SIMETRIAS Y REGLAS DE SUMA DE LOS PARENTESIS DE TRANSFORMACION

M. Moshinsky[*†] y T.A. Brody[†]
Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México
(Recibido: 28 de Diciembre 1960)

RESUMEN

In this paper we obtain the symmetry relations for the transformation brackets for harmonic oscillator funtions defined in previous publications.[1,2,3] *These symmetry relations were obtained from the interpretation of the transformation brackets as matrices of a representation of the unitary unimodular group in two dimensions* (SU_2)*. The dimension of these representations is obtained.*

We discuss also certain simple spin-orbit coupling and tensor potentials and obtain sum rules for the coefficients appearing in calculations with these types of forces.

Finally, we derive certain recursion formulas and sum rules for the coefficients $B(nl,n'l',p)$ *defined previously.*[2,3]

A table of sum rules for the transformation brackets for all types of forces will be available upon request.

---

[*] Miembro del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

[†] Asesores de la Comisión Nacional de Energía Nuclear

I INTRODUCCION

En una serie de trabajos anteriores[1,2,3] los autores han definido y tabulado los paréntesis de transformación para funciones de oscilador armónico, y han indicado cómo estos paréntesis, combinados con ciertos coeficientes auxiliares, son útiles en la evaluación de los elementos de matriz del modelo de capas del núcleo.

En el presente trabajo se derivarán ciertas reglas de simetría de los paréntesis de transformación utilizando el hecho de que los paréntesis están asociados a representaciones del grupo unimodular de dos dimensiones (SU_2). Se obtendrá también la dimensionalidad de la representación justificando así la fórmula[3] que nos indica el número de paréntesis de transformación asociados con una energía y momento angular totales del sistema de dos partículas.

Posteriormente se derivarán ciertas reglas de suma para los paréntesis de transformación que son útiles para comprobar los cálculos de elementos de matriz de fuerzas de acoplamiento spin-orbita y tensoriales.

Finalmente se derivarán ciertas reglas de recurrencia de los coeficientes auxiliares[2,3] $B(nl, n'l', p)$ que son útiles para extender la región de valores de los índices $nl, n'l'$, para los cuales podemos obtener los valores de B.

En todo el análisis utilizaremos sistemáticamente la representación de las funciones de onda de oscilador armónico en términos de operadores de creación, tal como fue propuesto por Bargmann y Moshinsky[4]. En el siguiente capítulo utilizaremos esta representación para rederivar la fórmula de los paréntesis de transformación y establecer la relación entre los paréntesis y las representaciones del grupo SU_2.

II LOS PARENTESIS DE TRANSFORMACION

En el trabajo de Bargmann y Moshinsky[4] se introdujeron los operadores de creación $\underline{\eta}$ y aniquilación $\underline{\xi}$ por la definición

$$\underline{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r} - i\mathbf{p}) \quad , \quad \underline{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r} + i\mathbf{p}) \quad , \tag{2.1}$$

donde r y p son respectivamente los vectores de posición y cantidad de movimiento de la partícula. Si el estado base de un oscilador armónico tridimensional se designa por $|0>$, donde*

$$|0> = \pi^{-3/4} \exp\left(-\frac{1}{2} r^2\right), \tag{2.2}$$

entonces un estado de energía $2n + l$, momento angular l y proyección del momento angular m, está dado por

$$|nlm> = A_{nl}\, \eta^{2n}\, \mathcal{Y}_{lm}(\underline{\eta})\, |0> \tag{2.3}$$

En (2.3) $\mathcal{Y}_{lm}(\underline{\eta})$ es el armónico esférico sólido; por ejemplo, el armónico esférico sólido del vector de posición r es

$$\mathcal{Y}_{lm}(r) = r^l\, Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad . \tag{2.4}$$

Por η^2 se entiende $\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$, y el coeficiente de normalización A_{nl} está dado por

$$A_{nl} = (-1)^n \left[\frac{4\pi}{(2n + 2l + 1)!!\,(2n)!!}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

Si ahora, de una función de onda de una sola partícula en el oscilador armónico, pasamos a una función de onda de dos partículas con momento angular total λ y proyección μ de ese momento angular, claramente tenemos que

$$\begin{aligned} |n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda\mu> &\equiv P^{\lambda\mu}_{n_1 l_1, n_2 l_2}(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2)\, |0> \\ &= \sum_{m_1, m_2} <l_1 l_2 m_1 m_2 | \lambda\mu>\, A_{n_1 l_1}\, \eta_1^{2n_1}\, \mathcal{Y}_{l_1 m_1}(\underline{\eta}_1)\, A_{n_2 l_2}\, \eta_2^{2n_2}\, \mathcal{Y}_{l_2 m_2}(\underline{\eta}_2)\, |0> , \end{aligned} \tag{2.6}$$

*En el presente trabajo utilizaremos sistemáticamente unidades en que $\hbar = m = \omega = 1$, donde m es la masa de la partícula y ω la frecuencia del oscilador armónico.

donde $|0\rangle$ representa el estado base de dos partículas y $\langle l_1 l_2 m_1 m_2 | \lambda\mu\rangle$ es un coeficiente de Clebsch-Gordan.

Si pasamos ahora de las coordenadas de las dos partículas r_1, r_2 a las coordenadas relativas y de centro de masa definidos como

$$r_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_2) \;,\; r_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_2), \tag{2.7}$$

las correspondientes relaciones entre los operadores de creación pueden escribirse como

$$\underline{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\eta}_1' + \underline{\eta}_2'), \quad \underline{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\eta}_2' - \underline{\eta}_1') . \tag{2.8}$$

Si reemplazamos $\underline{\eta}_1$, $\underline{\eta}_2$ de (2.6) por sus correspondientes valores (2.8) y reagrupamos términos, podríamos describir $|n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda\mu\rangle$ en términos de kets $|n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda\mu)$ asociados con los nuevos operadores de creación $\underline{\eta}_1'$, $\underline{\eta}_2'$ y en esta forma derivar los paréntesis de transformación. Como ejemplo consideremos el caso en que $n_1 = n_2 = 0$. Por la regla de translación de multipolos derivada en la referencia 1, se tiene que si

$$\underline{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\eta}' \pm \underline{\eta}'') . \tag{2.9}$$

entonces

$$\mathcal{Y}_{lm}(\underline{\eta}) = 2^{-\frac{l}{2}} \sum_{l', l'' = 0}^{l} \{[(\mp)^{l''} \delta_{l'+l'', l}\, G(l'l''l)$$

$$[\sum_{m'm''} \langle l'l''m'm''|lm\rangle\, \mathcal{Y}_{l'm'}(\underline{\eta}')\, \mathcal{Y}_{l''m''}(\underline{\eta}'')]\} \tag{2.10}$$

donde

$$G(l'l''l) = (-1)^{l''} [\, 4\pi\, (2l+1)!]^{\frac{1}{2}} [(2l'+1)!(2l''+1)!]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

Utilizando la relación (2.8) y sustituyendo expresiones del tipo (2.10) en (2.6), obtenemos directamente que

$$|0l_1, 0l_2, \lambda\mu> = \sum_{n_1' l_1' n_2' l_2'} |n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda\mu)(n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda| n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda>, \quad (2.12)$$

donde designamos por $|>$ los kets asociados con el sistema original de coordenadas r_1, r_2 y por $|)$ los kets asociados con el sistema primo de coordenadas r_1', r_2'. Utilizando la relación[5] entre sumas de productos de coeficientes de Clebsch-Gordan y coeficientes $9j$, vemos que el paréntesis de transformación está dado por

$$(n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda| 0l_1, 0l_2, \lambda>$$

$$= \sum_{l' L' l'' L''} (-1)^{l'} \delta_{L'+l', l_1} \delta_{L''+l'', l_2} \delta_{l'+l'', 2n_1'+l_1'} \delta_{L'+L'', 2n_2'+l_2'} \frac{A_{n_1 l_1} A_{n_2 l_2}}{A_{n_1' l_1'} A_{n_2' l_2'}}$$

$$G(L'l'l_1)\, G(L''l''l_2)\, H(l'l''l_1')\, H(L'L''l_2') [(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_1'+1)(2l_2'+1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} l' & l'' & l_1' \\ L' & L'' & l_2' \\ l_1 & l_2 & \lambda \end{Bmatrix}$$

(2.13)

donde G está definido por (2.11) y H está dado por

$$H(l'l''l) = [(2l'+1)(2l''+1)/4\pi(2l+1)]^{\frac{1}{2}} < l'l''00|l0> . \quad (2.14)$$

Si reemplazamos en (2.13) los coeficientes de normalización A_{nl} por sus valores (2.5), vemos que el paréntesis de transformación se vuelve idéntico con el obtenido en la fórmula (60) de la referencia 1, si es que escribimos

$$n_1' = n,\ l_1' = l_1,\ n_2' = N,\ l_2' = L,\ (|> = <|> \quad (2.15)$$

El objeto de denotar por $(\,|\,\rangle$ el paréntesis de transformación es que así podemos distinguir claramente entre cambiar los números contenidos en los bras y kets o intercambiar los bras y kets entre sí. Este último intercambio no altera el paréntesis ya que éste es real, en cambio, el primer intercambio sí lo altera según reglas que se indicarán más adelante.

En forma similar a como se derivó el paréntesis de transformación (2.13), se podrían encontrar las reglas de recurrencia de paréntesis de transformación cuando se pasa por ejemplo de n_1 a $n_1 + 1$ y se obtendrían las mismas reglas derivadas en la referencia 1.

Para derivar las reglas de simetría de los paréntesis de transformación vamos a aprovechar el hecho, demostrado en la referencia 4, de que ante una transformación unitaria unimodular de los operadores de creación

$$\eta'_{is'} = \sum_{s=1}^{2} U_{s's}\,\eta_{is'} \qquad \begin{array}{l} s,s' = 1,2 \\ i = 1,2,3 \end{array} \tag{2.16}$$

(donde i es el índice de vector y s el índice de partículas), el hamiltoniano y el momento angular total del sistema de dos partículas permanecen invariantes. En consecuencia el conjunto de todos los polinomios

$$P^{\lambda\mu}_{n_1 l_1, n_2 l_2}(\underline{\eta_1}, \underline{\eta_2}), \tag{2.17}$$

definidos en (2.6), tales que

$$|l_1 - l_2| \leqslant \lambda \leqslant l_1 + l_2, \tag{2.18a}$$

$$2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = \rho \tag{2.18b}$$

donde los valores λ, ρ del momento angular y la energía total respectivamente, permanecen fijos, forman una base, en general reducible, del grupo SU_2.

De la teoría general de las representaciones[6] tenemos que si $f^j_m(x)$ es una representación de un grupo de elementos U que actúa sobre x, en donde j es el indice que caracteriza la representación y m el índice de renglón de la representación, entonces

$$U f^j_m(x) \equiv f^j_m(U^{-1}x) = \sum_{m'} f_{m'}(x)\, \Delta^j_{m'm}(U) \quad , \tag{2.19}$$

donde $\Delta^j_{m'm}(U)$ es la matriz que representa al elemento U. Si designamos por x' a las variables

$$x' = Ux \quad , \tag{2.20}$$

y reemplazamos x por x' en (2.19), obtenemos

$$f^j_m(x) = \sum_{m'} f^j_m(x')\, \Delta^j_{m'm}(U) \quad . \tag{2.21}$$

En el caso de los polinomios (2.17), el grupo ante el cual forman base para una representación es el SU_2 cuya matriz más general es

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\alpha}\cos\frac{1}{2}\beta\; e^{-i\frac{1}{2}\gamma} & -e^{-i\frac{1}{2}\alpha}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\beta\; e^{i\frac{1}{2}\gamma} \\ e^{i\frac{1}{2}\alpha}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\beta\; e^{-i\frac{1}{2}\gamma} & e^{i\frac{1}{2}\alpha}\cos\frac{1}{2}\beta\; e^{i\frac{1}{2}\gamma} \end{pmatrix} , \tag{2.22}$$

y por lo tanto, podemos designar a los elementos del grupo por los parámetros α, β, γ. De aquí que, utilizando (2.21), podamos escribir

$$P^{\lambda\mu}_{n_1 l_1, n_2 l_2}(\underline{\eta_1}, \underline{\eta_2}) =$$

$$= \sum_{n_1' l_1' n_2' l_2'} P^{\lambda\mu}_{n_1' l_1', n_2' l_2'}(\underline{\eta_1'}, \underline{\eta_2'})\, \Delta^{\rho\lambda}_{n_1' l_1', n_2' l_2'; n_1 l_1, n_2 l_2}(\alpha, \beta, \gamma) , \tag{2.23}$$

donde $\underline{\eta_1'}$, $\underline{\eta_2'}$ están relacionadas con $\underline{\eta_1}$ y $\underline{\eta_2}$ a través de (2.16) y (2.22). En la representación Δ sólo están indicadas ρ y λ y no el valor μ. Esto se debe a que la representación es independiente de μ, lo que puede verse por el hecho que el índice μ de los polinomios puede cambiarse con ayuda de los operadores $\lambda_x \pm i\lambda_y$, los cuales son invariantes ante las transformaciones (2.16). Con frecuencia abreviaremos

$$n_1 l_1, n_2 l_2 \to m, \; n_1' l_1', n_2' l_2' \to m', \; \rho, \lambda \to j \;, \tag{2.24}$$

y por lo tanto, el elemento de matriz tendrá la forma dada en (2.21) pero con U reemplazado por α, β, γ.

Si consideramos el caso particular $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$ vemos de (2.22) y (2.16) que la transformación es

$$\underline{\eta}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\eta}_1 - \underline{\eta}_2), \quad \underline{\eta}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\eta}_1 + \underline{\eta}_2) \;. \tag{2.25}$$

Como esta transformación es idéntica a (2.8), podemos concluir de (2.12) y (2.23), que la relación entre paréntesis de transformación y representaciones es

$$(n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda> \equiv \Delta^{\rho\lambda}_{n_1' l_1', n_2' l_2'; n_1 l_1, n_2 l_2}(0, \tfrac{\pi}{2}, 0) \tag{2.26}$$

Esta relación va a ser la básica para derivar las relaciones de simetría en el siguiente capítulo.

III. SIMETRIA DE LOS PARENTESIS DE TRANSFORMACION

Consideremos la ecuación (2.23) en el caso particular en que $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$. Si en esa ecuación intercambiamos $\underline{\eta}_1$ y $\underline{\eta}_2$, vemos de (2.25) que en el miembro derecho $\underline{\eta}_1'$ cambia a $-\underline{\eta}_1'$ y $\underline{\eta}_2'$ queda igual; por lo tanto,

$$P^{\lambda\mu}_{n_1 l_1, n_2 l_2}(\underline{\eta_2}, \underline{\eta_1}) =$$

$$= \sum_{n_1' l_1', n_2' l_2'} P^{\lambda\mu}_{n_1' l_1', n_2' l_2'}(-\underline{\eta_1'}, \underline{\eta_2'}) \, \Delta^{\rho\lambda}_{n_1' l_1', n_2' l_2'; n_1 l_1, n_2 l_2}(0, \frac{\pi}{2}, 0) \tag{3.1}$$

donde $\underline{\eta_1}$ y $\underline{\eta_2}$ siguen estando relacionados por (2.8) con $\underline{\eta_1'}, \underline{\eta_2'}$. De la forma explícita (2.6) del polinomio P y de las reglas de simetría de los coeficientes de Clebsch-Gordan vemos que

$$P^{\lambda\mu}_{n_1 l_1, n_2 l_2}(\underline{\eta_2}, \underline{\eta_1}) = (-1)^{l_1 + l_2 - \lambda} P^{\lambda\mu}_{n_2 l_2, n_1 l_1}(\underline{\eta_1}, \underline{\eta_2}) ,$$

$$P^{\lambda\mu}_{n_1' l_1', n_2' l_2'}(-\underline{\eta_1'}, \underline{\eta_2'}) = (-1)^{l_1'} P^{\lambda\mu}_{n_1' l_1', n_2' l_2'}(\underline{\eta_1'}, \underline{\eta_2'}) \tag{3.2}$$

Introduciendo (3.2) en (3.1), podemos expresar $P^{\lambda\mu}_{n_2 l_2, n_1 l_1}(\underline{\eta_1}, \underline{\eta_2})$ en términos de $P^{\lambda\mu}_{n_1' l_1', n_2' l_2'}(\underline{\eta_1'}, \underline{\eta_2'})$. Por otro lado, utilizando (2.23), podemos expresar $P^{\lambda\mu}_{n_2 l_2, n_1 l_1}(\underline{\eta_1}, \underline{\eta_2})$ directamente en términos de $P^{\lambda\mu}_{n_1' l_1', n_2' l_2'}(\underline{\eta_1'}, \underline{\eta_2'})$. Comparando los coeficientes de los dos desarrollos y usando (2.26), obtenemos inmediatamente que

$$\begin{aligned} &(n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda> \\ &= (-1)^{l_2' - \lambda} (n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda | n_2 l_2, n_1 l_1, \lambda> , \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde hemos aprovechado el hecho de que

$$2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2n_1' + l_1' + 2n_2' + l_2' \quad . \tag{3.4}$$

Considerando ahora (2.23) para $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$ e intercambiando

η_1' y η_2', vemos de (2.8) que $\eta_1 \to \eta_1$, $\eta_2 \to -\eta_2$ y por razonamiento idéntico al caso anterior, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(n_1'l_1', n_2'l_2', \lambda \,|\, n_1l_1, n_2l_2, \lambda> \\
&= (-1)^{l_1 - \lambda} (n_2'l_2', n_1'l_1', \lambda \,|\, n_1l_1, n_2l_2, \lambda>
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Combinando ahora (3.3) y (3.5) tenemos la relación de simetría

$$
\begin{aligned}
&(n_1'l_1', n_2'l_2', \lambda \,|\, n_1l_1, n_2l_2, \lambda> \\
&= (-1)^{l_1 + l_2'} (n_2'l_2', n_1'l_1', \lambda \,|\, n_2l_2, n_1l_1, \lambda> \quad .
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Estas relaciones de simetría son las que se mencionan sin demostración en las referencias 1 y 3. Para establecer la equivalencia, basta hacer el cambio de notación indicado en (2.15).

Queda todavía por demostrar la más importante de las relaciones de simetría

$$
\begin{aligned}
&(n_1'l_1', n_2'l_2', \lambda \,|\, n_1l_1, n_2l_2, \lambda> = \\
&= (-1)^{l_2 + l_2'} (n_1l_1, n_2l_2, \lambda \,|\, n_1'l_1', n_2'l_2', \lambda> ,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

en donde, como lo indica la notación, se intercambian los valores numéricos en el bra y el ket pero no el bra y el ket mismo. Para derivar esta relación de simetría, vamos a recurrir al hecho de que si se hace una transformación por los parámetros α', β', γ' y posteriormente por los parámetros $\alpha'', \beta'', \gamma''$, dando como resultado una transformación por α, β, γ, entonces, por ser $\Delta^{j}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$ (donde usamos la abreviación (2.24)) una representación del grupo SU_2, se tiene

$$\Delta^{j}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m''} \Delta^{j}_{m'm''}(\alpha',\beta',\gamma')\, \Delta^{j}_{m''m}(\alpha'',\beta'',\gamma'') \tag{3.8}$$

Consideremos ahora el caso particular $\alpha = \gamma = \alpha' = \gamma' = \alpha'' = \gamma'' = 0$. El grupo SU_2 se reduce entonces al grupo ortogonal de dos dimensiones R_2. De aquí se ve de inmediato que si $\beta'' = -\frac{\pi}{2}$, $\beta' = \pi$, entonces $\beta = \beta' + \beta'' = \frac{\pi}{2}$. Por otro lado, el inverso de la transformación $0, \beta, 0$ es $0, -\beta, 0$ y utilizando el hecho de que las representaciones son unitarias al ser las $|n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda\mu>$ ortonormales, se obtiene

$$\Delta^{j}_{m'm}(0, \tfrac{\pi}{2}, 0) = \sum_{m''} \Delta^{j}_{m'm''}(0, \pi, 0)\, \Delta^{j+}_{m''m}(0, \tfrac{\pi}{2}, 0) \ , \tag{3.9}$$

donde $+$ indica el transpuesto conjugado de la matriz. Al ser reales los paréntesis de transformación, vemos de (2.26) que $\Delta^{j}_{m''m}(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ es real y tomando el transpuesto, podemos escribir

$$\Delta^{j}_{m'm}(0, \tfrac{\pi}{2}, 0) = \sum_{m''} \Delta^{j}_{m'm''}(0, \pi, 0)\, \Delta^{j}_{mm''}(0, \tfrac{\pi}{2}, 0) \tag{3.10}$$

Veamos ahora cuál es la forma explícita de los elementos de matriz $\Delta^{j}_{m'm}(0, \pi, 0)$. Si consideramos a los operadores $\underline{\eta}'_1, \underline{\eta}'_2$ ligados con $\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2$ por una transformación del tipo (2.22) con $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, $\gamma = 0$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \underline{\eta}'_1 \\ \underline{\eta}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \underline{\eta}_2 \end{pmatrix} ; \ \underline{\eta}'_1 = -\underline{\eta}_2 , \ \underline{\eta}'_2 = \underline{\eta}_1 \tag{3.11}$$

Indicando el polinomio (2.17) en notación abreviada como $P_m(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2)$, tenemos de (2.23) y (3.11) que

$$P_m(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2) = P_m(\underline{\eta}_2, -\underline{\eta}'_1) = \sum_{m'} P_{m'}(\underline{\eta}'_1, \underline{\eta}'_2)\, \Delta^{j}_{m'm}(0, \pi, 0) \tag{3.12}$$

De la forma explícita (2.6) del polinomio vemos que

$$P^{\lambda\mu}_{n_1 l_1, n_2 l_2}(\underline{\eta}_2', -\underline{\eta}_1') = (-1)^{l_1 - \lambda} P^{\lambda\mu}_{n_2 l_2, n_1 l_1}(\underline{\eta}_1', \underline{\eta}_2'), \tag{3.13}$$

y comparando con (3.12) y reemplazando m por m'' se tiene

$$\Delta^{\rho\lambda}_{n_1' l_1', n_2' l_2'; n_1'' l_1'', n_2'' l_2''}(0, \pi, 0) = (-1)^{l_1'' - \lambda} \delta_{n_1' n_2''} \delta_{l_1' l_2''} \delta_{n_2' n_1''} \delta_{l_2' l_1''} \tag{3.14}$$

Reemplazando (3.14) en (3.10) y efectuando la suma, se obtiene finalmente

$$\Delta^{\rho\lambda}_{n_1' l_1', n_2' l_2'; n_1 l_1, n_2 l_2}(0, \tfrac{\pi}{2}, 0) = (-1)^{l_2' - \lambda} \Delta^{\rho\lambda}_{n_1 l_1, n_2 l_2; n_2' l_2', n_1' l_1'}(0, \tfrac{\pi}{2}, 0) \tag{3.15}$$

Utilizando la relación (2.26) y la regla de simetría (3.3), se obtiene finalmente la relación de simetría (3.7).

Empleando la relación entre los paréntesis de transformación y los elementos de matriz de una representación de SU_2 para los valores $0, \frac{\pi}{2}, 0$ de los parámetros, hemos podido demostrar las relaciones de simetría. Tiene también interés conocer el orden de la representación para una ρ, λ determinada, ya que este orden nos da el número de paréntesis de transformación asociados con ρ, λ. En el siguiente capítulo se determina el orden como función de ρ, λ.

IV. DIMENSIONALIDAD DE LA REPRESENTACION DE SU_2.

Se ha visto que los paréntesis de transformación son los elementos de matriz de una representación – en general reducible – de SU_2 para los valores particulares $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ de los parámetros que caracterizan las transformaciones unitarias en el espacio formado por $\underline{\eta}_1$ y $\underline{\eta}_2$. La representación está caracteriza-da por los valores de ρ, el índice de energía, y λ, el impulso angular total de las dos partículas, y la dimensionalidad de la representación, r, dependerá sólo de ellos. El índice de renglón de la matriz m está compuesto de los cuatro números cuánticos n_1, l_1, n_2 y l_2; la dimensionalidad r es, por lo tanto, el número de combinaciones de estos cuatro números compatibles con las condiciones (2.18). Estas combinaciones se llamarán aquí el conjunto (ρ, λ).

Considérense ahora aquellas combinaciones para las cuales $n_1 \neq 0$. Si ponemos $n_1' = n_1 - 1$, entonces se ve que estas combinaciones corresponden una por una a los miembros del conjunto $(\rho - 2, \lambda)$ formado por n_1', l_1, n_2 y l_2. Llamando $r''(\rho, \lambda)$ al número de combinaciones en el conjunto (ρ, λ) para las cuales $n_1 \neq 0$ y $r'(\rho, \lambda)$ al número de combinaciones para las cuales $n_1 = 0$, tenemos

$$r(\rho,\lambda) = r'(\rho,\lambda) + r''(\rho,\lambda) = r'(\rho,\lambda) + r(\rho-2,\lambda) \qquad (4.1)$$

Es fácil darse cuenta de la validez de (4.1) comparando dos conjuntos (ρ, λ) y $(\rho - 2, \lambda)$ en las tablas de los paréntesis de transformación (referencia 3 pp. 1 a 123). Aplicando (4.1) repetidas veces y considerando que de (2.18) resulta que $r(\rho', \lambda) = 0$ si $\rho' < \lambda$, se obtiene

$$r(\rho,\lambda) = \sum_{\rho'=\rho_0}^{\rho}{}' \; r'(\rho',\lambda), \quad \begin{cases} \rho_0 = \lambda & \text{si } \rho - \lambda \text{ es par} \\ \rho_0 = \lambda + 1 & \text{si } \rho - \lambda \text{ es non} \end{cases} \qquad (4.2)$$

La prima en el signo de suma indica que ρ' aumenta de 2 en 2.

Ahora

$$\rho' - 2n_2 = l_1 + l_2 \quad , \qquad (4.3)$$

de modo que debido a (2.18) el valor mínimo de $\rho' - 2n_2$ debe ser $\geqslant \lambda$, y por lo tanto

$$(n_2)_{max} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\rho' - \lambda) & \text{si } \rho' - \lambda \text{ es par} \\ \frac{1}{2}(\rho' - \lambda - 1) & \text{si } \rho' - \lambda \text{ es non} \end{cases} \qquad (4.4)$$

El valor mínimo de n_2 es evidentemente 0, de modo que el número de valores posibles de n_2 es

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(\rho' - \lambda + 2) & \text{si } \rho' - \lambda \text{ es par} \\ \\ \frac{1}{2}(\rho' - \lambda + 1) & \text{si } \rho' - \lambda \text{ es non} \end{array} \tag{4.5}$$

Para n_2 dada, (4.3) indica que los valores máximos de l_1 y l_2 son iguales, como lo son sus valores mínimos; además, al mínimo de l_2 corresponde el máximo de l_1. Tenemos

$$l_1 - l_2 = \rho' - 2n_2 - 2l_2,$$

de modo que el valor máximo que puede alcanzar la diferencia $l_1 - l_2$ de acuerdo con (2.18) es λ si ρ' y λ son de la misma paridad, es decir si $\rho' - \lambda$ es par, y es $\lambda - 1$ si $\rho' - \lambda$ es non. Pero

$$(l_1 - l_2)_{max} = (l_1)_{max} - (l_2)_{min} = (l_2)_{max} - (l_2)_{min},$$

el rango de variación de l_2. El número posible de valores de l_2 (y en consecuencia también de l_1) es entonces $\lambda + 1$ si $\rho' - \lambda$ es par, y es λ si $\rho' - \lambda$ es non.

Combinando este resultado con (4.5) se obtiene

$$r'(\rho', \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\rho' - \lambda + 2) & \text{si } \rho' - \lambda \text{ es par} \\ \\ \frac{1}{2}\lambda(\rho' - \lambda + 1) & \text{si } \rho' - \lambda \text{ es non} \end{cases} \tag{4.6}$$

Substituyendo (4.6) en (4.2) se obtiene el resultado deseado,

$$r(\rho, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{8}(\lambda + 1)(\rho - \lambda + 2)(\rho - \lambda + 4), & \text{si } \rho - \lambda \text{ es par} \\ \\ \frac{1}{8}\lambda(\rho - \lambda + 1)(\rho - \lambda + 3), & \text{si } \rho - \lambda \text{ es non} \end{cases} \tag{4.7}$$

V. POTENCIALES QUE LLEVAN A REGLAS DE SUMA DE LOS PARENTESIS DE TRANSFORMACION

En la referencia 3 se ha indicado como la utilización de un potencial central constante, puede llevar a ciertas reglas de suma para los coeficientes C'_{C} donde estos coeficientes pueden expresarse en términos de paréntesis de transformación y coeficientes B (véase, por ejemplo, las fórmulas 4.4 y 4.10 de la referencia 3). Se desearía tener reglas de suma similares en el caso de potenciales de acoplamiento spin-orbita y tensoriales.

Viendo el argumento dado en la referencia 3 para obtener las reglas de suma, se sugiere que lo que necesitamos son potenciales de acoplamiento spin-orbita y tensoriales suficientemente simples como para poder ser evaluados sus elementos de matriz directamente en la representación original. Al ser determinados esos elementos de matriz por el método general de la referencia 3, encontraremos entonces ciertas reglas de suma para los coeficientes C'_{LS} y C'_{T}.

En las secciones que siguen vamos a regresar a la notación de las referencias anteriores[1,2,3] en donde las coordenadas relativas y de centro de masa se indican por

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_2),\; R = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_2) \quad , \tag{5.1}$$

y sus correspondientes cantidades de movimientos por

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2),\; P = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2) \quad . \tag{5.2}$$

Los números cuánticos $n_1 l_1, n'_1 l'_1$ van ahora a estar asociados con la coordenada r_1 y los números cuánticos $n_2 l_2, n'_2 l'_2$ con la coordenada r_2, mientras que los números cuánticos $nl, n'l'$ y $NL, N'L'$ estarán ahora relacionados con r y R respectivamente.

Empezaremos la discusión con el caso de fuerzas de acoplamiento spin-orbita. Consideremos el caso particular en que la fuerza de acoplamiento spin-orbita es independiente de r, esto es, que tiene la forma

$$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{s}\,, \tag{5.3}$$

donde

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \quad , \quad \boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\,(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \quad . \tag{5.4}$$

En tal caso, en la referencia 3 obtuvimos que el único elemento de matriz distinto de 0 es

$$\begin{aligned} &< n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda; \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\ J |\ \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{s}\ | n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda'; \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\ \ J' > \\ &= (-1)^{\lambda + 1 - J} < n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda ||\ \boldsymbol{l}\ || n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda' > \sqrt{6}\, W(\lambda\lambda' 11; 1J) \\ &= \sum_{p} C'_{\mathrm{LS}}(n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda; n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda'; J, p) \quad , \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde W es un coeficiente de Racah y el coeficiente C'_{LS} está dado en términos de los paréntesis de transformación y los coeficientes B por

$$\begin{aligned} &C'_{\mathrm{LS}}(n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda; n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda'; J, p) \\ &= (-1)^{J+\rho} \sqrt{6}\ W(\lambda\lambda' 11; 1J)\ \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \\ &\sum_{nlNL} \left[W(\lambda\lambda' ll; 1L) \sqrt{l(l+1)(2l+1)}\ (nl, NL, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda > \right. \\ &\left. \times\ (n'l, NL, \lambda' | n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda' > B(n'l, nl, p) \right] \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde $n' = n + \frac{1}{2}(\rho' - \rho)$ y ρ, ρ' están dados por (2.18b)

De (5.5) vemos que si el elemento reducido de matriz $< n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda || \boldsymbol{l} || n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda' >$

se pudiera evaluar directamente se tendría una regla de suma para los coeficientes C'_{LS}.

En la sección 6 mostraremos cómo evaluar directamente este elemento de matriz.

Pasemos ahora al caso de fuerzas tensoriales. Consideremos el caso particular en el que la fuerza tensorial tiene la forma

$$V_T = \left(\frac{32}{5}\pi\right)^{\frac{1}{2}} r^2\, \mathbf{Y}_2\,(\theta,\varphi)\cdot \mathbf{X}_2 \quad , \tag{5.7}$$

donde $\mathbf{Y}_2$ es el tensor de Racah cuyos componentes son los armónicos esféricos $Y_{2m}(\theta,\varphi)$ y $\mathbf{X}_2$ es el tensor de Racah de segundo orden cuya componente para $m = 0$ está dada por

$$X_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3\,s_z^2 - \mathbf{s}^2) \quad , \tag{5.8}$$

en donde $\mathbf{s}$ esta definido por (5.4). En la referencia 3 se muestra que el único elemento de matriz diferente de 0 para la fuerza tensorial está dado por

$$\langle n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda;\ \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\ 1, J|\, V_T \,|n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda';\ \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\ 1, J\rangle$$

$$= \left(\frac{32}{5}\pi\right)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\lambda+1-J} \langle n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \| r^2\, \mathbf{Y}_2(\theta,\varphi) \| n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda'\rangle$$

$$\times\quad \sqrt{15}\ W(\lambda\lambda'\,11;\,2J)$$

$$= \sum_p \left[\, C_T'\,(n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda; n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda'; J\,; p)\,(p + \tfrac{3}{2})\,\right] , \tag{5.9}$$

donde hemos aprovechado el hecho que la integral de Talmi[1] I_p para $V(r) = r^2$ está dada por

$$I_p = \frac{2}{\Gamma(p+\frac{3}{2})}\int_0^\infty r^{2p} e^{-r^2} r^2 r^2 dr = \frac{\Gamma(p+\frac{5}{2})}{\Gamma(p+\frac{3}{2})} = (p+\frac{3}{2}) \qquad (5.10)$$

El coeficiente C'_T está dado en términos de los paréntesis de transformación y de los coeficientes B por

$$C'_T(n_1l_1, n_2l_2, \lambda; n'_1l'_1, n'_2l'_2, \lambda'; J; p)$$

$$= (-1)^{\rho-J+1}\sqrt{120(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}\; W(\lambda\lambda' 11; 2J)$$

$$\times \sum_{l'}\sum_{nlNL} [\sqrt{2l+1} < l200|l'0> W(\lambda\lambda' ll'; 2L)$$

$$\times (nl, NL, \lambda|n_1l_1, n_2l_2, \lambda> (n'l', NL, \lambda'|n'_1l'_1, n'_2l'_2, \lambda'>$$

$$\times B(nl, n'l', p)] \qquad (5.11)$$

De (5.9) vemos que si el elemento reducido de matriz

$$<n_1l_1, n_2l_2, \lambda||r^2 Y_2(\theta,\varphi)||n'_1l'_1, n'_2l'_2, \lambda'>$$

se pudiera evaluar directamente, se tendría una regla de suma para los coeficientes C'_T. En la sección 7 mostraremos cómo evaluar directamente este elemento de matriz.

VI. EL ELEMENTO REDUCIDO DE MATRIZ DE l

Para obtener el elemento reducido de matriz

$$<n_1l_1, n_2l_2, \lambda||l||n'_1l'_1, n'_2l'_2, \lambda'> \quad , \qquad (6.1)$$

empezaremos por expresar el momento angular relativo en términos de los operadores de creación y aniquilación

$$\underline{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{r} - i\boldsymbol{p}), \quad \underline{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{r} + i\boldsymbol{p}) \quad . \tag{6.2}$$

De (6.2) se obtiene de inmediato que

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = -i(\underline{\eta} \times \underline{\xi}) \tag{6.3}$$

Expresando ahora los operadores $\underline{\eta}$ y $\underline{\xi}$ en términos de los operadores de creación y aniquilación de las partículas 1 y 2, tenemos de (5.1) y (5.2) que

$$\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\boldsymbol{l}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{l}_2 + \frac{i}{2}(\underline{\eta_1} \times \underline{\xi_2}) + \frac{i}{2}(\underline{\eta_2} \times \underline{\xi_1}), \tag{6.4}$$

donde $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ son los momentos angulares de las partículas 1 y 2.

Podemos ahora considerar las componentes esféricas del vector $\boldsymbol{l}$, y expresando los productos vectoriales[7] con ayuda de los coeficientes de Clebsch-Gordan, tenemos que

$$l_m = \frac{1}{2}l_{m1} + \frac{1}{2}l_{m2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\nu\sigma} \langle 11\nu\sigma|1m\rangle \eta_{\nu 1}\xi_{\sigma 2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\nu\sigma} \langle 11\nu\sigma|1m\rangle \eta_{\nu 2}\xi_{\sigma 1} \tag{6.5}$$

Sustituyendo esta expresión en el elemento reducido de matriz (6.1) y haciendo uso de las relaciones de Racah[8] y de Jahn y Hope[5], se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \| \boldsymbol{l} \| n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda' \rangle &= \frac{1}{2}\delta_{n_1' n_1}\delta_{l_1' l_1}\delta_{n_2' n_2}\delta_{l_2' l_2}\sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \\
\times \Big[(-1)^{l_2+1-l_1'-\lambda} W(l_1 l_1' \lambda\lambda'; 1 l_2)\sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)} &+ (-1)^{l_1+1-l_2-\lambda} W(l_2 l_2' \lambda\lambda'; 1 l_1)\sqrt{l_2(l_2+1)(2l_2+1)}\Big] \\
+ \left(\left[\frac{3}{2}(2\lambda+1)(2\lambda'+1)\right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & \lambda \\ l_1' & l_2' & \lambda' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \right. \\
\left. \times \left[\langle n_1 l_1 \| \underline{\eta_1} \| n_1' l_1' \rangle \langle n_2 l_2 \| \underline{\xi_2} \| n_2' l_2' \rangle - \langle n_1 l_1 \| \underline{\xi_1} \| n_1' l_1' \rangle \langle n_2 l_2 \| \underline{\eta_2} \| n_2' l_2' \rangle\right] \right),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

donde las W son coeficientes de Racah, las {} coeficientes de $9j$, y se ha aprovechado el hecho de que el elemento de matriz reducido de l es

$$<nl||l||n'l'> = \delta_{nn'}\,\delta_{ll'}\sqrt{l(l+1)(2l+1)} \tag{6.7}$$

Los elementos de matriz reducidos de $\underline{\eta}$ y $\underline{\xi}$ que aparecen en (6.6) están dados por (A.7) y (A.10) en el apéndice.

Para obtener la regla de suma que buscamos, sólo necesitamos sustituir (6.6) en (5.5). La forma explícita de la regla de suma se publicará en un suplemento a la referencia 3. De (6.6) y las formas explícitas (A.7, A.10) de los elementos reducidos de matriz de $\underline{\eta}$ y $\underline{\xi}$, vemos que (6.6) se anula a menos que se satisfagan las reglas de selección

$$n_1' = n_1 \pm 1, n_1;\ n_2' = n_2 \pm 1, n_2;\ l_1' = l_1 \pm 1, l_1;\ l_2' = l_2 \pm 1, l_2 \quad . \tag{6.8}$$

De aquí que la regla de suma para fuerzas de acoplamiento spin-orbita será

$$\sum_p C'_{LS}(n_1l_1, n_2l_2, \lambda; n_1'l_1', n_2'l_2', \lambda'; J; p) = 0 \quad , \tag{6.9}$$

si alguna de las reglas de selección (6.8) no se satisface.

VII. EL ELEMENTO REDUCIDO DE MATRIZ DE $r^2 Y_2(\theta, \varphi)$

Para obtener el elemento reducido de matriz

$$<n_1l_1, n_2l_2, \lambda||r^2 Y_2(\theta, \varphi)||n_1'l_1', n_2'l_2', \lambda'> \tag{7.1}$$

empezaremos por expresar el armónico esférico sólido $\mathcal{Y}_{2m}(r)$ en términos de los armónicos esféricos sólidos asociados con las partículas 1 y 2. Utilizando (5.1) y la forma explícita de los coeficientes de Clebsch-Gordan[9], podemos escribir

$$r^2 Y_{2m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} r_1^2 Y_{2m}(\theta_1, \varphi_1) + \frac{1}{2} r_2^2 Y_{2m}(\theta_2, \varphi_2)$$

$$- \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sum_{\nu,\sigma} < 11\nu\sigma \mid 2m > x_{\nu 1} x_{\nu 2} \tag{7.2}$$

donde $x_{\nu 1}, x_{\nu 2}$ son las componentes esféricas de los vectores r_1 y r_2.

Ssustituyendo (7.2) en (7.1), y haciendo uso de las relaciones de Racah[8] y de Jahn y Hope[5], se obtiene

$$< n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda || r^2 Y_2(\theta, \varphi) || n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda' >$$

$$= \frac{1}{2} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{l_2 l_2'} (-1)^{l_2 + 1 - l_1' - \lambda} < n_1 l_1 || r_1^2 Y_2(\theta_1, \varphi_1) || n_1' l_1' > \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}\; W(l_1 l_1' \lambda \lambda'; 2 l_2)$$

$$+ \frac{1}{2} \delta_{n_1 n_1} \delta_{l_1 l_1'} (-1)^{l_1 + 1 - l_2 - \lambda'} < n_2 l_2 || r_2^2 Y_2(\theta_2, \varphi_2) || n_2' l_2' > \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}\; W(l_2 l_2' \lambda \lambda'; 2 l_1)$$

$$- \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [3(2\lambda+1)(2\lambda'+1)]^{\frac{1}{2}} < n_1 l_1 || r_1 || n_1' l_1' > < n_2 l_2 || r_2 || n_2' l_2' > \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & \lambda \\ l_1' & l_2' & \lambda' \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}, \tag{7.3}$$

donde de nuevo, W representa coeficientes de Racah y $\{\}$ coeficientes de $9j$.

De las relaciones (6.2) vemos que

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{\eta} + \underline{\xi}) \tag{7.4}$$

y por lo tanto, el elemento reducido de matriz de r puede escribirse como

$$< nl || r || n'l' > = \frac{1}{\sqrt{2}} [< nl || \underline{\eta} || n'l' > + < nl || \underline{\xi} || n'l' >] \tag{7.5}$$

donde a su vez, los elementos reducidos de matriz de $\underline{\eta}$ y $\underline{\xi}$ están dados por (A.7, A.10).

El elemento reducido de matriz de $r^2\, Y_2(\theta, \varphi)$ puede descomponerse como

$$< nl||r^2\, Y_2(\theta, \varphi)||n'l'> = <nl||r^2||n'l'> < l||Y_2||l'> \tag{7.6}$$

donde

$$< nl||r^2||n'l'> \equiv \int_0^\infty \mathfrak{R}_{nl}(r)\, r^2\, \mathfrak{R}_{n'l'}(r)\, r^2 dr \tag{7.7}$$

y

$$< l||Y_2||l'> = \left[\frac{5(2l'+1)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}} < l'200|l0> \tag{7.8}$$

De (7.8) vemos que la regla de selección para l' es $l' = l \pm 2, l$. Para estos valores de l' podemos calcular la integral radial como se indica a continuación. Consideramos primera $l' = l+2$. En tal caso (8.3)

$$r^2\, \mathfrak{R}_{n'l+2} = [2n'!/\Gamma(n'+l+\tfrac{7}{2})]^{\frac{1}{2}}\, r^l\, r^4\, L_{n'}^{l+5/2}(r^2) \tag{7.9}$$

y utilizando dos veces la regla de recurrencia[10]

$$r^2 L_n^{l+3/2}(r^2) = (n+l+\tfrac{3}{2}) L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2) - (n+1)\, L_{n+1}^{l+\frac{1}{2}}(r^2) \quad , \tag{7.10}$$

así como la ortonormalidad de las funciones $\mathfrak{R}_{nl}$ y $\mathfrak{R}_{n'l}$, obtenemos inmediatamente que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathfrak{R}_{nl}\, r^2\, \mathfrak{R}_{n'l+2}\, r^2 dr &= \sqrt{(n+l+\tfrac{5}{2})(n+l+\tfrac{3}{2})}\; \delta_{n'n} \\ &- 2\sqrt{n(n+l+\tfrac{3}{2})}\; \delta_{n'n-1} + \sqrt{n(n-1)}\; \delta_{n'n-2}\end{aligned} \tag{7.11}$$

El caso $l' = l - 2$ puede expresarse con ayuda de (7.11) como

$$\int_0^\infty \Re_{nl}\, r^2\, \Re_{n'l-2}\, r^2 dr = \int_0^\infty \Re_{n'l-2}\, r^2\, \Re_{nl}\, r^2 dr$$

$$= \left[\int_0^\infty \Re_{n'l'}\, r^2\, \Re_{nl'+2}\, r^2 dr\right]_{l' = l-2}$$

$$= \sqrt{(n+l+\tfrac{1}{2})(n+l-\tfrac{1}{2})}\, \delta_{n'n} - 2\sqrt{(n+1)(n+l+\tfrac{1}{2})}\, \delta_{n'n+1} + \sqrt{(n+2)(n+1)}\, \delta_{n'n+2} \tag{7.12}$$

Finalmente, en el caso $l' = l$ aprovechamos la relación[10]

$$r^2 L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2) = -(n+1)\, L_{n+1}^{l+\frac{1}{2}}(r^2) + (2n+l+\tfrac{3}{2})\, L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2) - (n+l+\tfrac{1}{2})\, L_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}(r^2), \tag{7.13}$$

para obtener de (7.9) y (7.13) que

$$\int_0^\infty \Re_{nl}\, r^2\, \Re_{n'l}\, r^2 dr = -\sqrt{n(n+l+\tfrac{1}{2})}\, \delta_{n'n-1}$$

$$+ (2n+l+\tfrac{3}{2})\, \delta_{n'n} - \sqrt{(n+1)(n+l+\tfrac{3}{2})}\, \delta_{n'n+1} \tag{7.14}$$

El elemento de matriz reducido (7.6) puede por lo tanto escribirse de inmediato en términos de (7.8) y (7.11), (7.12) o (7.14) según sea $l' = l+2, l-2$ o l.

Sustituyendo (7.5) y (7.6) en (7.3), tenemos la forma explícita del elemento reducido de matriz (7.1). Reemplazando a su vez esta expresión en (5.9), obtenemos las reglas de suma para las C_{T}^{l}. La forma explícita de la regla de suma se publicará en un suplemento a la referencia 3.

De la forma explícita de los elementos de matriz (7.5) y (7.6) vemos que (7.1) será distinto de 0 sólo si se satisfacen las reglas de selección

$$n_1' = n_1 \pm 2,\ n_1 \pm 1,\ n_1 ; l_1' = l_1 \pm 2,\ l_1 \pm 1,\ l_1$$

$$n_2' = n_2 \pm 2,\ n_2 \pm 1,\ n_2 ;\ l_2' = l_2 \pm 2,\ l_2 \pm 1,\ l_2 \ . \qquad (7.15)$$

Si alguna de estas reglas de selección se viola, entonces (7.1) es cero, y por lo tanto la regla de suma sería

$$\sum_p \left(p + \frac{3}{2}\right) C_T' \left(n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda; n_1' l_1', n_2' l_2', \lambda'; J, p\right) = 0 \qquad (7.16)$$

VIII. RELACIONES DE RECURRENCIA Y DE SUMA PARA LOS COEFICIENTES $B(nl, n'l', p)$

Los coeficientes $B(nl, n'l', p)$ se definen por la relación

$$\int_0^\infty \mathfrak{R}_{nl}(r)\, V(r)\, \mathfrak{R}_{n'l'}(r)\, r^2 dr = \sum_p B(nl, n'l', p)\, I_p \qquad (8.1)$$

(referencia 3, ecuaciones 3.1 y 3.2), en donde la integral de Talmi está dada por[3]

$$I_p = \frac{2}{\Gamma(p + 3/2)} \int_0^\infty r^{2p}\, e^{-r^2}\, V(r)\, r^2 dr \qquad (8.2)$$

La función $\mathfrak{R}_{nl}(r)$ es la parte radial de la función de onda del oscilador armónico y tiene la forma explícita

$$\mathfrak{R}_{nl}(r) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n + l + 3/2)}\right]^{1/2} r^l\, e^{-\frac{1}{2} r^2}\, L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2) \ , \qquad (8.3)$$

en donde $L_n^{l+\frac{1}{2}}$ es un polinomio de Laguerre, definido de manera a obtener la normalización

$$\int_0^\infty [\,\mathfrak{R}_{nl}(r)]^2\, r^2\, dr = 1$$

Se ha podido obtener una fórmula explícita para los coeficientes B (referencia 3, ecuación 3.4) de la cual se ve que si el parámetro p no se encuentra entre los límites

$$a \equiv \tfrac{1}{2}\,(l + l') \leqslant p \leqslant \tfrac{1}{2}\,(l + l') + n + n' \equiv \beta \tag{8.4}$$

el valor de $B(nl, n'l', p)$ es cero.

Dado que las fuerzas nucleares conservan la paridad, los elementos de matriz deben permanecer invariantes ante reflexión de las coordenadas. En términos de las coordenadas relativas y del centro de masa (5.1), la reflexión introduce un factor $(-1)^{l+L}$ en el ket $|nl, NL, \lambda\mu)$. En vista de que una fuerza nuclear v cualquiera no actúa sobre la función de onda del centro de masa, $|NLM)$, el elemento de matriz más general es $(n'l', NL, \lambda'\mu'|\, v\, |nl, NL, \lambda\mu)$ y para que sea invariante bajo reflexión se requiere que

$$l' = l,\ l \pm 2,\ l \pm 4,\ \ldots$$

Como ya se ha mostrado, sólo los casos $l' = l,\ l \pm 2$ son de interés en la práctica[1].

Se pueden derivar varias reglas de recurrencia para los coeficientes B; pero en vista de las tablas extensas publicadas en la referencia 3, pp. 145-175, se indicarán aquí solamente cuatro reglas que sirven para ampliar la gama de estas tablas. Se obtienen a partir de las propiedades de los polinomios de Laguerre.

Una regla de recurrencia resulta de la ecuación (7.13). Sustituyéndola en (8.3) se obtiene una función radial que se utiliza en (8.1) para obtener

$$\sum_{p=\alpha}^{\beta+1} B(n'l', n+1l, p)\, \mathrm{I}_p =$$

$$= \left[\frac{2(n+1)!}{\Gamma(n+l+5/2)}\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \Re_{n'l'}(r)\, V(r)\, r^l e^{-\frac{1}{2}r^2} \left\{ \frac{2n+l+3/2-r^2}{n+1} L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2) - \frac{n+l+1/2}{n+1} L_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}(r^2) \right\} r^2 dr$$

$$\int_0^\infty \Re_{n'l'}(r)\, V(r) \left\{ \frac{2n+l+3/2}{(n+1)\sqrt{n+l+3/2}} \Re_{nl}(r) - \frac{r^2}{(n+1)\sqrt{n+l+3/2}} \Re_{nl}(r) - \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{n(n+l+1/2)}{n+l+3/2}}\, \Re_{n-1l}(r) \right\} r^2 dr$$

$$= \frac{2n+l+3/2}{(n+1)\sqrt{n+l+3/2}} \sum_{p=\alpha}^{\beta} B(n'l', nl, p)\mathrm{I}_p - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+l+3/2}} \sum_{p=\alpha}^{\beta} (p+3/2)\, B(n'l', nl, p)\mathrm{I}_{p+1}$$

$$- \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{n(n+l+1/2)}{n+l+3/2}} \sum_{p=\alpha}^{\beta-1} B(n'l', n-1l, p)\mathrm{I}_p \qquad (8.5)$$

Los límites superiores de las tres sumas en esta ecuación pueden hacerse todas iguales a β, puesto que fuera de los límites (8.4) el coeficiente B es cero. Se ha hecho uso de que

$$\int_0^\infty r^{2p+2} e^{-r^2} V(r) r^2 dr = \frac{\Gamma(p+5/2)}{2} \mathrm{I}_{p+1} \qquad (8.6)$$

Como $V(r)$ y en consecuencia las I_p son arbitrarias, los coeficientes de las I_p en (8.5) deben ser iguales en los dos lados; de ahí resulta la regla de recurrencia

$$\sqrt{(n+1)(n+l+3/2)}\; B(n'l', n+1l, p) = (2n+l+3/2)\; B(n'l', nl, p)$$
$$- (p+1/2)\; B(n'l', nl, p-1) - \sqrt{n(n+l+1/2)}\; B(n'l', n-1l, p) \qquad (8.7)$$

Otra regla de recurrencia resulta aplicando dos veces la ecuación (7.10). Procediendo como antes se obtiene

$$\sum_{p=\alpha+1}^{\beta+1} (p+3/2)\, B(n'l', nl+2, p)\,\mathrm{I}_{p+1} = \int_0^\infty \Re_{n'l'}(r)\, V(r)\, r^2\, \Re_{nl+2}(r)\, r^2 dr$$

$$= \int_0^\infty \Re_{n'l'}(r)\, V(r) \left[\sqrt{(n+l+5/2)(n+l+3/2)}\, \Re_{nl} - 2\sqrt{(n+l+5/2)(n+1)}\, \Re_{n+1l} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\, \Re_{n+2l}\right] r^2 dr$$

$$= \sqrt{(n+l+5/2)(n+l+3/2)} \sum_{p=\alpha}^{\beta} B(n'l', nl, p)\,\mathrm{I}_p - 2\sqrt{(n+l+5/2)(n+1)} \sum_{p=\alpha}^{\beta+1} B(n'l', n+1l, p)\,\mathrm{I}_p$$

$$+ \sqrt{(n+1)(n+2)} + \sum_{p=\alpha}^{\beta+2} B(n'l', n+2l, p)\,\mathrm{I}_p \qquad (8.8)$$

Comparando los coeficientes de las I_p en ambos lados, se obtiene la regla de recurrencia

$$(p+3/2)\, B(n'l', nl+2, p) = \sqrt{(n+l+5/2)(n+l+3/2)}\, B(n'l', nl, p+1)$$

$$- 2\sqrt{(n+l+5/2)(n+1)}\, B(n'l', n+1l, p+1)$$

$$+ \sqrt{(n+1)(n+2)}\, B(n'l', n+2l, p+1) \qquad (8.9)$$

Al aplicar la ecuación (7.10) una vez a cada una de las dos funciones radiales que ocurren en (8.1), un procedimiento similar da

$$\sum_{p=a+1}^{\beta+1} (p+3/2)\, B(n'l'+1, nl+1, p)\, I_{p+1} = \int_0^\infty \Re_{n'l'+1}(r)\, V(r)\, r^2\, \Re_{nl+1}(r)\, r^2 dr$$

$$= \int_0^\infty V(r)\, [\sqrt{(n'+l'+3/2)(n+l+3/2)}\, \Re_{n'l'}(r)\, \Re_{nl}(r) - \sqrt{(n'+1)(n+l+3/2)}\, \Re_{n'+1l'}\, \Re_{nl}(r)$$

$$- \sqrt{(n'+l'+3/2)(n+1)}\, \Re_{n'l'}(r)\, \Re_{n+1l}(r) + \sqrt{(n'+1)(n+1)}\, \Re_{n'+1l'}(r)\, \Re_{n+1l}(r)]\, r^2 dr$$

$$= \sqrt{(n'+l'+3/2)(n+l+3/2)} \sum_{p=a}^{\beta} B(n'l', nl, p)\, I_p - \sqrt{(n'+1)(n+l+3/2)} \sum_{p=a}^{\beta+1} B(n'+1l', nl, p)\, I_p$$

$$- \sqrt{(n'+l'+3/2)(n+1)} \sum_{p=a}^{\beta+1} B(n'l', n+1l, p)\, I_p - \sqrt{(n'+1)(n+1)} \sum_{p=a}^{\beta+2} B(n'+1l', n+1l, p)\, I_p$$

De esta ecuación se deriva la regla de recurrencia

$$(p+3/2)\, B(n'l'+1, nl+1, p) = \sqrt{(n'l'+3/2)(n+l+3/2)}\, B(n'l', nl, p+1)$$

$$-\sqrt{(n'+1)(n+l+3/2)}\, B(n'+1l', nl, p+1)$$

$$- \sqrt{(n'+l'+3/2)(n+1)}\, B(n'l', n+1l, p+1) + \sqrt{(n'+1)(n+1)}\, B(n'+1l', n+1l, p+1) \quad (8.11)$$

Finalmente, el uso de la ecuación (7.10) sobre una función radial y de la ecuación 10.12(24) de la referencia 10 sobre la segunda función radial en (8.1) permite obtener de manera análoga la regla de recurrencia

$$(p+3/2)\, B(n'l'-1, nl+1, p) = \sqrt{(n'+l'+1/2)(n+l+3/2)}\, B(n'l', nl, p+1)$$

$$- \sqrt{n'(n+l+3/2)}\, B(n'-1l', nl, p+1) - \sqrt{(n'+l'+1/2)(n+1)}\, B(n'l', n+1l, p+1)$$

$$+ \sqrt{n'(n+1)}\, B(n'-1l', n+1l, p+1) \qquad (8.12)$$

Junto con la simetría de los coeficientes B (referencia 3, ecuación 3.9)

$$B(n'l', nl, p) = B(nl, n'l', p) \quad , \tag{8.13}$$

las reglas (8.7), (8.9), (8.11) y (8.12) permiten obtener cualquier coeficiente B para el cual l y l' difieren en un entero par. Si $l - l'$ es non, $B(nl, n'l', p)$ no está definido, por la razón ya mencionada.

Dos reglas de suma para los coeficientes $B(nl, n'l', p)$ se obtienen de las ecuaciones (7.11) y (7.14). Si se pone $V(r) = r^2$, la ecuación (5.10) da el valor I_p; sustituyéndolo con (7.14) en (8.1), resulta

$$\sum_p (p + 3/2)\, B(nl, n'l, p) = -\sqrt{n\,(n + l + 1/2)}\; \delta_{n'n-1} + (2n + l + 3/2)\, \delta_{n'n} - \sqrt{(n+1)\,(n + l + 3/2)}\; \delta_{n'n+1} \tag{8.14}$$

Combinando (7.11) con este valor de las I_p, se obtiene

$$\sum_p (p + 3/2)\, B(nl, n'l + 2, p) = \sqrt{(n + l + 5/2)\,(n + l + 3/2)}\; \delta_{n'n} - 2\sqrt{n(n + l + 3/2)}\, \delta_{n'n-1} + \sqrt{n(n-1)}\, \delta_{n'n-2} \tag{8.15}$$

De un modo similar se obtiene otra regla de suma si se pone $V(r) = 1$, en cual caso (8.2) muestra que todas las integrales de Talmi son iguales a 1. En consecuencia

$$\int_0^{\infty} \Re_{nl}(r)\, \Re_{n'l}(r)\, r^2 dr = \sum_p B(nl, n'l, p) = \delta_{nn'} \tag{8.16}$$

Las reglas de suma se utilizaron para confirmar los valores númericos de los coeficientes $B(nl, n'l', p)$ publicados en la referencia 3.

APENDICE

En este apéndice obtendremos la forma explícita de los elementos de matriz reducidos de $\underline{\eta}$ y $\underline{\xi}$ definidos por (6.2).

Consideremos el elemento de matriz

$$<nlm\,|\,\eta_\mu\,|n'l'm'> \tag{A.1}$$

donde el índice $\mu = 1, 0, -1$ indica las componentes esféricas del vector $\underline{\eta}$. Expresando el ket $|n'l'm'>$ en términos de operadores, podemos escribir

$$\eta_\mu|n'l'm'> = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\mathcal{Y}_{1\mu}(\underline{\eta})\;A_{n'l'}\,\eta^{2n'}\,\mathcal{Y}_{l'm'}(\underline{\eta})\,|\,0> \tag{A.2}$$

donde $\mathcal{Y}_{lm}$ son armónicos esféricos sólidos del tipo (2.4) y A_{nl} es el coeficiente de normalización (2.5). Utilizando ahora la ley de descomposición de productos de armónicos esféricos, podemos escribir

$$\eta_\mu|n'l'm'> = A_{n'l'}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\eta^{2n'+l'+1}\sum_{lm} H(l'1l)<l'\,1m'\mu|lm>Y_{lm}(\alpha,\beta)\,|0>, \tag{A.3}$$

donde designamos por (η, α, β) las coordenadas esféricas del vector $\underline{\eta}$ y por $H(l'1l)$ a[1]

$$H(l'1l) = [\,3(2l'+1)/4\pi\,(2l+1)]^{\frac{1}{2}}<l'\,100|l0> \quad . \tag{A.4}$$

Reescribiendo la expresión (A.3) en términos de armónicos esféricos sólidos, y posteriormente utilizando (2.3) para expresarlos en términos de kets, tenemos que

$$\eta_\mu|n'l'm'> = A_{n'l'}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{l,m}\Big\{H(l'\,1l)\,A_{nl}^{-1}\;|nlm><l'\,1m'\mu\,|\,lm>$$
$$\cdot[\,\delta_{n'n}\delta_{l'+1\,l} + \delta_{n'+1\,n}\delta_{l'-1\,l}]\Big\} \tag{A.5}$$

Multiplicando finalmente por el bra $<nlm|$ y utilizando las formas explícitas de A_{nl} y $H(l'1l)$, obtenemos

$$<nlm|\eta_\mu| n'l'm'>$$

$$= [\sqrt{(l'+1)(2n'+2l'+3)}\,\delta_{n'n}\delta_{l'+1\,l} + \sqrt{l'(2n'+2)}\,\delta_{n'+1\,n}\,\delta_{l'-1\,l}]$$

$$\times\ (2l+1)^{-\frac{1}{2}} <l'\,1m'\mu|lm> \quad . \tag{A.6}$$

El elemento de matriz reducido de $\underline{\eta}$ puede entonces escribirse como

$$<nl||\underline{\eta}||n'l'>$$

$$= \sqrt{l(2n+2l+1)}\,\delta_{nn'}\,\delta_{l-1\,l'} + \sqrt{2n(l+1)}\,\delta_{n-1\,n'}\,\delta_{l+1\,l'} \tag{A.7}$$

Para obtener el elemento de matriz reducido de $\underline{\xi}$ aprovechamos la relación debida a Racah[8]

$$<nl||\underline{\eta}||n'l'> = (-1)^{l-l'} <n'l'||\underline{\eta}^+||nl>^* \tag{A.8}$$

donde + significa el transpuesto conjugado del operador y $*$ el conjugado del elemento de matriz. Como de (6.2) el transpuesto conjugado de $\underline{\eta}$ es el operador $\underline{\xi}$, tenemos que

$$<nl||\underline{\xi}||n'l'> = (-1)^{l-l'} <n'l'||\underline{\eta}||nl>^* \tag{A.9}$$

y como (A.7) es real, obtenemos finalmente

$$<nl||\underline{\xi}||n'l'> =$$

$$= -[\sqrt{(l+1)(2n+2l+3)}\,\delta_{nn'}\,\delta_{l+1,\,l'} + \sqrt{l(2n+2)}\,\delta_{n+1\,n'}\,\delta_{l-1,\,l'}] \tag{A.10}$$

REFERENCIAS

1 M. Moshinsky. Nuclear Physics, *13*, 104 (1959)

2 T.A. Brody, G. Jacob y M. Moshinsky, Nuclear Physics *17*, 16 (1960)

3 T.A. Brody y M. Moshinsky, Tablas de Paréntesis de Transformación (Monografías del Instituto de Física, Universidad de México, México, D.F., 1960)

4 V. Bargmann y M. Moshinsky, Nuclear Physics *18*, 697 (1960)

5 H. A. Jahn y J. Hope, Phys.Rev. *93*, 318 (1954)

6 E.P. Wigner, Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra (Academic Press, New York and London, 1959) p. 112

7 M. Moshinsky, Nuclear Physics *8*, 19 (1958)

8 G. Racah, Phys.Rev. *62*, 438 (1942)

9 E.U. Condon y G.H. Shortley, Theory of Atomic Spectra (Cambridge University Press, 1953) p. 76

10 A. Erdélyi et al. Higher Transcendental Functions (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. 2 pp. 188-191