}{m' c^2} \frac{e^{-2kr}}{r^2} \quad (14)$$

donde la energía electrostática de repulsión de los protones ha sido despreciada.

III SOLUCION APROXIMADA DE LA ECUACION INTEGRAL

La función de prueba usada es la siguiente

$$\phi(x) = b \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right]^3 \quad (15)$$

Se notará que hay discrepancia entre esta función de prueba y los resultados experimentales que dan la densidad de carga en núcleos pesados⁸, los cuales fueron obtenidos con posterioridad a la fecha en que se hizo el presente trabajo¹.

En la figura No. 1 se compara la función de prueba (15) con densidades de carga que están de acuerdo con los resultados experimentales de dispersión de electrones por núcleos pesados. Estas densidades de carga experimentales pueden servir de guía en la elección de una mejor función de prueba.

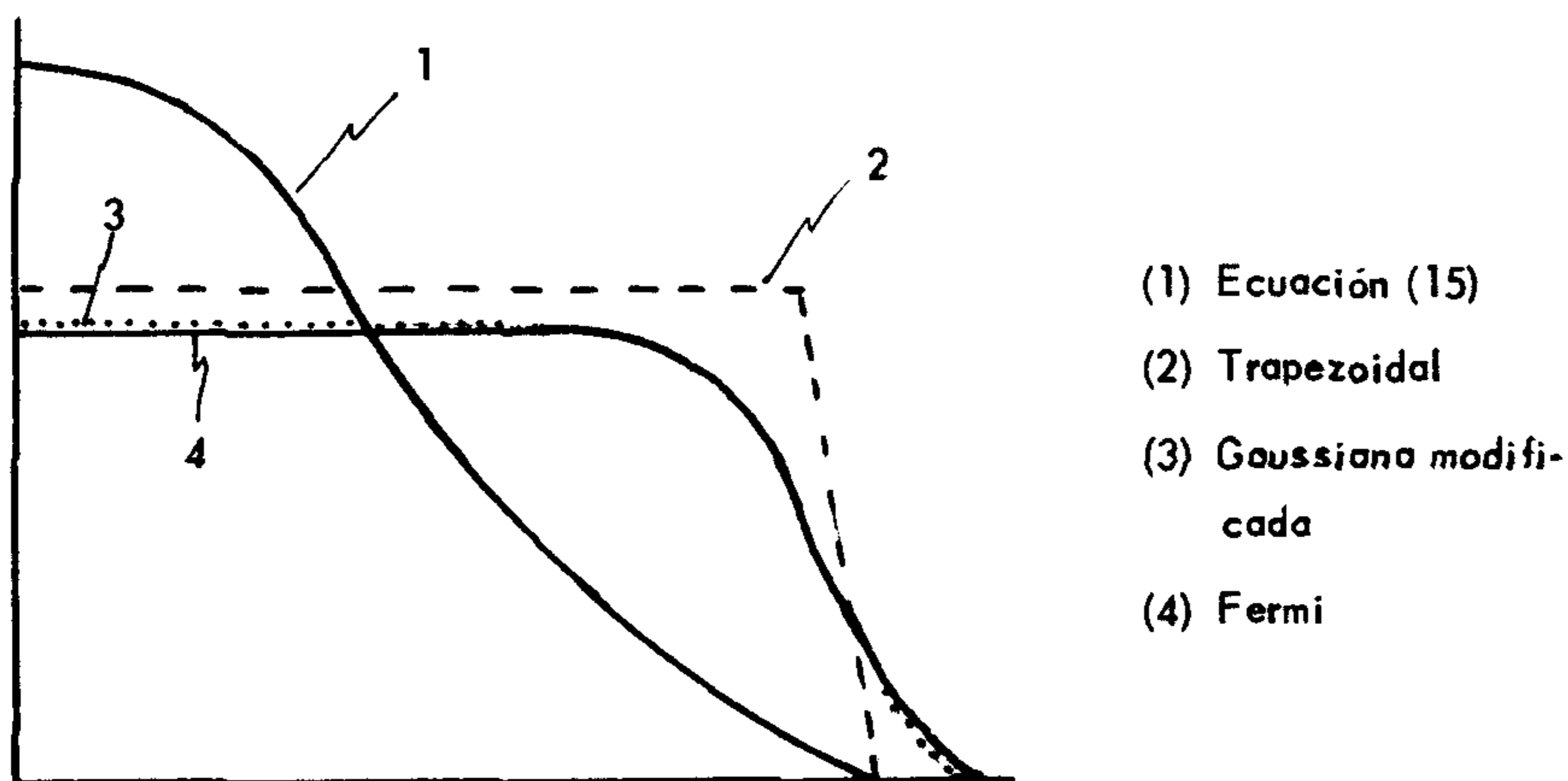


Figura No. 1. Diagrama comparativo de la función de prueba (curva 1), con distribuciones de carga derivadas de los datos experimentales (curva 2, 3, 4).

De la observación de la figura se desprende que la distribución (15) corresponde a un núcleo más concentrado, es decir, con mayor energía de amarre que un núcleo real.

La ecuación de normalización, sin dimensiones, correspondiente a la función de prueba es,

$$n = \int_0^{x_0} \phi(x) x^2 dx = b \int_0^{x_0} \left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]^3 x^2 dx \quad (16)$$

Integrando y despejando se obtiene la constante b ,

$$b = \frac{315}{16} \frac{n}{x_0^3} \quad (17)$$

El número total de nucleones N está dado por

$$N = \frac{4\pi\gamma}{k^3} n \quad (18)$$

La energía total del núcleo, E , es de acuerdo con la ecuaciones (11) y (12),

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ &= \frac{(4\pi g\gamma)^2}{k^5} \left[\frac{3}{5} \int_0^{x_0} \phi(x)^{5/3} x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} g(x, x') \phi(x) \phi(x') x^2 dx dx' \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Denotando por e_t el paréntesis rectangular de esta ecuación, se tiene

$$E = \frac{(4\pi g\gamma)^2}{k^5} e_t \quad (20)$$

Si se introduce la notación,

$$e_k = \int_0^{x_0} \phi(x)^{5/3} x^2 dx \quad (21)$$

y

$$e_p = \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} g(x, x') \phi(x) \phi(x') x^2 dx dx' \quad (22)$$

se obtiene la ecuación,

$$e_t = \frac{3}{5} e_k - \frac{1}{2} e_p \quad (23)$$

Esta es una ecuación sin dimensiones que incluye explícitamente los términos correspondientes a las energías cinética y potencial.

La expresión (21) da el término e_k correspondiente a la energía cinética,

$$e_k = \int_0^{\infty} \phi(x)^{5/2} x^2 dx = b^{5/2} \int_0^{x_0} \left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]^5 x^2 dx$$

Integrando se obtiene

$$e_k = \frac{256}{9009} b^{5/2} x_0^3 \quad (24)$$

y haciendo uso de la ecuación (17) se tiene

$$e_k = 4.078440 \frac{n^{5/2}}{x_0^2} \quad (25)$$

Si en la expresión de e_p se reemplaza $g(x, x')$ por su valor, ecuación (13), la energía potencial toma la forma

$$e_p = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} (e^{-|x-x'|} - e^{-(x+x')}) \phi(x) \phi(x') x x' dx dx' \\ - \frac{\alpha}{2} \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} [E_i\{2|x-x'|\} - E_i\{2(x+x')\}] \phi(x) \phi(x') x x' dx dx' \quad (26)$$

donde el primer término corresponde a la interacción de Yukawa y el segundo al centro repulsivo.

Usando (15) en la ecuación (26) se tiene

$$e_p = \frac{b^2}{2} \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} (e^{-|x-t|} - e^{-(x+t)}) \left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]^3 x dx \left[1 - \left(\frac{t}{x_0}\right)^2\right]^3 t dt \\ - \frac{\alpha b^2}{2} \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} [E_i\{2|x-t|\} - E_i\{2(x+t)\}] \left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]^3 x dx \left[1 - \left(\frac{t}{x_0}\right)^2\right]^3 t dt \quad (27)$$

donde se ha puesto t en lugar de x' .

Con las substituciones $u = \frac{x}{x_0}$ y $v = \frac{t}{x_0}$, la ecuación (27) toma la forma

$$e_p = \frac{b^2 x_0^4}{2} \int_0^1 \int_0^1 (e^{-x_0|u-v|} - e^{-x_0(u+v)}) (1-u^2)^3 u du (1-v^2)^3 v dv$$

$$- \frac{b^2 x_0^4}{2} \int_0^1 \int_0^1 E_i\{2x_0|u-v|\} - E_i\{2x_0(u+v)\} (1-u^2)^3 u du (1-v^2)^3 v dv$$

(28)

Las integrales de la ecuación anterior son difíciles de evaluar en forma cerrada así que para facilitar la evaluación numérica se substituirán las exponenciales y las funciones $E_i\{\omega\}$ por sus correspondientes desarrollos en series.

Por simplicidad en la escritura, la primera integral de la ecuación (28) que corresponde a la interacción de Yukawa, se designará por e_p' y la segunda que corresponde al centro repulsivo por e_p'' .

Entonces, un desarrollo en las exponenciales de e_p' hasta el quinto término dá como resultado

$$e_p' = \frac{b^2 x_0^4}{2} \left[\int_0^1 \int_0^1 \left\{ 1 - x_0|u-v| + \frac{x_0^2(u-v)^2}{2!} - \frac{x_0^3|u-v|^3}{3!} + \frac{x_0^4(u-v)^4}{4!} + \dots \right\} \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \int_0^1 \left\{ 1 - x_0(u+v) + \frac{x_0^2(u+v)^2}{2!} - \frac{x_0^3(u+v)^3}{3!} + \frac{x_0^4(u+v)^4}{4!} + \dots \right\} (1-u^2)^3 u du (1-v^2)^3 v dv \right]$$

$$= \frac{b^2 x_0^4}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ x_0[-|u-v| + (u+v)] + \frac{x_0^2}{2!} [(u-v)^2 - (u+v)^2] \right.$$

$$\left. + \frac{x_0^3}{3!} [-|u-v|^3 + (u+v)^3] + \frac{x_0^4}{4!} [(u-v)^4 - (u+v)^4] + \dots \right\} (1-u^2)^3 u du (1-v^2)^3 v dv$$

(29)

Efectuando los desarrollos correspondientes e integrando se obtiene,

$$e_p' = 10^{-3} b^2 (4.684 x_0^5 - 2.580 x_0^6 + 0.886 x_0^7 - 0.234 x_0^8 + \dots) \quad (30)$$

La integral exponencial $E_i\{\omega\}$ se define por la expresión dada en la ecuación (13) o bien por el siguiente desarrollo en serie⁹

$$E_i\{\omega\} = -\gamma' - \ln \omega + T_1(\omega) - T_2(\omega) + T_3(\omega) - \dots \quad (31)$$

donde $T_n = \frac{\omega^n}{n \cdot n!}$ y γ' es la constante de Euler.

Usando seis términos del desarrollo en serie de las funciones $E_i\{\omega\}$ se obtiene, para e_p'' la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} e_p'' = & -\frac{ab^2}{2} x_0^4 \int_0^1 \int_0^1 \{ -\ln|u-v| + \ln(u+v) + 2x_0[|u-v| - (u+v)] \\ & + x_0^2[-(u-v)^2 + (u+v)^2] + \frac{4}{9} x_0^3 [|u-v|^3 - (u+v)^3] \\ & + \frac{x_0^4}{3!} [-(u-v)^4 + (u+v)^4] + \dots \} (1-u^2)^3 u du (1-v^2)^3 v dv \end{aligned} \quad (32)$$

Efectuando las operaciones correspondientes e integrando se obtiene.

$$\begin{aligned} e_p'' = & 10^{-3} b^2 [-28.855 \alpha x_0^4 + 4.684 (2\alpha) x_0^5 - 2.580 (2\alpha) x_0^6 \\ & + 0.886 (\frac{8}{3} \alpha) x_0^7 - 0.234 (4\alpha) x_0^8 + \dots] \end{aligned} \quad (33)$$

Substituyendo los resultados obtenidos en la ecuación de la energía (23) y reemplazando la constante b por su valor, dado por la ecuación (17), se obtiene,

$$\begin{aligned} e_i = & 2.447 \frac{n^{\frac{4}{3}}}{x_0^2} - n^2 \left[-\frac{5.592}{x_0^2} \alpha + \frac{0.908}{x_0^2} (1+2\alpha) - 0.500 (1+2\alpha) \right. \\ & \left. + 0.172 (1 + \frac{8}{3} \alpha) x_0 - 0.045 (1+4\alpha) x_0^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Calculando α de la ecuación que la define (13), se obtiene un valor igual a 0.04959. Se ha tomado la masa nucleónica igual a 1836 electrones masa y se ha usado para el alcance, k , y la constante de acoplamiento de la interacción, g ,

los valores obtenidos por J.D. Jackson y J.M. Blatt¹⁰ de la dispersión protón-protón a bajas energías. Estos valores son

$$\begin{aligned} k &= (0.850 \pm 0.020) \times 10^{13} \text{ cm}^{-1} \\ g &= (29.62 \pm 0.44) \times 10^{10} \text{ u.e.} \end{aligned} \quad (35)$$

Usando el valor de α mencionado, la ecuación de la energía se reduce a,

$$e_t = n^2 \left(\frac{2.4471}{x_0^2 \sqrt[3]{n}} + \frac{0.2773}{x_0^2} - \frac{0.9978}{x_0} + 0.5496 - 0.1944 x_0 + 0.0543 x_0^2 + \dots \right) \quad (36)$$

El radio del núcleo debe ser tal que haga la energía un mínimo. Por tanto se toma la derivada de la ecuación anterior con respecto a x_0 a fin de determinar este valor.

Despreciando los términos de la serie que no aparecen en la ecuación (36) se obtiene

$$1086 x_0^4 - 1944 x_0^3 + 9978 x_0 - \left(5546 + \frac{48942}{\sqrt[3]{n}} \right) = 0 \quad (37)$$

La solución real y positiva de esta ecuación determina x_0 en función de n . Substituyendo esta función en la ecuación de la energía se obtiene una relación entre e_t y n , que puede convertirse a E (Mev) y N (numero de nucleones) por medio de las relaciones

$$\begin{aligned} N &= 0.046 \ 196 \ n \\ E &= 0.099 \ 34 \ e_t \end{aligned} \quad (38)$$

Estas expresiones fueron obtenidas de las ecuaciones (13) y (19) usando los valores de k y g dados por las ecuaciones (35).

La tabla siguiente muestra algunos de los valores calculados. Estos representan definitivamente una mejoría sobre los valores obtenidos anteriormente^{4,5} y en los cuales no se incluyó el centro repulsivo. A la fecha se conoce mejor el potencial de interacción, y sin duda, un potencial más adecuado mejoraría los resultados.

La figura No. 2 representa la gráfica de E , E_k y E_p en función de N . Como comparación se anota la gráfica de E en el caso en que no se incluye el centro repulsivo (es decir el caso $\alpha = 0$).

TABLA I

N	x_0	E (Mev)	E_p (Mev)	E (Mev)
62.2	1.1	33011	- 49827	- 16816
118.6	1	117178	- 203930	- 86752
267	0.9	559989	- 1157094	- 597105

Como se habrá notado, los valores calculados para la energía de amarre E son muy altos. Sin embargo, E es muy sensible con respecto a variaciones de los valores k y g . Con objeto de mostrar ésto la energía será ajustada en un punto cambiando k y g , pero manteniendo α constante.

Si en la ecuación (20), γ se substituye por la ecuación que la define (13), se obtiene:

$$E = \frac{(4\pi g \gamma)^2}{k^5} e_t = \frac{(4\pi)^2 (5\xi)^6}{(12\pi)^6} \frac{k^{13}}{g^{10}} e_t = A \frac{k^{13}}{g^{10}} e_t \quad (39)$$

donde $A = \frac{(4\pi)^2 (5\xi)^6}{(12\pi)^6}$ es una constante.

Si α permanece constante al variar k y g , el producto $g^2 k$ será constante, es decir

$$g^2 k = g_1^2 k_1 \quad (40)$$

donde g_1 y k_1 son los nuevos valores que g y k toman.

Con los valores g_1 y k_1 la nueva energía es

$$E_1 = A \frac{k_1^{13}}{g_1^{10}} e_t \quad (41)$$

ya que e_t no depende ni de k ni de g .

La relación de energías es

$$\frac{E}{E_1} = \frac{g_1^{10} k^{13}}{g^{10} k_1^{13}} \quad (42)$$

La ecuación (40) se usa primero para eliminar g_1 y g , y después para eliminar k_1 y k , y así obtener las relaciones,

$$\frac{E}{E_1} = \left(\frac{k}{k_1}\right)^{18} \quad (43)$$

y

$$\frac{E}{E_1} = \left(\frac{g_1}{g}\right)^{36} \quad (44)$$

Estas ecuaciones claramente muestran que pequeños cambios en k y g producen grandes cambios en la energía.

La energía total dada en la tabla No. I para N igual a 267 se baja a su valor experimental de aproximadamente - 2136 Mev, con cambios en k y g dados por las relaciones

$$\frac{k}{k_1} = 1.203, \quad \text{ó} \quad k_1 = 0.707 \times 10^{13} \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{g_1}{g} = 1.097 \quad \text{ó} \quad g_1 = .32.49 \times 10^{-10} \text{ u. e.}$$

Los cambios de k y g para reducir la energía son pequeños pero no alteran la curvatura de la gráfica de E en función de N . Se desearía que la relación entre E y N fuese lineal. La curvatura depende de e_1 y por tanto, del tipo de funciones que se escogieron para la interacción y para la función de prueba, así como del valor de a . La adición de la interacción electrostática en el potencial mejora la relación $\frac{E}{N}$ pero tan solo en una cantidad insignificante. Observando la figura No. 2 se notará que el centro repulsivo mejoró considerablemente los valores de la energía y la curvatura de la gráfica.

La tabla No. I muestra que x_0 en lugar de aumentar (siguiendo la regla $N^{3/4}$) decrece conforme N aumenta, sin embargo, los resultados obtenidos para la variación de x_0 en función de N son mejores que los resultados previos^{4,5} en los que

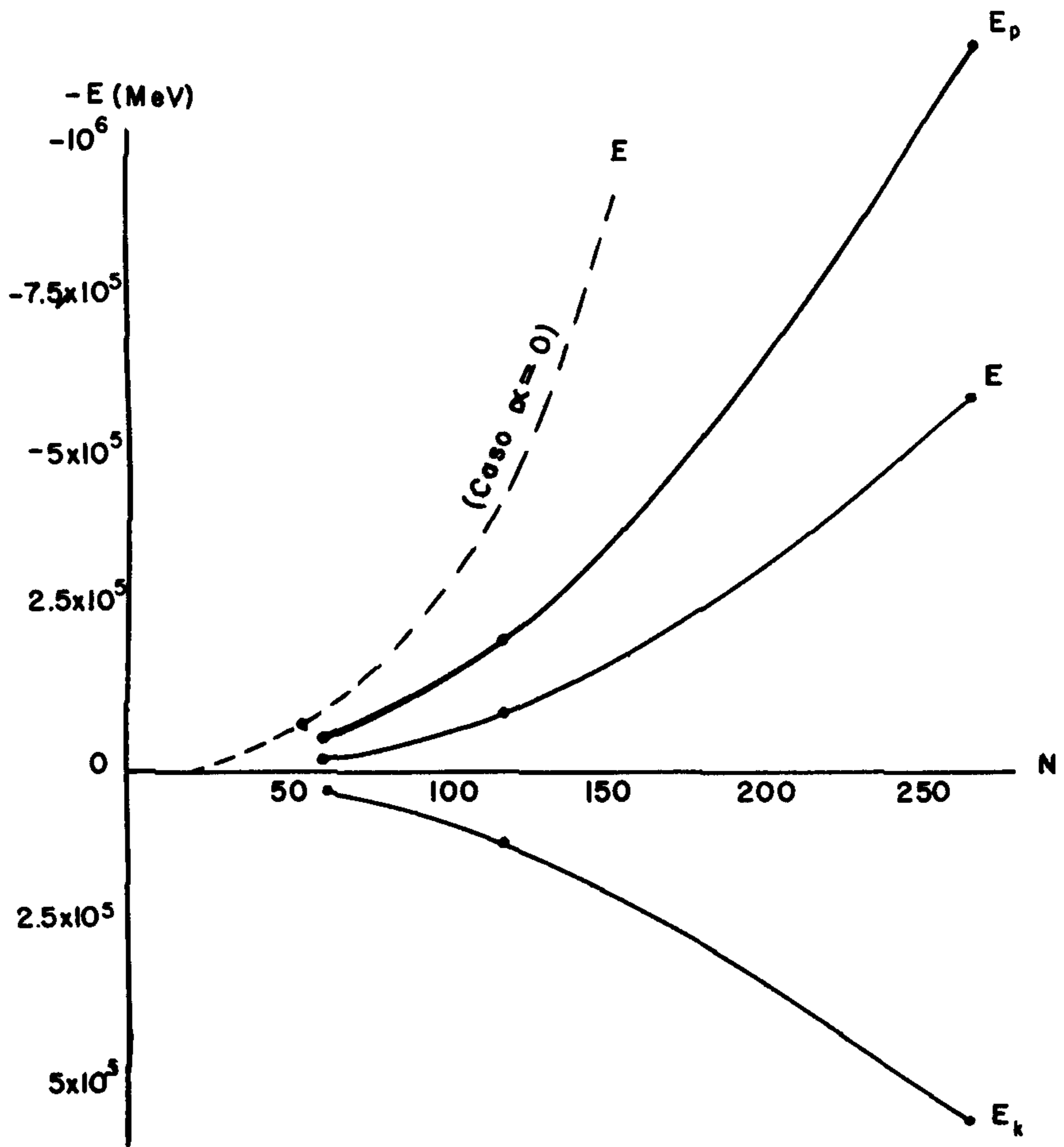


Figura 2

Energía cinética, potencial y total en función del número de nucleones. La línea punteada corresponde al caso en que el potencial no incluye un centro repulsivo.

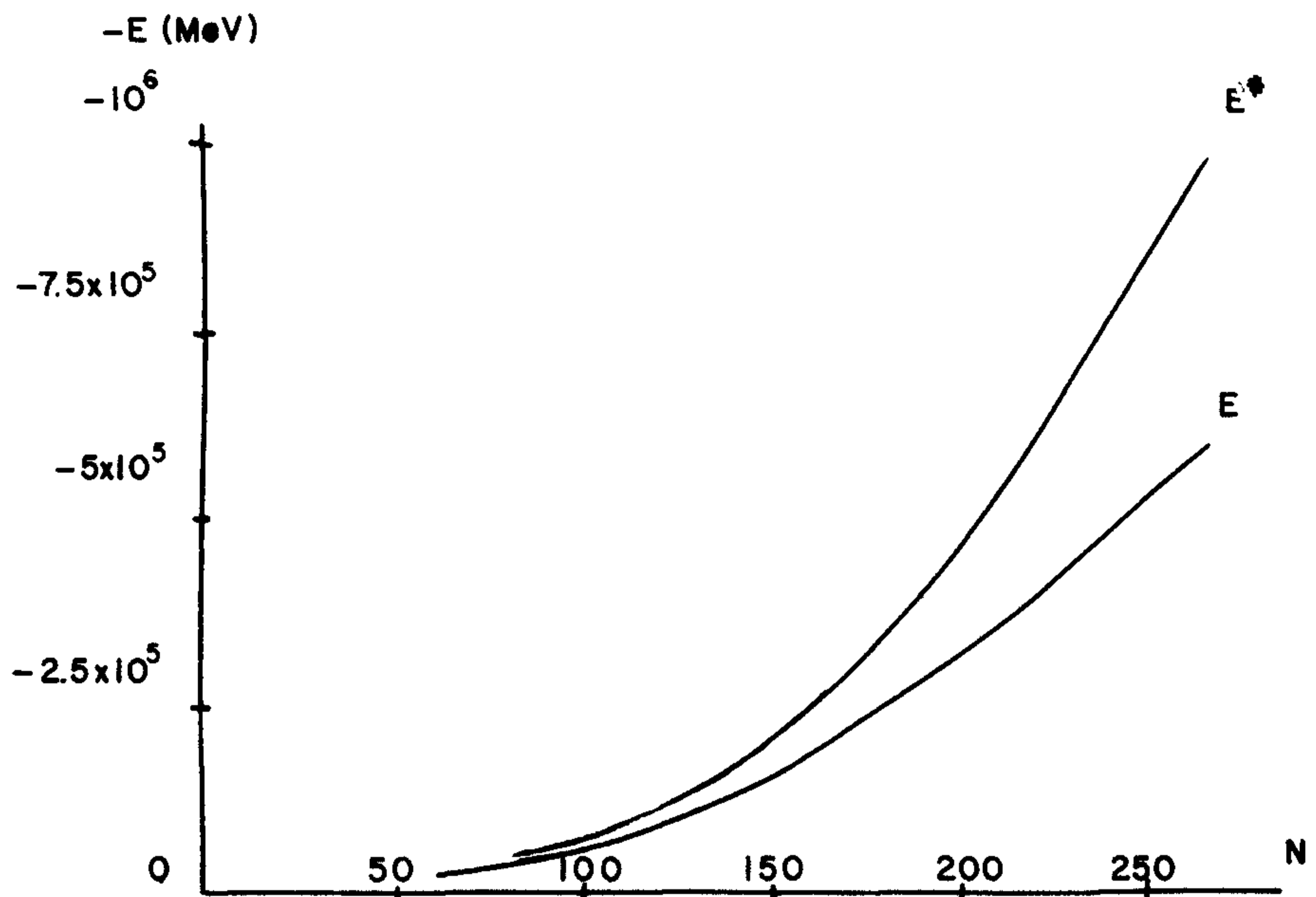


Figura 3

Comparación de los resultados de la sección anterior (E) con los resultados de esta sección (E*).

no se consideró un centro repulsivo. Es de esperarse que un centro repulsivo más fuerte mejoraría los resultados obtenidos.

IV ESTIMACION DE LA VALIDEZ DE LA SOLUCION APROXIMADA

J.A. McLennan Jr. obtuvo la siguiente ecuación de la energía

$$E = \frac{3}{5} \frac{(4\pi g \gamma)^2}{k^5} \left[\frac{5}{6} v_0 n + \frac{1}{6} e_k \right] \quad (45)$$

donde

$$v_0 = - \frac{e^{-x_0}}{x_0} \int_0^{x_0} x' \phi(x') \operatorname{sen} b x' dx' + \frac{\alpha}{2x_0} \int_0^{x_0} x' \phi(x') [E_i\{2(x_0 - x')\} - E_i\{2(x_0 + x')\}] dx' \quad (46)$$

Si la función de prueba fuese la función de densidad exacta, la substitución de la función de prueba (15) en la ecuación (45) reproduciría los resultados obtenidos en la sección anterior. Por tanto una estimación de la validez de la solución aproximada puede obtenerse comparando los resultados previos con los que se obtengan al introducir la función (15) en la ecuación (45).

Siguiendo este procedimiento se substituye la función de prueba en la ecuación (46) para obtener,

$$v_0 = - \frac{e^{-x_0}}{x_0} \int_0^{x_0} x b \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right]^3 \operatorname{sen} b x dx + \frac{\alpha}{2x_0} \int_0^{x_0} b \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right]^3 \left(\int_{2(x_0 - x)}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{2(x_0 + x)}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx \quad (47)$$

donde se ha usado la definición alternativa de las funciones $E_i\{\omega\}$.

La primera integral de la ecuación (47), sin su coeficiente se designará por I_1 . Al evaluar esta integral se obtiene

$$I_1 = b \left[\left(\frac{48}{x_0^2} + \frac{2160}{x_0^4} + \frac{7!}{x_0^6} \right) \operatorname{sen} b x_0 - \left(\frac{480}{x_0^3} + \frac{7!}{x_0^5} \right) \cos b x_0 \right] \quad (48)$$

La segunda integral de la ecuación (47) se designará por I_2 . Efectuando las sustituciones $t = 2(x_0 - x)$ y $t = 2(x_0 + x)$ respectivamente e integrando se obtiene

$$I_2 = b \left[\frac{3}{4x_0^2} - \frac{3}{x_0^3} + \frac{45}{8x_0^4} - \frac{45}{8x_0^5} + \frac{315}{128x_0^6} + \frac{x_0}{16e^{2x_0}} \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{4x_0^3} + \frac{47}{8x_0^4} + \frac{135}{32x_0^5} + \frac{315}{128x_0^6} \right) e^{-2x_0} \right] \quad (49)$$

Usando los resultados dados por las ecuaciones (17), (25), (48) y (49), la ecuación de la energía (45) queda igual a

$$E = 0.009934 n^2 \left\{ - \frac{98.4375}{x_0^4 e^{x_0}} \left[\left(\frac{48}{x_0^2} + \frac{2160}{x_0^4} + \frac{5040}{x_0^6} \right) \operatorname{sen} b x_0 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{480}{x_0^3} + \frac{5040}{x_0^5} \right) \cos b x_0 \right] + 4.881516 \left[\frac{3}{8x_0^6} - \frac{3}{2x_0^7} + \frac{45}{16x_0^8} - \frac{45}{16x_0^9} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{315}{256x_0^{10}} + \frac{e^{-2x_0}}{32x_0^3} - \left(\frac{3}{8x_0^7} + \frac{47}{16x_0^8} + \frac{135}{64x_0^9} + \frac{315}{256x_0^{10}} \right) e^{-4x_0} \right] \right. \\ \left. + \frac{4.078440}{x_0^2 \sqrt[3]{n}} \right\} \text{ Mev} \quad (50)$$

Los resultados de esta sección y de la precedente se comparan en la tabla No. 2 y en la figura No. 3. La E^* (con asterisco) dá los resultados de esta sección y la E sin asterisco los de la sección anterior

TABLA II

N	x_0	E (Mev)	E^* (Mev)
62.2	1.1	- 16816	- 24448
118.6	1.0	- 86752	- 98240
267	0.9	- 597105	- 979575

Se notará que los resultados son del mismo orden de magnitud. Sin embargo, la función de prueba usada no parece ser adecuada en el caso en que el potencial de interacción lleva un centro repulsivo. Es de esperarse que una función de prueba que diese una densidad de nucleones menos concentrada daría resultados mejores. Véase figura No. 1.

RECONOCIMIENTO

El autor hace patente su agradecimiento al Dr. J.A. McLennan Jr. por sugerir el tema del presenta trabajo y por su constante interés y asesoramiento en desarrollo del mismo.

REFERENCIAS

- 1 Victor Flores Maldonado, On a statistical Model for Heavy Nuclei, Tesis, requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias, Lehigh University, 1956.
- 2 L.H. Thomas, Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 542 (1927).
- 3 Enrico Fermi, Zeits. f. Physik 48, 73 (1928); 49, 550 (1928).
- 4 James A. McLennan Jr, investigación no publicada realizada en Lehigh University (1950).
- 5 Guillaume P. De Vault, investigación no publicada realizada en Lehigh University (1956).
- 6 Victor Flores Maldonado, investigación no publicada realizada en Lehigh University (1956).

- 7 J. Werle, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. 3, 1*, 281-5 (1953).
- 8 R.G. Ravenhall *Rev. Mod. Phys.* 30, 430 (1958).
- 9 National Bureau of Standards, *Tables of Sine, Cosine and Exponential Integrals. Vol. II*, (1940).
- 10 J. David Jackson and John M. Blatt, *Rev. Mod. Phys.* 22, 77 (1950).