EL HIPERANGULOSOLIDO EN LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL*

Carlos Graef Fernández
Instituto de Física, Universidad Nacional de México
(Recibido: 15 Mayo 1962)

RESUMEN

En este artículo se presenta el biperángulo sólido que es una generalización del concepto de ángulo sólido del espacio de tres dimensiones al espacio-tiempo cuadridimensional de Minkowski. El elemento diferencial de biperángulo sólido se introduce considerando un punto masa en movimiento en un marco de referencia inercial. Este punto masa emite continuamente un baz elemental de fotones que se mantiene paralelo a sí mismo durante el movimiento. En el marco de referencia inercial en que el punto masa está instantáneamente en reposo, el elemento diferencial de biperángulo sólido se define como el producto del elemento de ángulo sólido tridimensional dentro del cual se emite el baz de fotones, multiplicado por la diferencial del tiempo. Se establecen expresiones invariantes en las transfor-

*Este es el segundo artículo de una serie de tres que se titula Del Potencial de un Punto Masa a las Ecuaciones del Campo en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff.

maciones de Lorentz para el elemento de biperángulo sólido en cualquier marco de referencia inercial. Se introduce, en el espacio físico, una superficie material bidimensional, convexa, deformable y móvil, que encierra al punto masa durante su movimiento. Traduciendo al espacio-tiempo de Minkowski el objeto geometrico definido por el haz elemental de fotones limitado por esa superficie material, y emitido en un intervalo diferencial del tiempo, se obtiene el concepto de la bipercuña. El bipervolumen cuadrimensional de esta bipercuña tiene una relación muy intima con el elemento de biperángulo sólido. Se calculan además dos cuadrivectores que son elementos de volümen tridimensional de caras de la bipercuña.

El hiperángulo sólido es una generalización del concepto de ángulo sólido del espacio físico de tres dimensiones al espacio-tiempo de Minkowski de cuatro dimensiones de la teoría de la Relatividad Especial. Empezaremos con la definición de elemento diferencial de hiperángulo sólido. Para que ese elemento tenga validez en la Relatividad Especial debe definirse de manera que sea invariante en las transformaciones de Lorentz.

Consideramos un observador inercial que describe los acontecimientos. A este observador nos referimos como al "observador original", y a su marco de referencia como al "marco de referencia original". Imaginamos un punto masa que está en movimiento en el marco de referencia original. El elemento diferencial de hiperángulo sólido estará asociado a ese punto masa. Suponemos que el punto masa está en el instante T en el punto π de coordenadas (X, Y, Z) y que se mueve allí con el vector velocidad $\overline{V}$ cuyas componentes son V^x, V^y, V^z y cuya magnitud es V. Caracterizamos al elemento diferencial de ángulo sólido por medio de un haz de fotones que imaginamos que surgen del punto masa continuamente. En este artículo llamamos "fotón" a un punto que se mueve con la velocidad de la luz c. Consideramos primero los cuatro fotones que emite el punto masa cuando está en el punto π en el instante T en las direcciones definidas por los vectores: $\overline{r}$, $\overline{r}+d\overline{r}$, $\overline{r}+\delta\overline{r}$ y $\overline{r}+d\overline{r}+\delta\overline{r}$; siendo $d\overline{r}$ y $\delta\overline{r}$ diferenciales del vector $\overline{r}$. Elegimos a $d\overline{r}$ y a $\delta\overline{r}$ de manera que los tres vectores: $\overline{r}$, $d\overline{r}$ y $\delta\overline{r}$ no sean coplanos; cosa que siempre es posible. Los cuatro planos definidos por las parejas de vectores $(\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r})$; $(\bar{r} + d\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r})$; $(\bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}, \bar{r} + \delta\bar{r})$ y $(\bar{r} + \delta\bar{r}, \bar{r})$ limitan un elemento de ángulo sólido con vértice en π, que designamos con $d\Omega$. Imaginamos que el punto masa al estar en π, emite en el instante T un gran número de fotones en direcciones comprendidas dentro del elemento de ángulo sólido $d\Omega$. Este haz de fotones caracteriza en forma material al elemento (Fig. 1).

Si las trayectorias de dos fotones son dos rectas paralelas en el sistema de coordenadas x, y, z de un marco de referencia inercial, sus líneas de universo también serán dos rectas paralelas en el espacio-tiempo de Minkowski. Esas dos líneas de universo serán dos generatrices paralelas de dos conos de luz. Como el paralelismo en el espacio-tiempo de Minkowski es invariante en las transformaciones de Lorentz, dos fotones que tengan trayectorias paralelas en el espacio físico para un observador inercial, tendrán trayectorias paralelas en el espacio físico de cualquier otro observador inercial. Suponemos que el punto masa emite en cada punto de su trayectoria, y no sólo en el punto π, cuatro fotones en las direcciones caracterizadas, en el marco de referencia original, por los cuatro vectores: $\bar{r}$, $\bar{r} + d\bar{r}$, $\bar{r} + \delta\bar{r}$, $\bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}$. Las trayectorias de los cuatro fotones emitidos en el instante T son paralelas a las trayectorias correspondientes de los cuatro fotones emitidos en cualquier otro instante; esta afirmación es válida en cualquier sistema de referencia inercial. Se puede entonces imaginar que el punto masa arrastra en su movimiento a cuatro segmentos de trayectorias de fotones, que son los vectores $\bar{r}$, $\bar{r} + d\bar{r}$, $\bar{r} + \delta\bar{r}$, $\bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}$, que se mueven paralelamente a si mismos. En todo instante salen del punto masa cuatro fotones que se mueven a lo largo de los cuatro vectores anclados en el punto en que ocurre la emisión. En cada instante definen los cuatro vectores un elemento de ángulo sólido $d\Omega$. Imaginamos que el punto masa emite en cada instante un haz de fotones en direcciones comprendidas dentro de ese elemento de ángulo sólido. Para definir el elemento de hiperángulo sólido consideramos entonces un punto masa en movimiento que emite un haz elemental de fotones que se conserva paralelo a si mismo durante el movimiento.

El elemento de ángulo sólido $d\Omega$ está íntimamente relacionado con el elemento de volumen $d\upsilon$ de la pirámide que tiene por aristas los cuatro vectores $\bar{r}$, $\bar{r}$, $\bar{r} + d\bar{r}$, $\bar{r} + \delta\bar{r}$ y $\bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r}$. La expresión de ese elemento de volumen, en función del elemento de ángulo sólido, es:

$$d'\upsilon = \frac{1}{3} r^3 \, d\Omega \quad .$$

Ese mismo elemento de volumen es igual a la tercera parte del triple producto escalar de los tres vectores $\bar{r}$, $\bar{r} + d\bar{r}$, $\bar{r} + \delta\bar{r}$.

$$d\upsilon = \frac{1}{3} (\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r}, \bar{r} + \delta\bar{r}) \quad .$$

Igualando las dos expresiones para el elemento de volumen y simplificando la expresión del triple prodúcto escalar, se obtiene para el elemento de ángulo sólido

$$d\Omega = \frac{(\bar{r}, d\bar{r}, \delta\bar{r})}{r^3} \quad .$$

Introducimos ahora un nuevo marco de referencia inercial. El sistema de coordenadas x_0, y_0, z_0 de ese marco de referencia se mueve con un vector velocidad constante $\bar{V}$ con respecto al sistema de coordenadas del marco de referencia original.

Llamemos acontecimiento P al paso del punto masa por el punto π en el instante T en el marco de referencia original. Sabemos que el vector velocidad con el que se mueve el punto masa en ese acontecimiento P es $\bar{V}$, que es el mismo con el cual se mueve el sistema de coordenadas del nuevo marco de referencia inercial con relación al marco de referencia original. En el nuevo marco de referencia inercial el punto masa está instantáneamente en reposo en el acontecimiento P. Llamamos a este nuevo marco de referencia "marco en reposo". Para cada acontecimiento de la línea de universo del punto masa hay un marco en reposo. Para comodidad de cálculo suponemos que el origen del sistema de coordenadas del marco en reposo se encuentra en el punto π en el instante T, según el observador original; y suponemos también que, según el observador original, los ejes de coordenadas del marco en reposo se mueven de manera que sean siempre paralelos a los ejes correspondientes del marco de referencia original.

Examinaremos con detalle, en el marco de referencia original, al vector $\bar{r}$, considerándolo como segmento de la trayectoria de un fotón. El origen del vector $\bar{r}$ es el punto π, lugar en que el punto masa emitió a ese fotón al pasar por allí en el instante T.

Usamos un sistema de unidades en el que la velocidad de la luz en el vacío es igual a uno. Si llamamos r a la longitud del vector $\bar{r}$ entonces el fotón que sale de π en el instante T, en la dirección del vector $\bar{r}$, llega al extremo de este vector en el instante $T + r$. El vector $\bar{r}$ separa en el espacio físico del marco de referencia original a dos acontecimientos caracterizados por la emisión de un fotón en π en el instante T, y por la llegada de ese fotón al extremo del vector $\bar{r}$ en el instante $T + r$.

Consideremos ahora esos mismos dos acontecimientos en el marco en reposo. Llamemos $\bar{r}_o$ al vector que los separa en el espacio físico de ese marco. Los vectores $\bar{r}$ y $\bar{r}_o$ están ligados por la siguiente ecuación[1]

$$\bar{r}_o = \bar{r} - \frac{r}{\sqrt{1 - V^2}}\,\bar{V} + \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2\sqrt{1 - V^2}}\,(\bar{r}\cdot\bar{V})\,\bar{V}\ . \qquad (2)$$

Calculemos ahora las diferenciales de $\bar{r}_o$. Hay que tener en cuenta que tanto $d\bar{r}_o$ como $\delta\bar{r}_o$ se refieren al acontecimiento P, lo que significa que $\bar{V}$ no varía en este proceso. Escribimos a continuación los tres vectores $\bar{r}_o$, $d\bar{r}_o$ y $\delta\bar{r}_o$ exhibiendo su componente a lo largo del vector velocidad $\bar{V}$:

$$\bar{r}_o = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2\sqrt{1 - V^2}}\,(\bar{r}\cdot\bar{V}) - \frac{r}{\sqrt{1 - V^2}}\right]\bar{V} + \bar{r}\,;$$

$$d\bar{r} = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2\sqrt{1 - V^2}}\,(\bar{V}\cdot d\bar{r}) - \frac{\bar{r}\cdot d\bar{r}}{r\sqrt{1 - V^2}}\right]\bar{V} + d\bar{r}\,;$$

$$\delta\bar{r}_o = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2\sqrt{1 - V^2}}\,(\bar{V}\cdot\delta\bar{r}) - \frac{\bar{r}\cdot\delta\bar{r}}{r\sqrt{1 - V^2}}\right]\bar{V} + \delta\bar{r}\ .$$

Con objeto de obtener el elemento de ángulo sólido en el marco en reposo según la fórmula (1), es necesario calcular el triple producto escalar $(\bar{r}_o, d\bar{r}_o, \delta\bar{r}_o)$. Simplificando la expresión se obtiene:

$$(\bar{r}_o, d\bar{r}_o, \delta\bar{r}_o) = \frac{r - \bar{r}\cdot\bar{V}}{r\sqrt{1-V^2}}(\bar{r}, d\bar{r}, \delta\bar{r}).$$

Introduciendo el elemento de ángulo sólido $d\Omega_o$ en el marco en reposo, y el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ en el marco de referencia original, se obtiene de acuerdo con la fórmula (1):

$$r_o^3\, d\Omega_o = \frac{r^2(r - \bar{r}\cdot\bar{V})}{\sqrt{1-V^2}}\, d\Omega \quad . \tag{3}$$

Con el objeto de expresar $d\Omega_o$ exclusivamente en términos de magnitudes referidas al marco de referencia original, calculamos r_o^3 de la ecuación (2):

$$r_o^3 = \frac{[r - \bar{r}\cdot\bar{V}]^3}{(1-V^2)^{3/2}} \quad .$$

Con ayuda de este valor obtenemos de la ecuación (3):

$$d\Omega_o = \frac{r^2(1-V^2)}{(r - \bar{r}\cdot\bar{V})^2}\, d\Omega \ . \tag{4}$$

Calculando el segundo miembro de la fórmula (4) en cualquier marco de referencia inercial se obtendrá siempre el mismo valor para $d\Omega_o$, ya que éste está referido al marco en reposo del punto masa. El segundo miembro de la ecuación (4) es un invariante en las transformaciones de Lorentz que se reduce al elemento de ángulo sólido en el marco en reposo del punto masa. Como el vector $\bar{r}$ sólo caracteriza la dirección que tiene el elemento de ángulo sólido $d\Omega$, es natural que ese invariante no depende de la magnitud de $\bar{r}$, y sólo dependa de su dirección. En efecto, en la ecuación (4), el segundo miembro es independientede la magnitud de r.

Para establecer el elemento de hiperángulo sólido partimos del invariante (4), expresándolo en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones de Minkowski que es el marco de referencia natural para la teoría de la Relatividad Especial. En este espacio-tiempo (T, X, Y, Z) son las cuatro coordenadas del acontecimiento P que corresponde al paso del punto masa, en el instante T, por el punto $\pi(X,Y,Z)$. A las coordenadas del acontecimiento P las designaremos indistintamente con (T, X,Y,Z) o con (X^1,X^2,X^3,X^4). Usaremos literales mayúsculas para designar. acontecimientos de la línea de universo del punto masa; también usaremos mayúsculas para designar la velocidad y la aceleración del punto masa y las componentes de las mismas. Las coordenadas de otros acontecimientos las designaremos con literales minúsculas, v.g. (t,x,y,z) o (x^1,x^2,x^3,x^4). El cuadrado del elemento de arco en el espacio de Minkowski está dado por[2]

$$ds^2 = \Delta ij\, dx^i\, dx^j = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad .$$

Llamaremos L a la línea de universo del punto masa. Elegimos en esa línea a un acontecimiento fijo para origen de los arcos. Sea S la longitud del arco medido a lo largo de L, desde el acontecimiento fijo hasta el acontecimiento P. Las coordenadas de P son entonces funciones de S:

$$T = T(S) = X^1(S);\ X = X(S) = X^2(S);$$
$$Y = Y(S) = X^3(S);\ Z = Z(S) = X^4(S).$$

Al cuadrivector velocidad de Minkowski del punto masa lo designaremos[2] con $\hat{V}$. Sus componentes contravariantes son

$$V^i = \frac{dX^i}{dS} \quad .$$

En este artículo todos los índices tensoriales varían de 1 a 4. Del cuadrado del elemento de arco se obtiene inmediatamente la relación

$$dS = \sqrt{1 - V^2}\, dT ,$$

con cuya ayuda se calculan las componentes contravariantes del cuadrivector velocidad:

$$V^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad ; \quad V^2 = \frac{V^x}{\sqrt{1 - V^2}} \quad ;$$

$$V^3 = \frac{V^y}{\sqrt{1 - V^2}} \quad ; \quad V^4 = \frac{V^z}{\sqrt{1 - V^2}} \quad .$$

En estas fórmulas, el número 2 es un exponente cuando aparece a la derecha y arriba del símbolo "V" dentro de la raíz cuadrada; fuera de la raíz cuadrada, y en esa misma posición, el número 2 es un índice tensorial.

Consideremos ahora el cuadrivector $\hat{r}$ cuyo origen es el acontecimiento P en el que un fotón parte del punto π en el instante T, y cuyo extremo es el acontecimiento A en el que ese fotón llega al extremo del vector $\bar{r}$. Si llamamos (ξ, η, ζ) a las componentes del vector $\bar{r}$, entonces la magnitud de ese vector será:

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

y las componentes del cuadrivector $\bar{r}$ son

$$\hat{r}\ (r, \xi, \eta, \zeta) \quad .$$

Para el producto escalar de los cuadrivectores $\hat{r}$ y $\hat{V}$ obtenemos:

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = \Delta_{ij} r^i V^j = \frac{r - \xi V^x - \eta V^y - \zeta V^z}{\sqrt{1 - V^2}} \quad .$$

Este producto escalar puede expresarse como:

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = \frac{r - \bar{r} \cdot \bar{V}}{\sqrt{1 - V^2}} \quad .$$

Con ayuda de esta última fórmula se obtiene para el invariante (4):

$$d\Omega_o = \frac{r^2\, d\Omega}{(\hat{r}\,.\,\hat{V})^2} \quad . \tag{5}$$

Para definir al elemento de hiperángulo sólido es necesario considerar, además del acontecimiento $P\,(T,X,Y,Z)$, al acontecimiento Q de la línea de universo L del punto masa, correspondiente a la longitud de arco $S+dS$. En la línea de universo L están situados entonces los acontecimientos P y Q; el acontecimiento P corresponde al arco S y el acontecimiento Q al arco $S+dS$. El elemento de arco PQ es un intervalo temporaloide, ya que es una porción de la línea de universo del punto masa. En consecuencia dS es real. Dados dos acontecimientos de la línea de universo del punto masa, siempre se puede designar a uno con la letra P y al otro con Q, de manera que $PQ = dS$ sea, además de real, positiva. Definimos al elemento de hiperángulo sólido como al escalar

$$dH = \frac{r^2\, d\Omega}{(\hat{r}\,.\,\hat{V})^2}\; dS \; . \tag{6}$$

El elemento de hiperángulo sólido está entonces asociado a un elemento de arco dS de la línea de universo de un punto masa. En cada acontecimiento emite ese punto masa un haz elemental de fotones, dentro de un elemento de ángulo sólido $d\Omega$, y en la dirección del cuadrivector $\hat{r}$. *El elemento de hiperángulo sólido* dH definido en (6) es invariante en las transformaciones de Lorentz, ya que son invariantes sus dos factores, el (5) y la dS. En el marco de referencia en reposo se tiene

$$dH = d\Omega_o\, dT_o \; ,$$

ya que en este marco la dS es igual al intervalo de tiempo dT_o. En el sistema en *reposo del punto masa, el elemento de hiperángulo sólido se reduce entonces al producto* del elemento de ángulo sólido por el intervalo de tiempo.

En seguida demostraremos que existe una fórmula análoga a la (1) que liga al elemento de hiperángulo sólido (6) con un hipervolumen. En la fórmula (1) el numerador es el triple de volumen de una pirámide elemental y el denominador es el cubo de la arista de esa pirámide. Para obtener en el espacio-tiempo el objeto geométrico análogo a dicha pirámide, imaginamos las líneas de universo de los fotones que salen del punto masa cortadas por una hipersuperficie Γ (Fig. 2). Para generar una hipersuperficie de esta índole se puede utilizar en el espacio físico una superficie material bidimensional, cerrada y convexa, deformable y móvil, que encierra al punto masa. Esta superficie material se mueve en el espacio físico, deformándose, pero manteniéndose convexa, encerrando siempre en su interior al punto masa. De aquí en adelante llamaremos brevemente "superficie material" al objeto geométrico que acabamos de describir.

Cada punto de la hipersuperficie Γ en el espacio-tiempo es un acontecimiento definido por el paso de un punto de la superficie material por un punto del espacio físico en un instante determinado. Cada fotón que emerge del punto masa choca alguna vez con la superficie material. Este choque es un acontecimiento de la hipersuperficie Γ. En cada línea de universo de fotón que emerge del punto masa queda definido así un cuadrivector que liga a aquel acontecimiento en la línea de universo del punto masa que consiste en la emisión del fotón, con el acontecimiento de la hipersuperficie Γ que consiste en la llegada del fotón a la superficie material.

Llamaremos "rayo de luz" a la trayectoria de un fotón en el espacio físico. Todo rayo de luz que emerge del punto masa corta a la superficie material en un solo punto, ya que esta última es convexa. En consecuencia, toda línea de universo de fotón que es emitido por el punto masa, corta a la hipersuperficie Γ en un solo acontecimiento.

Para determinar la dirección de un rayo de luz en el marco de referencia original utilizaremos como es costumbre, los ángulos θ y φ. El ángulo θ es el que forma la porción positiva del eje Oz con el rayo de luz; el ángulo φ es el que forma la porción positiva del eje Ox con la proyección del rayo de luz sobre el plano xOy. La pareja de ángulos (θ,φ) caracteriza una dirección en el espacio físico del marco de referencia original.

Estableceremos ahora una ecuación que caracteriza a la hipersuperficie Γ. A cada acontecimiento de esta hipersuperficie le asociamos un fotón; se trata del fotón que, siendo emitido por el punto masa, define al chocar con la superficie material precisamente a ese acontecimiento de Γ. Para caracterizar al acontecimiento de Γ utilizamos tres parámetros: el primero es la longitud de arco S que localiza en la línea de universo L del punto masa al acontecimiento emisión del fotón; el segundo y el tercer parámetros son los ángulos θ y φ que caracterizan la dirección del rayo de luz de ese fotón en el marco de referencia original. El parámetro S es la longitud de arco de Minkowski medida a lo largo de L, desde un " origen de arcos" en esa misma línea de universo, hasta el acontecimiento emisión del fotón. A cada acontecimiento de Γ le corresponden entonces los tres parámetros (S, θ, φ) que son sus coordenadas Gaussianas. La hipersuperficie Γ se puede definir por el tiempo r que tarda el fotón, asociado a un acontecimiento de Γ, en ir desde su emisión hasta la superficie material. Ese tiempo r es función de S que caracteriza al acontecimiento emisión del fotón, y también es función de los ángulos θ y φ que caracterizan la dirección del rayo de luz del fotón. La hipersuperficie Γ está dada entonces por la ecuación:

$$r = F(S, \theta, \varphi) \quad ,$$

en donde suponemos que F es una función continua con primeras derivadas continuas. Como aquí utilizamos unidades en las que la velocidad de la luz en el vacío es igual a uno, r es, además del tiempo que tarda el fotón en ir desde el punto masa hasta la superficie material, también la longitud del vector que el fotón recorre en el espacio físico entre el punto masa y la superficie material.

En el acontecimiento P consideramos especialmente cuatro fotones que son emitidos por el punto masa en P en las cuatro direcciones (θ, φ); $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$; $(\theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$; $(\theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi)$. A esas cuatro direcciones corresponden cuatro tiempos que son los que tardan los fotones respectivos en llegar desde el punto masa hasta la superficie material. Los cuatro tiempos son iguales a las longitudes que esos fotones recorren en el espacio físico desde el punto masa hasta la superficie material. Estos cuatro tiempos son:

$$r = F(S, \theta, \varphi) \ ;$$

$$r + dr = F(S, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi) \ ,$$

$$r + \delta r = F(S, \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi) \ .$$

$$r + dr + \delta r = F(S, \theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi) \ .$$

Llamamos $\hat{r}$ al cuadrivector que tiene origen en el acontecimiento P y su extremo en la intersección de la línea de universo del fotón de dirección (θ, φ) con la hipersuperficie Γ. De un modo consistente llamamos $\hat{r} + d\hat{r}$, $\hat{r} + \delta\hat{r}$ y $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ a los cuadrivectores que tienen sus orígenes en P y sus extremos en las intersecciones con la hipersuperficie Γ, de las líneas de universo de los fotones que salen de P en las direcciones

$$(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi) \ ; \ (\theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$$

y

$$(\theta + d\theta + \delta\theta, \ \varphi + d\varphi + \delta\varphi) \ .$$

A los extremos de los cuatro cuadrivectores $\hat{r}$, $\hat{r} + d\hat{r}$, $\hat{r} + \delta\hat{r}$ y $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ les llamamos A, B, C y D espectivamente. Como la Fig. 2 representa en el plano bidimensional una situación geométrica del espacio-tiempo de cuatro dimensiones, fue necesario encimar a los cuadrivectores $\hat{r}$ y $\hat{r} + \delta\hat{r}$ y también a los cuadrivectores $\hat{r} + d\hat{r}$ y $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$. Por eso aparecen en la Fig. 2 los acontecimientos A y C representados por un solo punto; también están encimados en un solo punto los acontecimientos B y D.

Las consideraciones que hicimos para el acontecimiento P las repetimos ahora para el acontecimiento Q. Fijamos nuestra atención en las líneas de universo de los cuatro fotones que salen de Q en las direcciones (θ, φ); $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$; $(\theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$ y $(\theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi)$. En esas cuatro líneas de universo definimos segmentos cortándolas con la hipersuperficie Γ. Llamamos ahora $\hat{r} + \Delta\hat{r}$, $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$, $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$ y $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ a los cuatro cuadrivectores a lo largo de esas cuatro líneas, que tienen su origen en Q y su extremo en la hipersuperficie Γ. Sean $r + \Delta r$, $r + \Delta r + dr$, $r + \Delta r + \delta r$ y $r + \Delta r + dr + \delta r$ los cuatro intervalos de tiempo que la luz tarda en recorrer cada uno de esos cuatro segmentos de líneas de universo de fotones. Recordando que la ecuación de la hipersuperficie Γ es $r = F(S, \theta, \varphi)$, tenemos:

$$r + \Delta r = F(S + dS, \theta, \varphi);$$

$$r + \Delta r + dr = F(S + dS, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi);$$

$$r + \Delta r + \delta r = F(S + dS, \theta + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi);$$

$$r + \Delta r + dr + \delta r = F(S + dS, \theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi).$$

A los extremos de los cuadrivectores $\hat{r} + \Delta\hat{r}$, $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$, $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$ y $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ les llamamos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respectivamente. En la Fig. 2 fue necesario encimar a los dos cuadrivectores $\hat{r} + \Delta\hat{r}$ y $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$; también fue necesario encimar a $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$ y a $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$. En consecuencia, en la Fig. 2 se confunden los puntos α y γ, así como también β y δ.

De las consideraciones anteriores se deducen las siguientes relaciones:

$$dr = \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial E}{\partial \varphi} d\varphi; \qquad \delta r = \frac{\partial F}{\partial \theta} \delta\theta + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi; \quad \Delta r = \frac{\partial F}{\partial S} dS.$$

Las líneas de universo de los fotones que pasan por P son las generatrices de un cono de luz que llamamos el "cono 1". Las líneas de universo de fotones que pasan por el acontecimiento Q son las generatrices de otro cono de luz que llamamos el "cono 2" (Fig. 2). Los cuatro cuadrivectores $\hat{r}$, $\hat{r} + d\hat{r}$, $\hat{r} + \delta\hat{r}$ y $\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ son segmentos de generatriz del cono 1. Los cuatro cuadrivectores $\hat{r} + \Delta\hat{r}$, $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r}$, $\hat{r} + \Delta\hat{r} + \delta\hat{r}$ y $\hat{r} + \Delta\hat{r} + d\hat{r} + \delta\hat{r}$ son segmentos de generatriz del cono 2. Sean t, x, y, z las coordenadas de un acontecimiento del cono 1. Las ecuaciones paramétricas de este cono son:

$$t = T + r;$$

$$x = X + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi;$$

$$y = Y + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi;$$

$$z = Z + r \cos \theta.$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector que liga a P con el acontecimiento del cono 1 son

$$(r, r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta).$$

Se comprueba fácilmente que la longitud de este cuadrivector es nula, lo quees consecuencia de que se trata de un segmento de línea de universo de fotón. El acontecimiento $P(T,X,Y,Z)$ es el vértice del cono 1; los parámetros r, θ, φ son las coordenadas Gaussianas en el cono 1.

El vértice del cono 2 es el punto:

$$Q(T + V^1 dS, X + V^2 dS, Y + V^3 dS, Z + V^4 dS);$$

en donde V^1, V^2, V^3, V^4 son las componentes contravariantes del cuadrivector velocidad del punto masa en el acontecimiento P. Sean ahora t, x, y, z las coordenadas de un acontecimiento en el cono 2. Las ecuaciones paramétticas de este cono 2 son:

$$t = T + V^1 dS + r;$$

$$x = X + V^2 dS + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi;$$

$$y = Y + V^3 dS + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi;$$

$$z = Z + V^4 dS + r \cos \theta \quad .$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector que liga a Q con el acontecimiento del cono son: $(r, r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos \theta)$. La longitud de este cuadrivector es nula.

Los parámetros r, θ, φson las coordenadas Gaussianas en el como 2.

Al establecer el elemento de ángulo sólido en el espacio físico de tres dimensiones consideramos el elemento de volumen de una pirámide. El caso del elemento de hiperángulo sólido en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones corresponde a esa piramide un objeto geométrico que llamamos "hipercuña". El hipervolumen de esta hipercuña está constituido por los segmentos de líneas de universo de fotones que salen del punto masa entre los acontecimientos P y Q, dentro del elemento de ángulo sólido $d\Omega$; los segmentos tienen un extremo en un acontecimiento de la línea de universo del punto masa, y el otro extremo en la hipersuperficie Γ. En la la Fig. 2 la hipercuña tiene por vértices los acontecimientos:

$$P, Q, ABCD; \alpha, \beta, \gamma, \delta \,.$$

Llamamos "tapa" de la hipercuña al paralelepípedo $ABCD\alpha\beta\gamma\delta$. La hipercuña tiene dos caras cónicas: la $PABCD$ y la $Q\alpha\beta\gamma\delta$. Las caras cónicas de la hipercuña son regiones de los conos 1 y 2. Además de la tapa tiene la hipercuña otras dos caras llanas que llamamos "flancos". Un flanco es $PQBD\beta\delta$ y el otro flanco es $PQAC\alpha\gamma$.

Reunimos en una tabla a las coordenadas Gaussianas de los acontecimientos A, B, C, D del cono 1 y a las coordenadas Gaussianas de los acontecimientos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ del cono 2.

TABLA 1

Acontecimientos	Coordenadas Gaussianas		
	r_1	θ_1	φ_1
A	r	θ	φ
B	$r + dr$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
C	$r + \delta r$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
D	$r + dr + \delta r$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
α	$r + \Delta r$	θ	φ
β	$r + \Delta r + dr$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
γ	$r + \Delta r + \delta r$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
δ	$r + \Delta r + dr + \delta r$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$

Las componentes contravariantes de cualquiera de los cuatro cuadrivectores $\hat{PA}$ $\hat{PB}$, $\hat{PC}$, y $\hat{PD}$ contenidos en el cono 1 se calculan como sigue:

$$(r_1, r_1 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \varphi_1, r_1 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \varphi_1, r_1 \cos \theta_1).$$

Esas cuatro expresiones representan también las componentes contravariantes de los cuadrivectores $Q\alpha$, $Q\beta$, $Q\gamma$, $Q\delta$ contenidos en el cono 2.

Dos cuadrivectores son paralelos, cuando las cuatro componentes contravariantes de uno, son equimúltiplos de las cuatro componentes contravariantes del otro. Es fácil comprobar los siguientes paralelismos entre las aristas de la hipercuña:

$$PA \| Q\alpha ; \; PB \| Q\beta ; \; PC \| Q\gamma ; \; PD \| Q\delta ;$$
$$AB \| CD \| \alpha\beta \| \gamma\delta ;$$
$$AC \| BD \| \alpha\gamma \| \beta\delta ;$$
$$AD \| BC \| \alpha\delta \| \beta\gamma \; .$$

Estos paralelismos justifican nuestra afirmación que la tapa de la hipercuña es un paralelepípedo.

Procedemos ahora a calcular el hipervolumen cuadrimensional de la hipercuña. El elemento de hipervolumen será el hiperparalelepípedo cuadrimensional (Fig. 3) $A'B'C'D'A''B''C''D''\alpha'\beta'\gamma'\delta'\alpha''\beta''\gamma''\delta''$. Los ocho vértices latinos están en el cono 1 y los ocho vértices griegos están en el cono 2. La Tabla 2 contiene a las coordenadas Gaussianas de los 16 vértices. En la tabla "τ" designa a un parámetro variable que variará entre cero y r. El hiperparalelepípedo elemental barre toda la hipercuña al variar τ entre cero y r. Para $\tau = 0$ el hiperparalelepípedo está adyacente al "filo" PQ de la hipercuña; para $\tau = r$ el hiperparalelepípedo está adyacente a la tapa de la hipercuña.

Hay ocho cuadrivectores que tienen su origen en P y su extremo en los ocho vértices designados con letras latinas en la Tabla 2. Todos estos cuadrivectores están en el cono 1. Otros ocho cuadrivectores tienen su origen en Q y su extremo en los ocho vértices designados con letras griegas en la tabla 2. Estos ocho cuadrivectores están en el cono 2 Fig. 3. Las componentes contravariantes de los 16 cuadrivectores, ocho con sus origen en P y ocho con su origen en Q, son

$$(r_1, r_1 \text{ sen } \theta_1 \cos \varphi_1 , r_1 \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \varphi_1 , r_1 \cos \theta_1) \; .$$

Sean F y G dos acontecimientos cualesquiera del cono 1; las componentes contravariantes del cuadrivector $\hat{FG}$ se obtienen como diferencias de las componentes contravariantes de los cuadrivectores $\hat{PG}$ y $\hat{PF}$. Si Φ y Ψ son dos acontecimientos cualesquiera del cono 2, se tienen las ecuaciones obvias:

$$\Phi\hat{\Psi} = Q\hat{\Psi} - Q\hat{\Phi} \quad ;$$

$$F\hat{\Phi} = Q\hat{\Phi} + P\hat{Q} - P\hat{F} \quad .$$

Estas relaciones permiten calcular las componentes contravariantes de cualquier cuadrivector cuyo origen y cuyo extremo sean vértices de la Tabla 2.

Se comprueban fácilmente los paralelismos de los cuatro juegos de aristas:

$$A'B' \,||\, C'D' \,||\, A''B'' \,||\, C''B'' \,||\, \alpha'\beta' \,||\, \gamma'\delta' \,||\, \alpha''\beta'' \,||\, \gamma''\beta'' \;;$$

$$A'C' \,||\, B'D' \,||\, A''C'' \,||\, B''D'' \,||\, \alpha'\gamma' \,||\, \beta'\delta' \,||\, \alpha''\gamma'' \,||\, \beta''\gamma'' \;;$$

$$A'D' \,||\, B'C' \,||\, A''D'' \,||\, B''C'' \,||\, \alpha'\delta' \,||\, \beta'\gamma' \,||\, \alpha''\delta'' \,||\, \beta''\gamma'' \;;$$

$$A'A'' \,||\, B'B'' \,||\, C'C'' \,||\, D'D'' \,||\, \alpha'\alpha'' \,||\, \beta'\beta'' \,||\, \gamma'\gamma'' \,||\, \delta'\delta'' \,.$$

Para calcular el hipervolumen cuadridimensional de nuestro hiperparalelepípedo elemental se requieren solamente los cuatro cuadrivectores $A'\hat{B}'$, $A'\hat{C}'$; $A'\hat{A}'$, $A'\hat{\alpha}'$. Para abreviar utilizaremos la siguiente notación:

$$d\hat{u} = A'\hat{B}'; \; d\hat{v} = A'\hat{C}' ; \quad d\hat{\tau} = A'\hat{A}''; \; d\hat{w} = A'\hat{\alpha}' \;.$$

De la Tabla 2 se ve que cuando $\tau = 0$ A', B', C' y D' se confunden con P y α', β', γ' y δ' se confunden con Q. Se ve además que cuando $\tau = r$, $A' \equiv A$, $B' \equiv B$, $C' \equiv C$, $D' \equiv D$, $\alpha' \equiv \alpha$, $\beta' \equiv \beta$, $\gamma' \equiv \gamma$, $\delta' \equiv \delta$. Al variar τ desde 0 hasta r, el hiperparalelepipedo elemental recorre la hipercuña desde el filo hasta la tapa. Para obtener el hipervolumen de la hipercuña hay que integrar el volumen del hiperparalelepípedo elemental desde que τ vale cero hasta que τ vale r.

Para calcular el hipervolumen de la hipercuña es necesario introducir el pseudotensor[3] E_{ijkl} que se deriva de un modo muy sencillo del sistema totalmente antisimétrico e_{ijkl}. En el espacio-tiempo de Minkwski los índices de este sis-

TABLA 2

Vértice	COORDENADAS GAUSSIANAS		
	r_1	θ_1	φ_1
A'	τ	θ	φ
B'	$\tau + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
C'	$\tau + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
D'	$\tau + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
A''	$\tau + d\tau$	θ	φ
B''	$\tau + d\tau + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
C''	$\tau + d\tau + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
D''	$\tau + d\tau + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
α'	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r}$	θ	φ
β'	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
γ'	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
δ'	$\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$
α''	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r}$	θ	φ
β''	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r}$	$\theta + d\theta$	$\varphi + d\varphi$
γ''	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + \delta\theta$	$\varphi + \delta\varphi$
δ''	$\tau + d\tau + \tau \frac{\Delta r}{r} + \tau \frac{dr}{r} + \tau \frac{\delta r}{r}$	$\theta + d\theta + \delta\theta$	$\varphi + d\varphi + \delta\varphi$

tema varían de uno a cuatro. El sistema e_{ijkl} se define por medio de la ecuaciones:

$e_{ijkl} = +1$ cuando $ijkl$ es una permutación par de 1234;

$e_{ijkl} = -1$ cuando $ijkl$ es una permutación impar de 1234;

$e_{ijkl} = 0$ si dos cualesquiera de los cuatro índices son iguales.

El sistema e_{ijkl} no es un tensor. Se construye, a partir de ese sistema, un pseudotensor con ayuda del determinante Δ del tensor métrico fundamental Δ_{ij} .

$$\Delta = |\Delta_{ij}| \quad .$$

El pseudotensor E_{ijkl} se define como sigue:

$$E_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \, e_{ijkl} \quad .$$

En el sistema de coordenadas que utilizamos en este artículo para el espacio-tiempo de Minkowski $\Delta = -1$ y $\sqrt{-\Delta} = +1$. En nuestro caso particular, que es el de una geometría pseudoecuclidiana, coinciden el pseudotensor E_{ijkl} y el sistema completamente antisimétrico e_{ijkl} .

El elemento de hipervolumen del hiperparalelepípedo cuyas aristas son los cuatro cuadrivectores $d\hat{u}, d\hat{v}, d\hat{\tau}, d\hat{w}$ es igual a

$$E_{ijkl} \, du^i \, dv^j \, d\tau^k \, dw^l \quad .$$

Esta expresión es el determinante de cuarto orden cuyos cuatro renglones están formados por las componentes contravariantes de los cuadrivectores $d\hat{u}, d\hat{v}, d\hat{\tau}, d\hat{w}$.
Ejecutando las operaciones se obtiene:

$$+ \operatorname{sen} \theta \begin{vmatrix} d\theta d\varphi \\ \delta\theta\delta\varphi \end{vmatrix} (V^1 - V^2 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - V^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - V^4 \cos \theta) \, dS \, \tau^2 \, d\tau \ .$$

El número dos a la derecha y arriba de τ es un exponente; los índices de la letra "V" son tensoriales.

El hipervolumen dv de la hipercuña se obtiene integrando el elemento de hipervolumen con respecto a τ desde 0 hasta r:

$$dv = \frac{1}{3} r^3 \operatorname{sen} \theta \begin{vmatrix} d\theta \, d\varphi \\ \delta\theta \, \delta\varphi \end{vmatrix} (V^1 - V^2 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - V^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - V^4 \cos \theta) dS \quad .$$

La expresión dentro del paréntesis tiene una relación muy simple con el producto escalar $\hat{r} \cdot \hat{V} = \Delta_{ij} r^i V^j$ de los cuadrivectores $\hat{r}$ y $\hat{V}$ cuyas componentes contravariantes son:

$$\hat{r}\,(r, r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta);$$

$$\hat{V}\,(V^1, V^2, V^3, V^4);$$

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = r V^1 - r V^2 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - r V^3 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - r V^4 \cos \theta \quad .$$

Usando este producto escalar se obtiene para el hipervolumen de la hipercuña:

$$dv = \frac{1}{3} (\hat{r} \cdot \hat{V}) \, r^2 \operatorname{sen} \theta \begin{vmatrix} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{vmatrix} dS \quad .$$

Siempre es posible seleccionar las designaciones de los ángulos de manera que el determinante

$$\begin{vmatrix} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{vmatrix}$$

sea positivo. El producto de ese determinante por el senθ es igual al elemento de ángulo sólido

$$d\Omega = \operatorname{sen} \theta \begin{vmatrix} d\theta d\varphi \\ \delta\theta \delta\varphi \end{vmatrix} \quad .$$

Para el hipervolumen de la hipercuña se obtiene entonces:

$$dv = \frac{1}{3} r^2 (\hat{r} \cdot \hat{V}) \, d\Omega \, dS \quad .$$

De aquí se obtiene inmediatamente:

$$r^2 \, d\Omega \, dS = \frac{3\, dv}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} \quad .$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (6) se obtiene para el elemento de hiperángulo sólido:

$$dH = \frac{3\, dv}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} \quad . \tag{8}$$

De las aristas de la hipercuña las siguientes ocho son segmentos de líneas de universo de fotones (Fig. 2):

$$PA, \; PB, \; PC, \; PD, \; Q\alpha, \; Q\beta, \; Q\gamma, \; Q\delta \; .$$

A estas aristas les llamamos "aristas de luz". El producto escalar $(\hat{r} \cdot \hat{V})$ es la proyección de la arista de luz $\hat{r}$ sobre el cuadrivector velocidad $\hat{V}$ del punto masa, ya que este último es unitario. La dirección del cuadrivector $\hat{V}$ es la del filo PQ (Fig. 2) de la hipercuña.

La fórmula (8) expresa el siguiente resultado: el elemento de hiperángulo sólido es igual al triple del hipervolumen de la hipercuña asociada, dividido entre el cubo de la proyección de la arista de luz sobre el filo de la hipercuña. La fórmula (8) expresa además al elemento de hiperángulo sólido en forma invariante.

Para algunas aplicaciones del elemento de hiperángulo sólido es necesario expresar el volumen tridimensional de la tapa de la hipercuña como un cuadrivector. Esta tapa es el paralelepípedo $ABCD\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 2) que queda definido por sus tres aristas concurrentes, los cuadrivectores:

$$A\hat{B}, \; A\hat{C} \;\; \text{y} \;\; A\hat{\alpha} \quad .$$

Para calcular estos cuadrivectores los expresamos como las diferencias:

$$A\hat{B} = P\hat{B} - P\hat{A} \;;$$
$$A\hat{C} = P\hat{C} - P\hat{A} \;;$$
$$A\hat{\alpha} = P\hat{Q} + Q\hat{\alpha} - P\hat{A} \quad .$$

A continuación de la Tabla 1. se expone como se calculan las componentes contravariantes de los cuadrivectores que aparecen en los segundos miembros de las tres últimas ecuaciones. Designamos a las componentes contravariantes de los tres cuadrivectores $A\hat{B}$, $A\hat{C}$ y $A\hat{\alpha}$ respectivamente con AB^j, AC^k y $A\alpha^l$.

Las componentes covariantes del cuadrivector volumen de la tapa de la hipercuña se obtienen con ayuda del pseudotensor E_{ijkl}. Llamos $d\hat{\Omega}$ al cuadrivector volumen de la tapa de la hipercuña, y $d\Omega_i$ a sus componentes covariantes. Tenemos entonces

$$d\Omega_i = E_{ijkl}\; AB^j AC^k A\alpha^l \,.$$

Como en el sistema de coordenadas que utilizamos, el pseudotensor E_{ijkl} es numéricamente idéntico al sistema unitario totalmente antisimétrico e_{ijkl}, las componentes $d\Omega_i$ son los determinantes de tercer orden, con su signo correspondiente, generados por la matriz de tres por cuatro elementos cuyos tres renglones están constituidos por las componentes contravariantes de los tres cuadrivectores

$$A\hat{B},\; A\hat{C},\; A\hat{\alpha} \quad .$$

Para poder obtener expresiones manejables para las componentes del cuadrivector $d\hat{\Omega}$ introducimos la siguiente notación.

$$\alpha = \begin{vmatrix} dr & d\theta \\ \delta r & \delta\theta \end{vmatrix} dS \quad . \tag{9}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} dr & d\varphi \\ \delta r & \delta\varphi \end{vmatrix} dS \quad . \tag{10}$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix} dS \quad . \tag{11}$$

Las componentes covariantes de $d\hat{\Omega}$ son entonces:

$$d\Omega_1 = \begin{cases} + [-rV^2 \operatorname{sen}\varphi + rV^3 \cos\varphi]\,\alpha \\ + [-rV^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\varphi - rV^3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\varphi + rV^4 \operatorname{sen}^2\theta]\,\beta \\ + [r^2 V^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi + r^2 V^3 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi + r^2 V^4 \operatorname{sen}\theta \cos\theta]\,\gamma \\ + r^2 \dfrac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen}\theta\gamma \end{cases} \tag{12}$$

$$d\Omega_2 = \begin{cases} + [rV^1 \operatorname{sen}\varphi - rV^3 \operatorname{sen}\theta - rV^4 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi]\,\alpha \\ + [rV^1 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\varphi - rV^4 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi]\,\beta \\ + [-r^2 V^1 \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi - r^2 \dfrac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi]\,\gamma \end{cases} \quad . \tag{13}$$

$$d\Omega_3 = \begin{cases} + [-rV^1 \cos\varphi + rV^2 \operatorname{sen}\theta + rV^4 \cos\theta \cos\varphi]\,\alpha \\ + [rV^1 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\varphi - rV^4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi]\,\beta \\ + [-r^2 V^1 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi - r^2 \dfrac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi]\,\gamma \end{cases} \quad . \tag{14}$$

$$d\Omega_4 = \begin{cases} + [rV^2 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi - rV^3 \cos\theta \cos\varphi]\,\alpha \\ + [-rV^1 \operatorname{sen}^2\theta + rV^2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + rV^3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi]\,\beta \\ + [-r^2 V^1 \operatorname{sen}\theta \cos\theta - r^2 \dfrac{\partial F}{\partial s} \operatorname{sen}\theta \cos\theta]\,\gamma \end{cases} \quad . \tag{15}$$

En estas fórmulas los índices superiores de la letra "V" son índices tensoriales; esos mismos índices superiores en la letra "r" y en las funciones trigonométricas son exponentes.

Calculemos el flujo del cuadrivector $\hat{r}$ a través de la tapa de la hipercuña;

este flujo es:

$$\hat{r} \cdot d\hat{\Omega} = -r^2 \operatorname{sen} \theta (\hat{r} \cdot \hat{V}) \, dS \begin{vmatrix} d\theta \, d\varphi \\ \delta\theta \, \delta\varphi \end{vmatrix} \cdot \qquad (16)$$

Comparando este resultado con la fórmula (7) obtenemos:

$$\hat{r} \cdot d\Omega = -3 \, dv \qquad (17)$$

Esto significa que el valor absoluto del flujo de la arista de luz de la hipercuña a través de la tapa de la misma, es igual al triple del hipervolumen de dicha hipercuña. Para el producto escalar del cuadrivector velocidad $\hat{V}$ con el cuadrivector $d\hat{\Omega}$, elemento de volumen de la tapa de la hipercuña, se obtiene:

$$\hat{V} \cdot d\hat{\Omega} = r \operatorname{sen} \theta (\hat{r} \cdot \hat{V}) \frac{\partial F}{\partial S} \, dS \begin{vmatrix} d\theta \, d\varphi \\ \delta\theta \, \delta\varphi \end{vmatrix} \qquad (18)$$

Comparando este resultado con la fórmula (7) se deduce:

$$\hat{V} \cdot d\hat{\Omega} = \frac{3}{r} \frac{\partial F}{\partial S} \, dv \qquad (19)$$

Calcularemos ahora el cuadrivector elemento de volumen tridimensional en la cara cónica *PABCD* de la hipercuña (Fig. 3). Ese elemento de volumen tridimensional es el paralelepípedo elemental $A'B'C'D'A''B''C''D''$. Llamaremos $d\hat{\Lambda}$ a ese cuadrivector elemento de volumen. El paralelepípedo elemental está definido por los tres cuadrivectores:

$$\widehat{A'B'}, \ \widehat{A'C'}, \ \widehat{A'A''} \ .$$

Para designar estos cuadrivectores utilizamos otra vez la notación abreviada que usamos al calcular el hipervolumen de la hipercuña. Las componentes covariantes del cuadrivector $d\hat{\Lambda}$ son entonces:

$$d\Lambda_i = E_{ijkl}\, du^j\, dv^k\, d\tau^l \ .$$

Ejecutando los cálculos se obtiene:

$$\begin{aligned} d\Lambda_1 &= \tau^2 \operatorname{sen}\theta\, \eta\, d\tau\,; \\ d\Lambda_2 &= \tau^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi\, \eta\, d\tau\,; \\ d\Lambda_3 &= -\,\tau^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi\, \eta\, d\tau\,; \\ d\Lambda_4 &= -\,\tau^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, \eta\, d\tau \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Para abreviar utilizamos la notación:

$$\eta = \begin{vmatrix} d\theta\, d\varphi \\ \delta\theta\, \delta\varphi \end{vmatrix} \tag{21}$$

En consecuencia $\operatorname{sen}\theta\eta$ es igual al elemento de ángulo sólido $d\Omega$.

Para expresar el cuadrivector $d\hat{\Lambda}$ en forma compacta conviene introducir al cuadrivector $\hat{\tau} = P\hat{A}'$ (Fig. 3). Las componentes covariantes de $\hat{\tau}$ son:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau\,; \\ \tau_2 &= -\,\tau \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\,; \\ \tau_3 &= -\,\tau \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\,; \\ \tau_4 &= -\,\tau \cos\theta \ . \end{aligned} \tag{22}$$

Para el elemento de volumen de la cara cónica 1 de la hipercuña obtenemos:

$$d\hat{\Lambda} = \tau\, d\tau\, d\Omega\, \hat{\tau} \ . \tag{23}$$

Además de haber expresado el elemento de hiperángulo sólido dH en términos del hipervolumen dv de la hipercuña asociada, hemos calculado dos cuadrivectores elementos de volumen tridimensional: el cuadrivector $d\hat{\Omega}$ que representa a la tapa de la hipercuña y el cuadrivector $d\hat{\Lambda}$, elemento de volumen de la cara cónica situada en el cono de luz 1.

En el artículo futuro mostraremos que el hiperángulo sólido desempeña en el espacio-tiempo de Minkowski un papel semejante al que desempeña el ángulo sólido ordinario en el espacio físico, al calcular flujos de gradientes generados por fuentes puntuales de potencial.

REFERENCIAS

1.- L. Page & N.I. Adams, Electrodynamics, D. Van Nostrand & Co. New York, 1940 p. 119.

2.- C. Graef Fernandez, Rev.Mex.Fís. **10**, 3 (1961).

3.- V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Akademie Verlag. Berlin 1960, p. 147.