EL GRADIENTE DEL CAMPO GRAVITACIONAL DE BIRKHOFF*

Carlos Graef Fernández
Instituto de Física de la Universidad Nacional de México

(Recibido: 15 diciembre 1960)

RESUMEN

El objeto de este artículo es introducir un concepto de gradiente del campo gravitacional en la teoría de Birkhoff que desempeñe en ésta un papel semejante al que tiene el gradiente en el campo gravitacional de Newton. Se exije ante todo que las ecuaciones del campo se puedan establecer fundándose en el flujo de este gradiente a través de una hipersuperficie cerrada en el espacio-tiempo.

El gradiente se define como un tensor de tres índices cuyas componentes se construyen por diferenciación con respecto a las coordenadas en el espacio-tiempo de las componentes del tensor potencial gravitacional. Calculamos explícitamente este gradiente para el caso del campo gravitacional de un punto-masa en movimiento arbitrario. Se muestra que si se fijan los dos índices provenientes del ten-

*Este es el primer artículo de una serie de tres que se titula Del Potencial de un Punto Masa a las Ecuaciones del Campo en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff.

sor potencial gravitacional y si se consideran las cuatro componentes generadas por diferenciación con respecto a las coordenadas, el gradiente se puede interpretar como un cuadrivector. Este cuadrivector está colocado en el plano bidimensional definido en el espacio-tiempo por el punto del campo y por el cuadrivector velocidad retardada de Minkowski del punto-masa generador del mismo.

Utilizando este gradiente se establece el cuadrivector aceleración de Minkowski de una partícula exploradora del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbitrario y se expresa en función de los otros cuadrivectores esenciales del problema. Se obtiene el resultado importante, que por medio de mediciones ejecutadas en las partículas exploradoras del campo-gravitacional de un punto-masa en movimiento, se pueden deducir la posición, la velocidad y la aceleración de éste. Esto significa que la perturbación gravitacional emitida por un punto-masa transmite información sobre su posición, velocidad y aceleración, a pesar de que el potencial gravitacional no depende de la aceleración.

El marco de referencia de la teoría de la gravitación de Birkhoff[1] es el mismo que el de la Relatividad Especial de Einstein: el espacio-tiempo de 4 dimensiones de Minkowski. Nosotros designaremos a las cuatro coordenadas de un acontecimiento en ese espacio-tiempo indistintamente con (t, x, y, z) o con (x^1, x^2, x^3, x^4). Aquí $t \equiv x^1$ es la coordenada temporal y $x \equiv x^2$, $y \equiv x^3$, $z \equiv x^4$ son las coordenadas cartesianas del espacio físico. Elegimos las unidades de manera que la velocidad de la luz en el vació sea igual a uno[2]. Con estas convenciones tenemos para el cuadrado del elemento de arco de Minkowski[3]:

$$ds^2 = \Delta_{ij}\, dx^i\, dx^j = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ . \qquad (1)$$

Se está utilizando aquí la convención de Einstein de sumar con respecto a índices repetidos y Δ_{ij} es el tensor métrico fundamental de la Relatividad Especial. En el sistema de coordenadas utilizado aquí

$$\Delta_{11} = 1; \quad \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1;$$

$$\Delta_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \ .$$

Utilizaremos además el tensor doblemente contravariante Δ^{ij} asociado al métrico fundamental. En el sistema de coordenadas utilizado, las componentes de este último tensor son aritméticamente iguales a las correspondientes del métrico fundamental, lo que se expresa por la ecuación no tensorial $\Delta^{ij} = \Delta_{ij}$.

Las magnitudes físicas de las que trata este artículo son escalares, cuadrivectores y tensores en el espacio-tiempo de Minkowski. Los cuadrivectores los designaremos por medio de una letra con acento circunflejo, p.e. $\hat{v}$. Todo cuadrivector tiene cuatro componentes covariantes y cuatro componentes contravariantes y puede describirse por uno cualquiera de esos dos juegos de números. Adoptamos la convención usual de usar índices inferiores para las componentes covariantes e índices superiores para las componentes contravariantes. Entre las componentes covariantes y contravariantes de un cuadrivector existen las relaciones:

$$v^i = \Delta^{ij} v_j \, ; \quad v_i = \Delta_{ij} v^j \, .$$

Existe un escalar asociado a dos cuadrivectores $\hat{v}$ y $\hat{w}$ que es su producto escalar y que designamos como sigue:

$$\hat{v} \cdot \hat{w} = \Delta_{ij} v^i w^j = \Delta^{ij} v_i w_j = v^i w_i = v_i w^i \, .$$

El cuadrado de un cuadrivector es el producto escalar de ese cuadrivector por si mismo:

$$\hat{v}^2 = \hat{v} \cdot \hat{v} \, .$$

Consideramos una partícula exploradora del campo gravitacional. Un acontecimiento de la línea de universo de la partícula exploradora se caracterizará por (x^1, x^2, x^3, x^4). El cuadrivector velocidad de Minkowski $\hat{v}$ de la partícula exploradora se define como sigue:

$$v^i = \frac{dx^i}{ds} \, .$$

El cuadrado del cuadrivector velocidad es igual a uno:

$$\hat{v}^2 = \Delta_{ij} v^i v^i = 1 \quad .$$

El cuadrivector acelaración de Minkowski $\hat{a}$ de la partícula exploradora se define como:

$$a^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{dv^i}{ds} \quad .$$

El producto escalar $(\hat{a} \cdot \hat{v})$ es igual a cero, lo que se interpreta como expresión de la perpendicularidad de los cuadrivectores aceleración de Minkowski y velocidad de Minkowski.

El campo gravitacional de Birkhoff se caracteriza por un potencial[4] que es un tensor simétrico doblemente covariante b_{ij}. Nosotros introducimos un tensor de tres índices triplemente covariante que llamamos "gradiente del campo gravitacional" y que definimos como sigue:

$$\nabla_i b_{jk} = \frac{\partial b_{jk}}{\partial x^i} \tag{2}$$

Esta definición se establece en el sistema de coordenadas utilizado aquí, en el que las derivadas parciales con respecto a las coordenadas de las componentes de un tensor constituyen otro tensor. En un sistema general de coordenadas la definición de gradiente es:

$$\nabla_i b_{jk} = b_{jk,i} \quad .$$

Aquí la coma seguida del índice i denota derivación covariante con respecto a la coordenada x^i. En el sistema de coordenadas utilizado aquí la derivada covariante es idéntica a la derivada parcial y ambas definiciones del gradiente coinciden.

Utilizando este concepto de gradiente del campo gravitacional, el cuadrivector aceleración de Minkowski de una partícula exploradora de ese campo[5] puede expresarse como:

$$a_i = (\nabla_j b_{ki} - \nabla_i b_{jk})\, v^j v^k \tag{3}$$

A pesar de que el gradiente del campo gravitacional es un tensor de tres índices, se puede interpretar como un cuadrivector haciendo las siguientes convenciones:

1) se fijan los dos índices que provienen del tensor potencial,
2) se consideran las cuatro componentes que se generan, al variar de uno a cuatro, el índice que proviene de derivar con respecto a una coordenada. Pensando en esta interpretación escribiremos también $\hat{grad}\, b_{jk}$ para $\nabla_i b_{jk}$.

En seguida procederemos a calcular el gradiente del potencial del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbitrario y el cuadrivector aceleración de una partícula exploradora de ese campo. Empezamos postulando el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en reposo en un marco de referencia inercial[6]. Postulamos que este tensor tiene todos los elementos de la diagonal principal de su matriz iguales al potencial Newtoniano y todos sus otros elementos iguales a cero. Esta es la generalización más simple que se puede hacer de un potencial escalar, como lo es el Newtoniano, a un potencial constituido por un tensor simétrico de dos índices.

Designaremos con letras minúsculas las coordenadas de un acontecimiento cualquiera del campo; usando ya sea (t,x,y,z) o bién (x^1, x^2, x^3, x^4). Utilizaremos letras mayúsculas para las coordenadas de un punto de la línea de universo del punto-masa, ya sea (T, X, Y, Z) o bien (X^1, X^2, X^3, X^4). A la distancia en el espacio físico entre un acontecimiento $A(t,x,y,z)$ del campo y un acontecimiento $P(T,X,Y,Z)$ de la línea de universo del punto-masa, la designaremos con r; por lo tanto:

$$r = \left| \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2} \right| =$$

$$= \left| \sqrt{(x^2 - X^2)^2 + (x^3 - X^3)^2 + (x^4 - X^4)^2} \right|$$

Sea M la masa en reposo del punto-masa generador del campo. Si usamos la unidad de masa de manera que la constante de la gravitación universal sea igual a uno[7], obtenemos para el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en reposo en un marco de referencia inercial[8]

$$b_{jk} = \frac{M}{r} \delta_{jk} \tag{4}$$

Pasaremos ahora a calcular el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en movimiento uniforme. Para este caso de un punto-masa en movimiento es necesario introducir magnitudes retardadas con respecto al acontecimiento A del campo. Sea L la línea de universo del punto-masa M (Fig. 1). Con objeto de evitar repeticiones consideramos de una vez aquí el caso general de una línea de universo curva que corresponde a un movimiento arbitrario del punto-masa. Con el acontecimiento A como vértice constrúyase un cono de luz del pasado. El acontecimiento en que este cono corta a la línea de universo L del punto-masa, lo designamos con P. Toda señal física que salga de P con la velocidad de la luz pasará por el acontecimiento A. El acontecimiento P es la posición retardada del punto-masa con respecto al acontecimiento A del campo. Entre las coordenadas de los acontecimientos A y P existe la relación:

$$\Delta_{jk} (x^j - X^j) (x^k - X^k) = 0 \tag{5}$$

Al cuadrivector que liga P con A lo designamos con $\hat{r}$. Las cuatro componentes contravariantes de $\hat{r}$ son:

$$r^i = x^i - X^i$$

La ecuación (5) se puede expresar también en la forma:

$$\hat{r}^2 = \hat{r} \cdot \hat{r} = r^k r_k = 0 \tag{6}$$

En la línea de universo L del punto-masa elegimos un acontecimiento N como origen de los arcos. A la longitud del arco Minkowskiano NP lo designare-

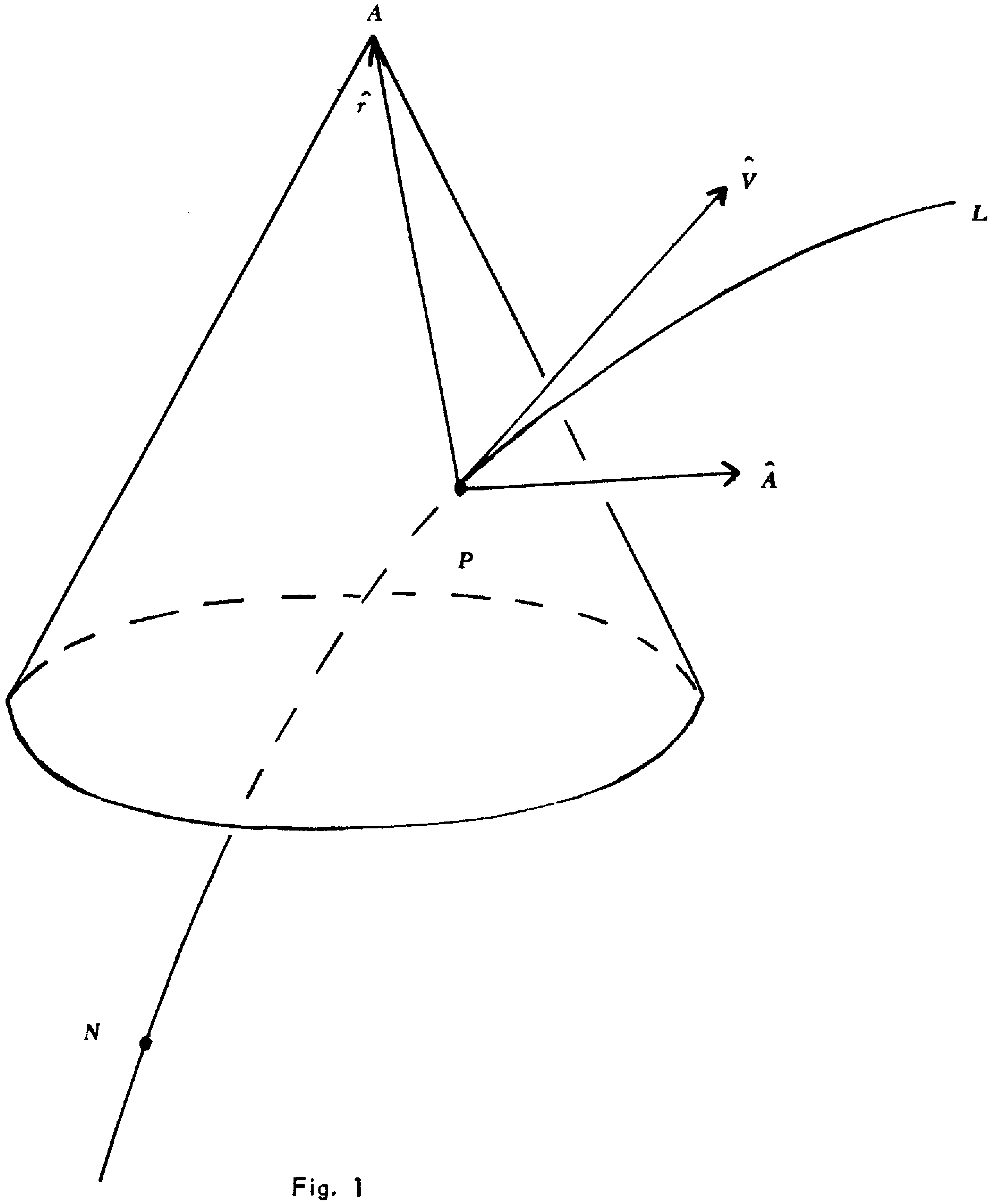

Fig. 1

mos con S. Dada la línea de universo L del punto-masa generador del campo con su origen de arcos N, la longitud de arco S es una función de las coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) del punto del campo A; ya que dada A queda determinado P y por lo tanto S.

Al cuadrivector velocidad de Minkowski del punto-masa en el acontecimiento P lo designamos con $\hat{V}$. Este cuadrivector es una magnitud retardada con respecto al acontecimiento A del campo. Las componentes contravariantes de $\hat{V}$ están dadas por

$$V^i = \frac{dX^i}{dS} \quad . \tag{7}$$

El cuadrado del cuadrivector $\hat{V}$ es igual a 1:

$$\hat{V}^2 = \Delta_{jk} V^j V^k = \frac{\Delta_{jk} dX^j dX^k}{dS^2} = 1 \quad . \tag{8}$$

El cuadrivector aceleración de Minkowski $\hat{A}$ del punto-masa en su posición retardada en P, se define como sigue:

$$\hat{A} = \frac{d\hat{V}}{dS} \quad . \tag{9}$$

Las componentes contravariantes de $\hat{A}$ están dadas por:

$$A^i = \frac{d^2X^i}{dS^2} = \frac{dV^i}{dS} \quad .$$

Se obtiene inmediatamente la relación

$$\hat{A} \cdot \hat{V} = 0 \quad . \tag{10}$$

Consideramos ahora un punto-masa en movimiento uniforme. En este caso el cuadrivector velocidad $\hat{V}$ es constante. Por medio de una simple transformación de Lorentz podemos pasar a un marco de referencia en el que ese punto-masa está en reposo y en el que su tensor potencial gravitacional está dado por (4). Si a las magnitudes que intervienen en el segundo miembro de la ecuación (4) se les aplica la transformación de Lorentz inversa de la que reduce al reposo a un punto-masa que se mueve con un cuadrivector velocidad $\hat{V}$, se obtiene:

$$\delta_{jk} \rightarrow [2V_j V_k - \Delta_{jk}];$$
$$r \rightarrow \hat{r} \cdot \hat{V} \quad .$$

De donde se deduce inmediatamente que el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en movimiento uniforme[9] es:

$$b_{jk} = \frac{M\,[2\,V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} \tag{11}$$

El numerador de b_{jk} depende exclusivamente de la masa y de las componentes del cuadrivector velocidad retardada del punto-masa generador del campo. Este numerador representa una generalización de la simple masa que aparece en el potencial Newtoniano. El denominador de b_{jk} es la proyección sobre el cuadrivector velocidad retardada del punto-masa, del cuadrivector que liga a éste en su posición retardada con el acontecimiento del campo. Este denominador $\hat{r} \cdot \hat{V}$ desempeña en la teoría de Birkhoff el papel que tiene en la teoría de Newton la distancia r.

En la teoría de los potenciales retardados se establece el hecho de que toda función del tipo

$$\frac{F}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} \quad ,$$

en la que F es una función exclusivamente de magnitudes retardas, – en nuestro caso de S – satisface la ecuación de D'Alembert:

$$\Box \quad \frac{F(S)}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} = 0 \quad .$$

Se deduce de esto inmediatamente que el potencial (11) satisface la ecuación de D'Alembert. Si postulamos la expresión (11) como el potencial de un punto-masa en movimiento arbitrario, tendremos una expresión que se reduce al tensor potencial (4) cuando la velocidad en el espacio físico es igual a cero. Además, debido al hecho de que el tensor potencial dado por (11) satisface la ecuación de D'Alembert, se tendría una propagación con la velocidad de la luz, de las perturbaciones gravitacionales causadas por un punto-masa en movimiento arbitrario. En vista de estas razones postulamos a (11) como el tensor potencial gravitacional de un punto-masa en movimiento arbitrario[10]. Esto significa que consideramos que las perturbaciones gravitacionales producidas por un punto-masa en movimiento arbitrario no depende de la aceleración que tenga ese punto-masa en el instante de producirlas, y sólo dependen de la posición y velocidad que tiene en ese instante.
Para calcular el gradiente del campo gravitacional (11) conviene obtener previamente los gradientes de S y de $\hat{r} \cdot \hat{V}$. Como ya se señaló S es una función de (x^1, x^2, x^3, x^4). Para obtener el gradiente de S partimos de la ecuación (5) que escribimos en la forma:

$$(x^1 - X^1)^2 - (x^2 - X^2)^2 - (x^3 - X^3)^2 - (x^4 - X^4)^2 = 0.$$

Derivando esta relación sucesivamente con respecto a x^1, x^2, x^3, x^4 y teniendo en cuenta (7), se tiene

$$gr\hat{a}d\, S = \frac{\hat{r}}{\hat{r} \cdot \hat{V}} \tag{12}$$

Para calcular el gradiente de $(\hat{r} \cdot \hat{V})$ escribimos a este producto escalar en la forma

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = (x^1 - X^1)\, V_1 - (x^2 - X^2)\, V_2 - (x^3 - X^3)\, V_3 - (x^4 - X^4)\, V_4. \tag{13}$$

En esta expresión son X^1, X^2, X^3, X^4 y V_1, V_2, V_3, V_4 funciones exclusivamente de S, y dependen de las coordenadas x^1, x^2, x^3, x^4 del punto del campo a través de esa función intermediaria S. Derivando (13) con respecto a x^i se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\hat{r}\cdot\hat{V}) = (\hat{r}\cdot\hat{A})\,\frac{\partial S}{\partial x^i} - (\hat{V}\cdot\hat{V})\,\frac{\partial S}{\partial x^i} + V_i\,.$$

En vista de (8) y de (12) este resultado se puede expresar como sigue:

$$gr\hat{a}d(\hat{r}\cdot\hat{V}) = (\hat{r}\cdot\hat{A} - 1)\,\frac{\hat{r}}{(\hat{r}\cdot\hat{V})} + \hat{V}. \tag{14}$$

El gradiente de b_{jk} de la fórmula (11) se obtiene inmediatamente utilizando (12) y (14):

$$gr\hat{a}d\; b_{jk} = \left[\frac{2M[V_j A_k + A_j V_k]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2} - \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\,(\hat{r}\cdot\hat{A} - 1)\right]\hat{r} -$$

$$- \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2}\,\hat{V}\,.$$

En la Fig. 1. se ve que el plano que pasa por el punto del campo A y que contiene al cuadrivector $\hat{V}$ contiene también a PA que es cuadrivector $\hat{r}$. Si se interpreta al gradiente de la fórmula (15) como un cuadrivector, según se expuso más arriba, se puede decir que: el cuadrivector gradiente del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbitrario, está contenido en el plano bidimensional que pasa por el punto del campo y que contiene al cuadrivector velocidad retardada de Minkowski del punto-masa generador del mismo.

Para obtener el cuadrivector aceleración de Minkowski de una partícula exploradora del campo gravitacional (11) necesitamos el gradiente de ese campo en una forma tensorialmente ortodoxa:

$$\nabla_i b_{jk} = \left[\frac{2M[V_j A_k + A_j V_k]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2} - \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3} (\hat{r}\cdot\hat{A} - 1) \right] r_i - \tag{16}$$

$$- \frac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2} V_i \,.$$

Ese cuadrivector aceleración $\hat{a}$ se obtiene sustituyendo (16) en (3), y resulta igual a una suma de cuatro cuadrivectores:

$$\hat{a} = \hat{a}(1) + \hat{a}(2) + \hat{a}(3) + \hat{a}(4)\,. \tag{17}$$

Esos cuatro sumandos son proporcionales a los cuatro cuadrivectores fundamentales del problema:

1) el cuadrivector $\hat{a}(1)$ es proporcional al cuadrivector $\hat{r}$ que liga al punto-masa en su posición retardada con la partícula exploradora;
2) el cuadrivector $\hat{a}(2)$ es proporcional al cuadrivector $\hat{v}$ velocidad de Minkowski de la partícula exploradora;
3) el cuadrivector $\hat{a}(3)$ es proporcional al cuadrivector $\hat{V}$ velocidad de Minkowski retardado del punto-masa;
4) el cuadrivector $\hat{a}(4)$ es proporcional al cuadrivector $\hat{A}$ aceleración de Minkowski retardada del punto masa

El cuadrivector aceleración de Minkowski de una partícula exploradora del campo gravitacional generado por un punto-masa en movimiento arbritario, es la suma de los cuatro cuadrivectores de la fórmula (17), que en forma explícita son:

$$\hat{a}(1) = \frac{M\,\hat{r}}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\left[1 - (\hat{r}\cdot\hat{A}) - 2(\hat{v}\cdot\hat{V})^2 - 4(\hat{r}\cdot\hat{V})(\hat{v}\cdot\hat{V})(\hat{v}\cdot\hat{A}) + 2(\hat{r}\cdot\hat{A})(\hat{v}\cdot\hat{V})^2\right]; \tag{18}$$

$$\hat{a}(2) = \frac{M\,\hat{v}}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\left[-(\hat{r}\cdot\hat{v}) + (\hat{r}\cdot\hat{v})(\hat{r}\cdot\hat{A}) + (\hat{r}\cdot\hat{V})(\hat{v}\cdot\hat{V})\right]; \tag{19}$$

$$\hat{a}(3) = \frac{M\,\hat{V}}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\left[-(\hat{r}\cdot\hat{V}) + 2(\hat{r}\cdot\hat{v})(\hat{v}\cdot\hat{V}) + 2(\hat{r}\cdot\hat{v})(\hat{r}\cdot\hat{V})(\hat{v}\cdot\hat{A}) - 2(\hat{r}\cdot\hat{v})(\hat{r}\cdot\hat{A})(\hat{v}\cdot\hat{V})\right]; \tag{20}$$

$$\hat{a}(4) = \frac{M\,\hat{A}}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\left[2(\hat{r}\cdot\hat{v})(\hat{r}\cdot\hat{V})(\hat{v}\cdot\hat{V})\right]. \tag{21}$$

Las fórmulas (18), (19), (20) y (21) están expresadas en forma invariante, independiente del marco de referencia. De ellas se deduce este resultado notable: la aceleración de una partícula exploradora del campo gravitacional de un punto-masa en movimiento arbitrario depende de la aceleración de ese punto-masa. Haciendo entonces mediciones físicas del movimiento de las partículas exploradoras del campo de un punto-masa, se puede deducir–es decir, medir indirectamente–la aceleración de éste. Esto significa que la señal gravitacional emitida por el punto-masa transmite información sobre su posición, su velocidad y su aceleración. Esto acaece a pesar de que el potencial no depende de la aceleración del punto-masa.

REFERENCIAS

1 G.D. Birkhoff, Proc. Nat. Acad. Sciences 29, 231 (1943)

2 C. Graef-Fernández, La teoría de la gravitación de Birkhoff, Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Montevideo, Uruguay, 1951, p. 123.

3 G.D. Birkhoff, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1, 10 (1944)

4 G.D. Birkhoff, Proc. Nat. Acad. Sciences 30, 330, (1944)

5 Referencia 3 p. 15.

6 Referencia 4 p. 325.

7 C. Graef-Fernández, Orbits in Birkhoff's central field, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. IX, EE.UU., 1959, p. 169.

8 A. Barajas, Proc. Nat. Acad. Sciences 30, 55, (1944)

9 P. Kustáanheimo, Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae, 17, No. 11 (1955)

10 C. Graef-Fernández, Rev. Mex. Fis. 1, 23 (1952)