

PROBLEMAS DE INVESTIGACION EN INESTABILIDAD
HIDRODINAMICA Y TURBULENCIA

F. Cocho Gil*

Instituto de Geofísica

Comisión Nacional de Energía Nuclear

(Recibido: abril 15, 1965)

RESUMEN

In this paper, the research problems arising from hydrodynamical instability are reviewed in the light of the theory of boundary layers and magnetohydrodynamical theory. A discussion is given of the boundary problem in the linearized and non-linearized theories of hydrodynamical instability which accept the validity of the Navier equations. This discussion is oriented towards a unitary exploration of the sequence

laminar flow → transition → turbulent flow

The need is emphasized of neglecting the Navier equations in the reconstruction of the basic equations of fluid dynamics when the concepts of statistical

* Instituto de Geofísica, Comisión Nacional de Energía Nuclear.

struction of the basic equations of fluid dynamics when the concepts of statistical mechanics are taken as starting point, and due account is taken of the quantum nature of the turbulent spectrum.

A) PRELIMINARES. Consideremos un fluido en movimiento. Analicemos la operación experimental de determinar su velocidad con una sonda de exploración. Si disminuimos paulatinamente las dimensiones de la sonda, podríamos determinar:

- 1.- La misma magnitud de la velocidad local hidrodinámica (en un punto fijo) hasta el instante en que la sonda sufre la acción individual de las moléculas del fluido;
- 2.- o bien, una variación (discreta o continua) de la velocidad local hidrodinámica: una noción de escala se asocia a este segundo caso. Adicionalmente, se observaría la variación irregular con el tiempo y una distribución espacial irregular.

El primer caso lo asociamos al flujo *laminar*, el segundo al flujo *turbulento*. Entre esos dos límites la estructura del fenómeno depende de la naturaleza del flujo. La transición de un límite a otro, la transición hidrodinámica, presenta problemas de investigación que nos proponemos plantear.

B) CONCEPTO DE CAPA LIMITE. [1]. Por comodidad de exposición hacemos referencia al fenómeno de capa límite, las conclusiones generales siendo extensibles a toda la dinámica de fluidos. Expongamos inicialmente el concepto de capa límite.

Sea un flujo permanente (fluido incompresible). De los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento (ausencia de fuerzas externas), podemos escribir:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{B.2})$$

donde:

- \vec{V} velocidad
- p presión
- ρ masa específica
- ν viscosidad cinemática del fluido

El cociente de fuerzas de inercia a fuerzas de viscosidad queda caracterizado por el parámetro adimensional R (número de Reynolds):

$$R = \frac{F. Inercia}{F. Viscosidad} = \frac{U.L}{\nu} \quad (B.3)$$

donde:

- U una velocidad característica
- L una dimensión característica

Si $R \rightarrow \infty$: $F. Inercia \gg F. Viscosidad \therefore$ efecto viscoso ~ 0 en ese caso, el efecto disipativo siendo nulo, podemos expresar la velocidad como un gradiente:

$$\vec{V} = \nabla\Phi \therefore \nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (B.4)$$

satisfaciendo a la ecuación de Laplace.

Consideremos una esfera en presencia de tal flujo, con las condiciones hidrodinámicas clásicas: (\vec{n} : vector normal)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \nabla\Phi = 0 \quad (\text{sobre la superficie de la esfera}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \nabla\Phi = \text{constante (velocidad uniforme al infinito)} \end{array} \right\}$$

Para tal flujo se obtiene el resultado clásico de resistencia nula de la esfera al movimiento del fluido ($R \rightarrow \infty$), en contradicción con la experiencia (paradoja de D'Alembert). La hipótesis de Prandtl salva el problema: si $R \rightarrow \infty$ (efecto viscoso despreciable) el flujo se comporta idealmente excepto en una pequeña capa, adyacente al cuerpo, llamada capa límite en donde reside el efecto viscoso.

C) INESTABILIDAD HIDRODINAMICA EN LA CAPA LIMITE Y EN FLUJOS MHD

Para el caso bidimensional (fluido incompresible) (B.1) y (B.2) (flujo no-permanente) se escriben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (C.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (C.3)$$

donde: $x; y$ coordenadas
 $u; v$ componentes de la velocidad según $x; y$
 t tiempo

Consideremos:

$$\vec{v} = \vec{U} + \vec{v}'; \quad p = P + p' \quad (C.4)$$

donde: $\vec{U}; P$ vector velocidad; presión
 $\vec{v}'; p'$ componentes fluctuantes con el tiempo

En el caso de la capa límite, dada la pequeñez del espesor δ de la capa límite (p.ej.: según y), consideramos que la única componente (no-fluctuante) existente es u (a lo largo de x), esto es, v siendo del orden de magnitud de δ la consideramos despreciable.

En ese caso:

$$u = U + u' ; \quad v = 0 + v' ; \quad p = P + p' \quad (\text{C.5})$$

C.5 en C.1; C.2 y C.3, separando términos permanentes y fluctuantes, permiten escribir:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u' \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v' \quad (\text{C.8})$$

en donde hemos despreciado los términos fluctuantes cuadráticos. Sea ahora la función:

$$\psi = \phi(y) \exp \{ i [\alpha x - \beta t] \} \quad (\text{C.9})$$

tal que:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v' = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{C.10})$$

donde: $\phi(y)$ amplitud de la fluctuación
 $\lambda = 2\pi/\alpha$ longitud de onda
 $c = \beta/\alpha = c_r + iC_i$ (c_r : velocidad de propagación)
 ((i : grado de amortiguamiento))

ψ satisface la ecuación de continuidad, las ecuaciones C.7 y C.8 escribiéndose:

$$(U - c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - U''\phi = -\frac{i\nu}{\alpha R}(\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) \quad (C.11)$$

ecuación que gobierna a la amplitud ϕ (' : derivación con respecto a y). Nuestro parámetro característico R (número de Reynolds) puede ser en este caso:

$$R = \frac{U_m}{\nu} \delta \quad (C.12)$$

donde:

U_m velocidad característica en la capa límite
 (p. ej.: velocidad máxima)
 δ espesor de la capa límite (p. ej.: si y normal a la pared del cuerpo en donde se presenta la capa límite :
 $0 < y < \delta$)

La ecuación clásica C.11 de Orr-Sommerfeld se sujeta a las siguientes condiciones límite:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 : u' = v' = 0 : \phi = \phi' = 0 \quad (U = 0) \\ y = \delta : u' = v' = 0 : \phi = \phi' = 0 \quad (U = U_m) \end{array} \right\} \quad (C.13)$$

esto es, condición de no-deslizamiento del fluido a la pared y condición de anulación de la fluctuación a un lado y otro de la capa límite.

Tenemos pues la ecuación que gobierna la inestabilidad del flujo cuando esté sometido a una pequeña perturbación exponencial que se superpone al flujo original.

Cabe señalar:

- 1.- Las ecuaciones han sido *linearizadas*.
- 2.- La velocidad U ha sido asumida lentamente variable con x , tal que $U \cong U(y)$, esto es: *la influencia de la variación del espesor de capa límite a lo largo de x ($\Delta \delta(x)$) ha sido despreciada* (quiere decirse que el número local $R = U_m \delta / \nu$ ha sido considerado constante).

D) INESTABILIDAD EN FLUJOS MHD. [2]. El estudio de la inestabilidad hidrodinámica se ha referido, por comodidad de exposición, a la capa límite. Las conclusiones son, sin embargo, extensibles a flujos MHD.

Para el caso de un flujo MHD, limitado entre dos placas paralelas sobre las que actúa un campo magnético transversal, conduce a escribir de forma similar al caso de la capa límite:

$$(U - c)(u_y'' - \alpha^2 u_y) - U'' u_y - i N \alpha^{-1} u_y'' = -i(\alpha R)^{-1} (u_y'''' - 2\alpha^2 u_y'' + \alpha^4 u_y) \quad (D.1)$$

ecuación clásica de Lock, donde:

- u_y componente fluctuante de la velocidad (normal a las placas)
- N parámetro adimensional que toma en cuenta los efectos MHD en el flujo.

Observamos que excepción hecha del término en N , la ecuación de Lock es análoga a la de Orr-Sommerfeld. Las observaciones del inciso C son también pertinentes aquí.

Citando otro caso representativo podemos mencionar el trabajo de Koppel [3] en donde el estudio de la inestabilidad de un flujo en presencia de un calentamiento externo y un campo gravitacional (flujo tridimensional) le induce a escribir:

$$\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{dU}{dz} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \Delta u' \quad (D.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \Delta v' \quad (D.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g + \mu \Delta w' \quad (D.4)$$

para las ecuaciones de movimiento, donde:

μ	viscosidad absoluta
g	aceleración de la gravedad
ρ'	término de perturbación en la masa específica
$u'; v'; w'$	componentes fluctuantes de la velocidad

y para la conservación de energía:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + U \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{d\Theta}{dz} = K \Delta \theta' \quad (D.5)$$

donde

K	conduct. térmica
$\theta = \Theta + \theta'$	Θ término no-fluctuante de la temperatura
	θ' término fluctuante de la temperatura.

Se señala que el planteamiento de Koppel dado al problema de Benard hace uso de la misma hipótesis que en el caso de las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y Lock (se llega a una ecuación final análoga a estos dos): los términos de perturbación son suficientemente pequeños para *linearizar las ecuaciones de origen*. El problema siendo prácticamente el mismo, limitaremos la discusión al caso capa límite y flujo MHD.

E) RESULTADOS DE LA TEORÍA LINEARIZADA.

Las soluciones de las ecuaciones de Orr-Sommerfeld se ilustran cualitativamente en las figuras 1a y 1b:

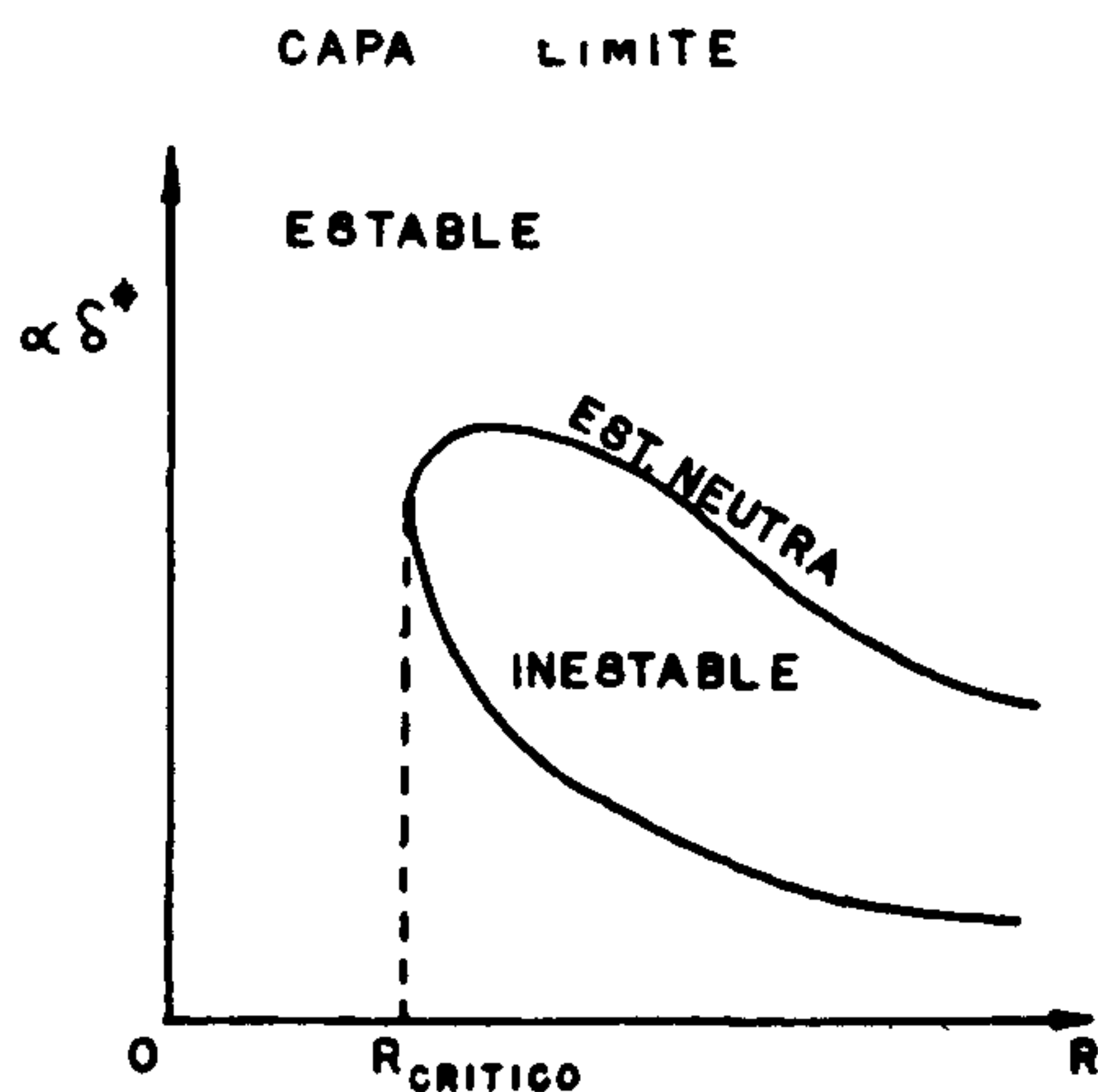


FIGURA 1a.

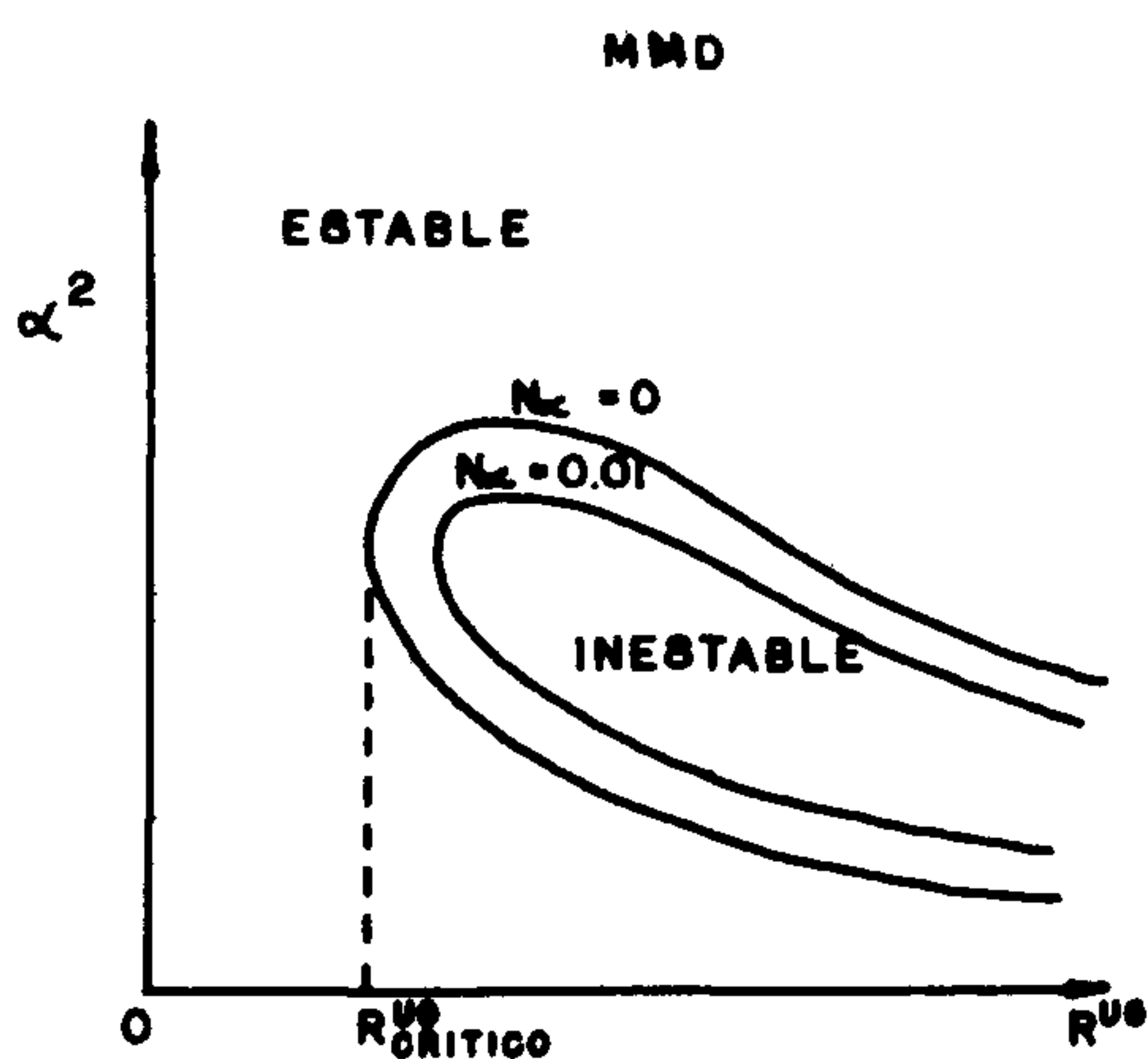


FIGURA 1b.

Excepción hecha de que en el caso MHD la solución depende de la presencia del campo magnético (si $Na \rightarrow \infty$: $R_{crit.} \rightarrow \infty$: efecto estabilizador del campo magnético), las figuras 1a y 1b indican la existencia de un valor límite R crítico a partir del cual perturbaciones de cierta frecuencia α se amplifican:

Si $R > R$ crítico: flujo inestable \rightarrow comienzo de la transición a flujo turbulento. La presencia del flujo turbulento implica, por otra parte, intenso intercambio de cantidad de movimiento entre las partículas flúidas; esto se traduce por una modificación *radical* de la distribución espacial de la velocidad local hidrodinámica en comparación al flujo laminar. Tal hecho ofrece un criterio experimental satisfactorio para determinar R crítico.

Cabe señalar que la determinación experimental de R crítico, siendo consecuencia de un fenómeno de observación, debe concluir:

$$(R \text{ crítico}) \text{ experimental} > (R \text{ crítico}) \text{ teórico} \quad (\text{E.1})$$

puesto que la transición no es experimentalmente observable (cualquiera que sea la técnica empleada) sino hasta que la perturbación ha alcanzado un grado aceptable de amplificación (observable).

Los siguientes dos casos [4] son ilustrativos de la comparación:

Teoría linearizada Vs experiencia:

1.- Flujo de Poiseuille de simetría de revolución (conducto de sección circular con distribución de velocidades parabólica).

$(R \text{ crítico}) \text{ teórico} = \infty$: flujo estable a todo valor de R

$(R \text{ crítico}) \text{ experimental} \cong 2500$

2.- Flujo de Poiseuille bidimensional:

$(R \text{ crítico}) \text{ teórico} \cong 10700$

$(R \text{ crítico}) \text{ experimental} \cong 3000 < (R \text{ crítico}) \text{ teórico}$

esto es:

$(R \text{ crítico}) \text{ teórico} \neq (R \text{ crítico}) \text{ experimental}$

$(R \text{ crítico}) \text{ teórico} > (R \text{ crítico}) \text{ experimental}$

(E.2)

en contradicción con (E.1). La teoría linearizada de la inestabilidad hidrodinámica no es pues aceptable.

F) TEORIA NO-LINEARIZADA DE STUART. [5]

Consideremos ahora el punto de vista de Stuart: Inicialmente, durante un corto lapso de tiempo, la perturbación crece en forma exponencial. Al alcanzar un cierto grado de amplificación altera el flujo original, como consecuencia de ello la energía transferida del flujo original a la perturbación se modifica y así mismo el crecimiento original de la perturbación. La teoría linearizada deja de ser válida, no constituyendo más que la primera etapa de la inestabilidad.

Esto se traduce por la aparición de esfuerzos de viscosidad "aparente" (o de Reynolds), que se superponen al flujo, de la forma:

$$\tau' \text{ viscosidad aparente} \sim - \overline{u'v'} \quad (\text{F.1})$$

(flujo bidimensional) donde:

$$\overline{u'v'} \quad \text{promedios temporales de la correlación doble de las componentes fluctuantes de la velocidad.}$$

Esfuerzos de esa naturaleza son despreciados en la teoría linearizada.

Supongamos un flujo bidimensional, gobernado por las ecuaciones (C.1); (C.2) y (C.3). La función ψ , representativa de la fluctuación, podríamos escribirla con Stuart:

$$\begin{aligned} \psi = & \phi_0(y; t) + \phi_1(y; \tau) \exp \{ i [ax - \beta t] \} + \phi_1^*(y; \tau) \exp \{ - i [ax - \beta t] \} + \\ & + \phi_2(y; \tau) \exp \{ 2i [ax - \beta t] \} + \phi_2^*(y; \tau) \exp \{ - 2i [ax - \beta t] \} + \dots \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

donde ϕ_n^* ($n = 1; 2; \dots$) conjugada compleja
 τ parámetro que hace dependiente entre sí a las funciones ϕ_n

Se obtendría por ejemplo, para los esfuerzos de viscosidad aparente:

$$\tau \text{ viscosidad aparente} \sim -i\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{d\phi_n}{dy} \phi_n^* - \frac{d\phi_n^*}{dy} \phi_n \right) \quad (\text{F.3})$$

que en este caso se anulan.

Resumiendo:

- 1.- La sustitución de (F.2) en (C.1); (C.2) y (C.3) permite obtener un grupo de ecuaciones para ϕ_n ($n = 1; 2; \dots$) que, dada la no-linearidad del sistema, son mutuamente dependientes.
- 2.- el problema fundamental de la teoría no-linearizada consistiría en seguir el crecimiento de la perturbación para un número dado de Reynolds, y en particular, determinar si en ese caso existe un estado de equilibrio (la energía transferida del flujo original a la perturbación compensándose con la disipación energética).

Haciendo a un lado las particularidades matemáticas del problema cabe señalar, en cuanto a la comparación: teoría no-linearizada Vs experiencia, que:

- 1.- En los dos casos anteriormente citados del flujo de Poiseuille (de simetría de revolución y plano):
(R crítico) experimental \cong (R crítico) teórico,
- 2.- en el caso del flujo al interior de dos cilindros concéntricos en movimiento relativo (Taylor), en donde hacen aparición vórtices tóricos de rotación alternada, se obtiene:
(T crítico) experimental \cong (T crítico) teórico
(en este caso el parámetro adimensional característico es el número de Taylor T . modificación del número de Reynolds que considera la distancia radial entre cilindros)

G) PROBLEMAS DE INVESTIGACION QUE PLANTEA LA TEORIA DE STUART.

Cabe señalar:

- 1.- En los casos citados de Poiseuille y Taylor, el parámetro característico, por ejemplo el número de Reynolds, tiene valor constante:

$$\text{Si } R = \left(\frac{U_m}{\nu} \right) \cdot D \quad (\text{G.1})$$

$\left(\frac{U_m}{\nu} \right)$ y D constantes, dado que $\left(\frac{U_m}{\nu} \right)$ la especificamos de antemano y D no varía (distancia entre placas, cilindros, etc., constante). *La influencia de la variación de la dimensión característica D no ha sido tomada en cuenta.* En el caso de la capa límite la dimensión característica es el espesor de capa límite δ que si varía, el incremento $\Delta\delta$ puede introducir términos de perturbación adicionales a considerar por la teoría no-linearizada.

- 2.- la solución teórica a que conduce la teoría no-linearizada en el problema de Taylor ha sido facilitada por el hecho de que en este caso se establece un estado de equilibrio entre:

$$\begin{array}{l} \text{(energía transferida)} \quad \text{(energía)} \\ \text{(a la perturbación)} = \text{(disipada)} \end{array} \quad (\text{G.2})$$

- 3.- Independientemente de los casos de Poiseuille y Taylor (aún con las limitaciones de la teoría no-linearizada en estos casos, señaladas anteriormente), el estudio de la inestabilidad hidrodinámica aún reposa casi en su totalidad sobre la base de la teoría linearizada (inestabilidad en capa límite, inestabilidad MHD, inestabilidad del problema de Benard, etc.)

Se plantean pues los siguientes problemas de investigación:

- 1.- Aplicación de la teoría no-linearizada a la teoría de la capa límite (y capas límites ionizadas) considerando la influencia de

la variación $\Delta\delta$ del espesor de capa límite como fuente adicional de perturbación.

- 2.- Aplicación de la teoría no-linearizada a flujos MHD y al problema de Benard (en donde la dimensión característica puede variar y el estado de equilibrio, como en el caso de Taylor, puede no establecerse). Cabe señalar que en trabajos recientes [6] de Glansdorff y Prigogine sobre el problema de Benard, el estudio de la evolución de los sistemas físicos microscópicos con aplicación al problema de Benard, lleva al definir la inestabilidad al nivel macroscópico, a hipótesis lineales que como hemos visto no son válidas.

Los problemas 1 y 2 son esencialmente de orden matemático, plantean pues problemas de investigación a corto plazo. Cabe discutir ahora la validez física del método de perturbaciones sobre el que se apoyan tanto la teoría linearizada como no-linearizada, así como discutir en última instancia la validez de la ecuación de movimiento sobre la que se apoyan todas las teorías de la inestabilidad: la validez de la ecuación de Navier.

H) DIAGRAMA DE MARKOVIN. [7]

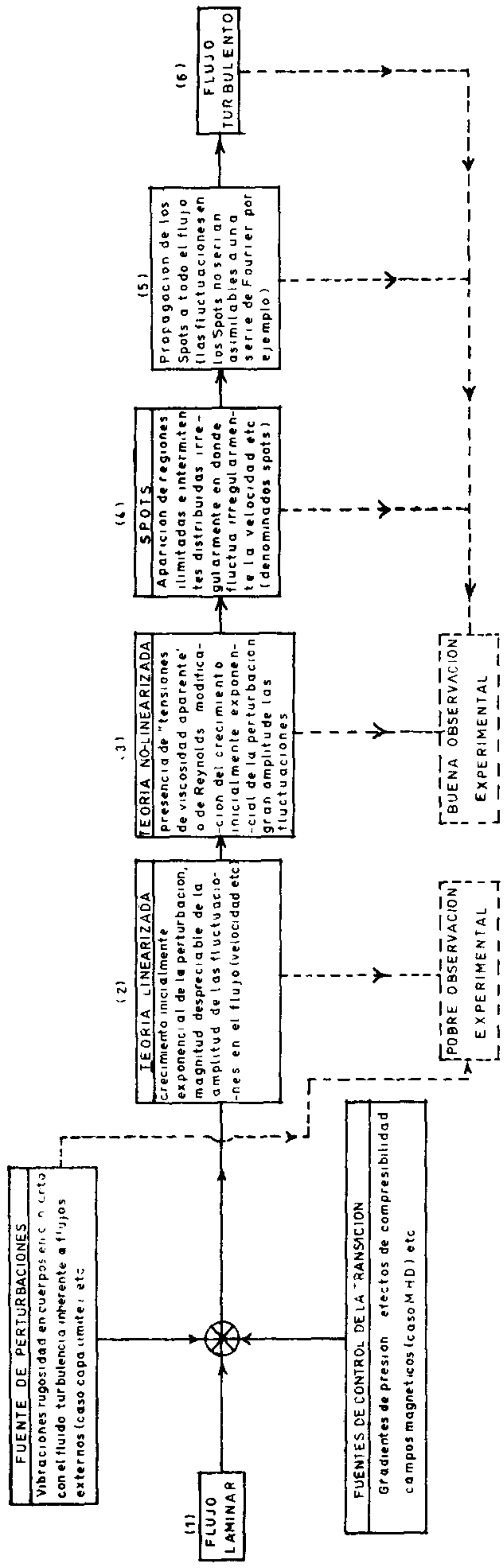
La síntesis que del proceso de transición de flujo laminar a flujo turbulento hace Markovin, se presta a una ulterior discusión sobre la validez del método de perturbaciones.

A continuación se ilustra el diagrama de Markovin:

En el estudio del proceso de transición de flujo laminar a flujo turbulento (1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 del diagrama de Markovin), cabe señalar:

- 1.- Aparición (a cierto valor de R) de regiones intermitentes, con distribución espacial irregular, de grandes fluctuaciones de la velocidad (no asimilables, por ejemplo, a una serie de Fourier). Esto representa un cambio cualitativo en la estructura del flujo. A partir de este momento el método de perturbaciones deja de tener validez. (Cabe señalar que los resultados experimentales obtenidos por Ginoux en el Instituto Von Karman determinan, en

DIAGRAMA DE MARKOVIN



DINAMICA DEL PROCESO

1-2-3-4-5-6

SI R (NUMERO DE REYNOLDS) → ∞

dibujó e bg

flujos de simetría *plana* y en *ausencia* de fuerzas externas, la presencia de perturbaciones *tridimensionales* difícilmente explicables en el marco de las teorías clásicas de la inestabilidad).

- 2.- Las teorías linealizadas y no-linearizadas no determinan más que un límite inferior de comienzo del proceso de transición. Existe pues una discontinuidad en el tratamiento dado a la inestabilidad hidrodinámica y a la turbulencia (métodos estadísticos)

En conclusión: en el estudio del proceso *unitario*:

Flujo laminar → Transición → Flujo turbulento

el método de perturbaciones es inadecuado. Discutamos ahora la validez de las ecuaciones de Navier.

1) DINAMICA DE LA TURBULENCIA.

Para construir una dinámica de la turbulencia se consideran válidas las ecuaciones de Navier [8]. A saber:

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + U \frac{\partial u_a}{\partial x_1} + \sum_{\beta} u_{\beta} \frac{\partial u_a}{\partial x_{\beta}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_a} + \nu \Delta u_a \quad (1.1)$$

y para la ecuación de continuidad: (fluido incomprensible)

$$\sum_a \frac{\partial u_a}{\partial x_a} = 0 \quad (1.2)$$

donde

- t tiempo
- U velocidad de conjunto del fluido en la dirección x_1
- $u_a ; u_{\beta}$ componentes de la velocidad de agitación turbulenta, según ejes $x_a ; x_{\beta}$

p presión
 ν viscosidad cinemática.

La naturaleza irregular de las fluctuaciones hace pensar en la utilidad del estudio de los promedios estocásticos de los parámetros característicos del flujo turbulento. La imposibilidad matemática de promediar las soluciones obliga a proceder directamente sobre las ecuaciones de origen.

Definiendo: (correlaciones espaciales)

$$\text{correlación doble} : R = \overline{\sum u_{\alpha}(x) u_{\alpha}(x + \xi)} \quad (1.3)$$

$$\text{correlación triple} : T = \overline{\sum u_{\alpha}(x) u_{\beta}(x) u_{\gamma}(x + \xi)} \quad (1.4)$$

como características de la estructura de la turbulencia, podríamos expresar finalmente a (1.1) y (1.2) :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 2\nu\Delta R + \text{div } T \quad (1.5)$$

Si definimos los coeficientes de correlación:

$$f(r) = \frac{1}{u_0^2} \left[\overline{u_1(x_1; x_2; x_3) u_1(x_1 + r; x_2; x_3)} \right] \quad (1.6)$$

$$c(r) = \frac{1}{u_0^3} \left[\overline{u_1^2(x_1; x_2; x_3) u_1(x_1 + r; x_2; x_3)} \right] \quad (1.7)$$

donde: u_0 velocidad característica (por ejemplo: velocidad de conjunto).

La figura 2 ilustra la significación geométrica de los coeficientes:

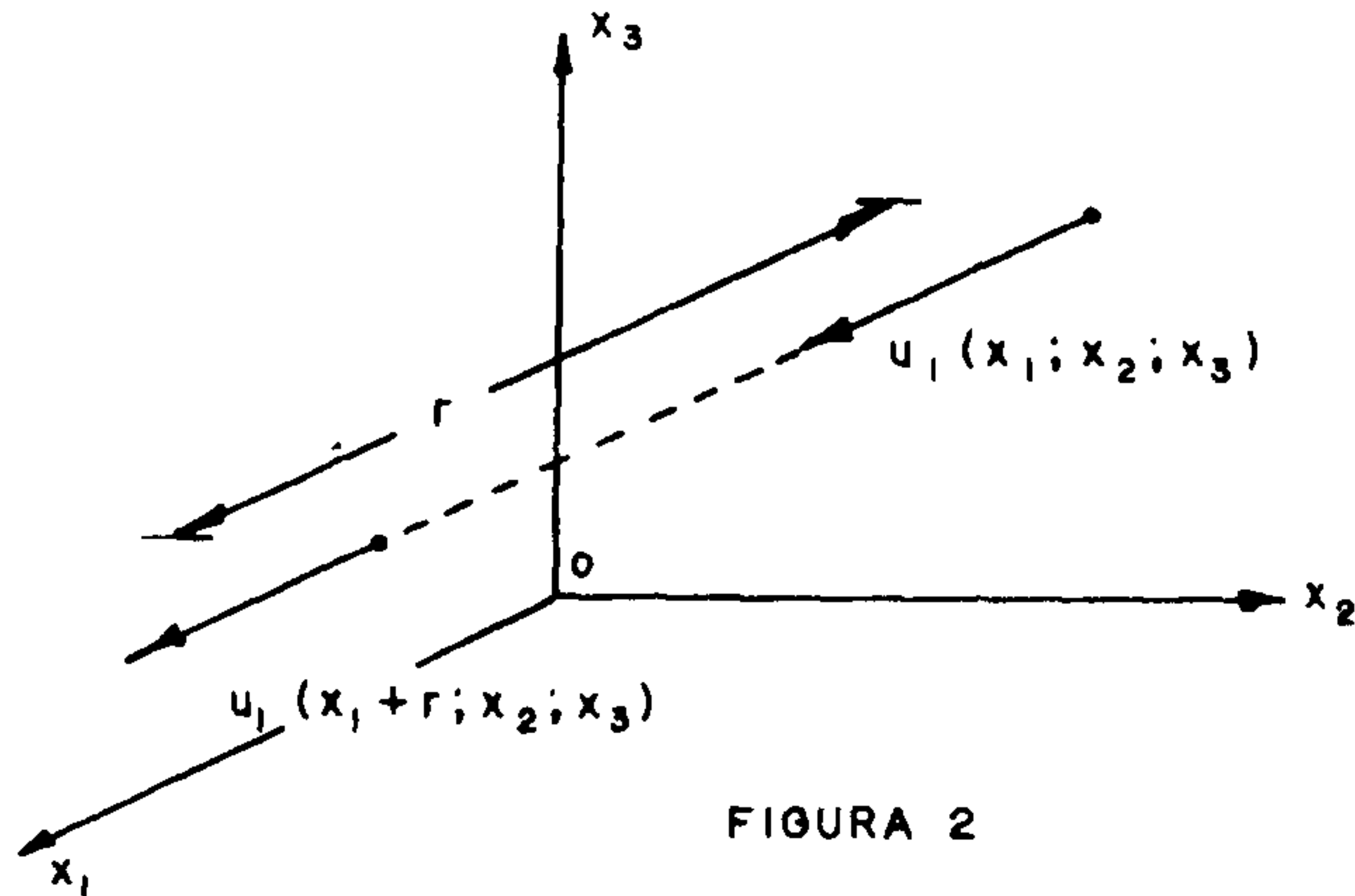


FIGURA 2

Bajo hipótesis de: incompresibilidad del fluido, homogeneidad e isotropía de la turbulencia; podríamos definir finalmente a (1.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_0^2 f) = 2\nu u_0^2 \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{df}{dr} \left(+ u_0^3 \left(\frac{dc}{dr} + \frac{4c}{r} \right) \right) \right) \quad (1.8)$$

ecuación de Karman-Howarth, base actual del estudio de la dinámica de la turbulencia. Teorías recientes de Hopf y Chandrasekhar [8] no hacen más que extender el problema matemático (definición de correlaciones cuartas, etc.), pero considerando siempre válidas las ecuaciones de Navier.

Consideremos, ahora, la estructura molecular del fluido [9]. Podemos definir:

$$\rho(\vec{q}; \vec{R}) = \sum_k m_k \delta(\vec{q}_k - \vec{R}) \quad \text{densidad de masa} \quad (1.9)$$

$$\vec{J}(\vec{q}; \vec{p}; \vec{R}) = \sum_k \vec{p}_k \delta(\vec{q}_k - \vec{R}) \quad \text{densidad de impulsión} \quad (1.10)$$

donde:

m_k	masa de una partícula de índice K
\vec{q}_k	posición de una partícula de índice K
\vec{R}	posición de un punto <i>fijo</i> en el espacio (variable Euler)
\vec{p}_k	cantidad de movimiento de una partícula de índice K
δ	función de Dirac que considera la naturaleza puntual de las partículas

cabe señalar:

- 1.- La velocidad local hidrodinámica \vec{u} definida a la escala macroscópica usual, es la relación de dos valores promedio $\langle \rho \rangle$ y $\langle J \rangle$, no es por tanto el promedio de *una* sola magnitud mecánica.
- 2.- En estas condiciones no es posible hablar de fluctuaciones de la velocidad hidrodinámica en el punto \vec{R} ; esto es: $\vec{u}(\vec{R})$ es el valor promedio en \vec{R} de \vec{p}/m de una partícula, pero \vec{p}/m , en tanto que magnitud fluctuante no es función de \vec{R} ni verifica la ecuación de Navier (excepto si las fluctuaciones de masa fueran despreciables).
- 3.- Quiere decirse que las teorías estadísticas de Karman, Chandrasekhar, etc., en las que se admiten que la velocidad local hidrodinámica puede fluctuar y satisfacer a la ecuación de Navier no son válidas.

En vías al estudio unitario del Proceso de Transición debemos pues rechazar la validez de las ecuaciones de Navier.

J) CONSIDERACIONES SOBRE LA DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LA ESTRUCTURA DE LA TURBULENCIA.

La determinación experimental suele ser de dos tipos:

- 1.- Cualitativamente: experiencias de tipo óptico (el primero de los cuales fué la experiencia de Reynolds); por ejemplo, empleo de fuentes luminosas

proyectadas sobre el flujo turbulento (zonas de luz y sombra obtenidos por el comportamiento irregular del flujo turbulento que actúa como un conjunto de prismas de diferente tipo) y desplazamiento de cámaras fotográficas a diferentes velocidades (paralelamente a la velocidad de conjunto del fluido) con el objeto de determinar la existencia de diferentes escalas de la turbulencia.

- 2.- Cuantitativamente: fundamentalmente el empleo de anemómetros a filamento incandescente (la determinación de la energía disipada por el flujo en contacto con el filamento constituye una medida promedio de los parámetros fluctuantes); este método (teniendo en cuenta la distorsión que produce el anemómetro sobre el flujo original) determina esencialmente las correlaciones o coeficientes de correlación (tensiones de Reynolds, etc.)

Cabe señalar:

- 1.- las experiencias ópticas señalan la existencia (la interacción fenómeno físico → observación; ausente) de diferentes *escalas de la turbulencia*, tal como se dijo en las preliminares.
- 2.- el empleo de anemómetros confirma, por una parte, la irregular distribución espacio-temporal (el empleo de registros con el anemómetro es posible) de las magnitudes fluctuantes; por otra parte, obliga a efectuar la constatación teoría Vs experiencia con el estudio de las correlaciones o coeficientes de correlación.

En estas condiciones la existencia de diferentes escalas de la turbulencia sugiere el empleo de la noción de espectro de la turbulencia, determinable a partir de las correlaciones. Esa función la cumple la "función espectral de Heisenberg".

K) FUNCION ESPECTRAL. [8]

definamos la velocidad fluctuante (temporal) en un punto:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} db(\lambda) \quad (\text{K.1})$$

donde:

$b(\lambda)$ función aleatoria (a incrementos ortogonales)

$$\lambda' \neq \lambda: \overline{db^*(\lambda) db(\lambda')} = 0$$

tal que

$$\lambda' = \lambda: \overline{|db(\lambda)|^2} = 0$$

Si la turbulencia es *homogenea* (si en un cierto dominio del espacio Λ las correlaciones de velocidad tales como

$$R = \overline{\sum u_\alpha(x) u_\alpha(x + \xi = x')} = R(\xi) \text{ podríamos expresar:}$$

$$u_\alpha(x; t) = \text{componente fluctuante según } \alpha = \int_{\Lambda} e^{i \sum_{p=1}^3 \lambda_p x_p} db_\alpha(\lambda; t) \quad (\text{K.2})$$

donde:

$b_\alpha(\lambda; t)$ función aleatoria de $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$
(a incrementos ortogonales)

$\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ "número de onda", equivalente en el espacio Λ a la frecuencia.

puesta que por definición tenemos (K.1) podríamos expresar para el caso (K.2):

$$\overline{[dh_a^*(\lambda; t) dh_\beta(\lambda; t) \neq 0]} = \varphi_{\alpha\beta}(\lambda; t) d\lambda \quad (\text{K.3})$$

donde:

$\alpha; \beta$ componentes
 $\varphi_{\alpha\beta}$ una "función espectral"

podríamos expresar para la correlación $R_{\alpha\beta}$

$$R_{\alpha\beta}(\xi) = \overline{u_\alpha(x) u_\beta(x + \xi)} = \int_{\Delta} e^{i \sum_{p=1}^3 \lambda_p \xi_p} \varphi_{\alpha\beta}(\lambda) d\lambda \quad (\text{K.4})$$

El tensor de correlaciones $R_{\alpha\beta}(\xi)$ es pues la transformada de Fourier del tensor espectral $\varphi_{\alpha\beta}(\xi)$, esto último sometido a dos condiciones:

a) $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^*$ (simetría hermitiana)

b) $\sum_{\alpha; \beta=1}^3 x_\alpha x_\beta^* \varphi_{\alpha\beta} =$ (cualquiera que sea el número complejo x_α) = no puede ser negativo

Todo sistema de números $\varphi_{\alpha\beta}$ que satisfagan esas condiciones puede servirnos de tensor espectral.

Si la turbulencia es *isótropa* ($R_{\alpha\beta}$ invariante a toda rotación), podemos definir el tensor $\varphi_{\alpha\beta}(\lambda)$ con ayuda de dos funciones A y B :

$$\varphi_{\alpha\beta}(\lambda) = A(K) \lambda_\alpha \lambda_\beta + B(K) \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{K.5})$$

donde:

$$K^2 = [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2]$$

Si además el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad se expresa:

$$\sum \frac{\partial u_a}{\partial x_a} = 0 = i \int_{\Lambda} e^{i \sum_{p=1}^3 \lambda_p x_p} \sum \lambda_a dh_a = 0 \quad (K.6)$$

tal que:
$$\sum \lambda_a dh_a = 0 \quad (K.7)$$

y en particular, considerando a la componente β como fija:

$$\sum_{a=1}^3 \lambda_a \varphi_{a\beta}(\lambda) = 0 \quad (K.8)$$

haciendo:

$$A = - \frac{F(K)}{4\pi K^2} = - B \quad (K.9)$$

de (K.5); (K.8) y (K.9) :

$$\varphi_{a\beta} = \frac{F(K)}{4\pi K^2} \left[\delta_{a\beta} - \frac{\lambda_a \lambda_{\beta}}{K^2} \right] \quad (K.10)$$

donde $F(K)$ se denomina "función espectral" de Heisenberg.

La interpretación física de $F(K)$ es (no incluimos, por comodidad, el desarrollo matemático) tal que:

1.- *Energía de agitación turbulenta* (por unidad de masa):

$$E = \frac{1}{2} \sum \overline{u_a^2} = \int_0^{\infty} F(K) dK \quad (K.11)$$

2.- *Frecuencia espectral* K :

Recordando lo dicho en el inciso A) de las preliminares:

Si $K \rightarrow 0$: escala $\rightarrow \infty$: grandes escalas de la turbulencia.

Si $K \rightarrow \infty$: escala $\rightarrow 0$: pequeñas escalas, estructura fina de la turbulencia.

el límite $K \rightarrow \infty$ sería la agitación molecular propiamente dicha.

Por consideraciones puramente cinemáticas se ha obtenido la definición de la función espectral $F(K)$. De las consideraciones anteriores nos sería posible obtener (no incluimos, por comodidad, el desarrollo matemático) a $F(K)$ como una función explícita de la correlación $R(\xi)$.

Cumplimos pues las condiciones pedidas en el inciso J):

- 1.- Las diferentes escalas de la turbulencia se caracterizan en la función espectral $F(K)$.
- 2.- La función espectral $F(K)$ se obtiene indirectamente a partir de la determinación experimental de las correlaciones.
- 3.- No se ha supuesto, a priori, la validez de las ecuaciones de Navier.

Se han hecho, sin embargo, las siguientes hipótesis:

- 1.- Incompresibilidad del fluido
- 2.- Homogeneidad de la turbulencia
- 3.- Isotropía de la turbulencia.

L) FUNCION ESPECTRAL EXPERIMENTAL.

Tres casos son característicos experimentalmente en cuanto a la estructura del espectro de la turbulencia.

- a) Turbulencia inherente a túneles de alta velocidad.
- b) Turbulencia provocada por una rejilla.
- c) Capa límite turbulenta.

La hipótesis más difícil de constatar experimentalmente hace referencia a la isotropía. Las experiencias de Favre, y en particular de Dumas [10], parecen indicar isotropía de la turbulencia a toda escala de la turbulencia (K) en los casos a) y b) (si bien ciertas dudas se ofrecen para $K \rightarrow 0$ en el caso rejilla) y anisotropía de la capa límite turbulenta para las grandes escalas de la turbulencia ($K \rightarrow 0$).

Consideramos, sin embargo, como válida la hipótesis de Kolmogoroff [8]: Caractericemos las escalas de la turbulencia por el número de Reynolds:

$$R_m = \frac{u_f \cdot m}{\nu} \quad (\text{L.1})$$

donde: u_f Velocidad fluctuante característica de la escala

$$m (\sim K^{-1})$$

m orden de magnitud de la escala
 ν viscosidad cinemática

para grandes y medianas escalas $m \gg 0$ tal que $R_m \gg 0$: Fuerzas de inercia \gg Fuerzas de viscosidad. Consideramos pues inexistente fenómenos de disipación energética para las grandes y medianas escalas. Para pequeñas escalas $R_m \ll 1$: Fuerzas de inercia \sim Fuerzas de viscosidad.

La disipación energética se efectúa pues en las pequeñas escalas de la turbulencia, esto es: la energía de agitación turbulenta se transmite íntegramente de las grandes y medianas escalas a las pequeñas escalas de la turbulencia, en

donde se disipa en calor. Tal hipótesis se constata experimentalmente.

Ahora bien, es precisamente para las pequeñas escalas de la turbulencia en donde la hipótesis de isotropía es válida experimentalmente (incluso en el caso capa límite). Las hipótesis del inciso K) que permitieron la determinación de $F(k)$, permanecen válidas.

M) HIPOTESIS CUANTICA.

Como caso característico representamos gráficamente las soluciones teóricas obtenidas hasta la fecha para $F(k)$ para el caso rejilla. La Fig. 3 es cercana a la gráfica que se obtiene experimentalmente (para una determinada velocidad de conjunto del fluido).

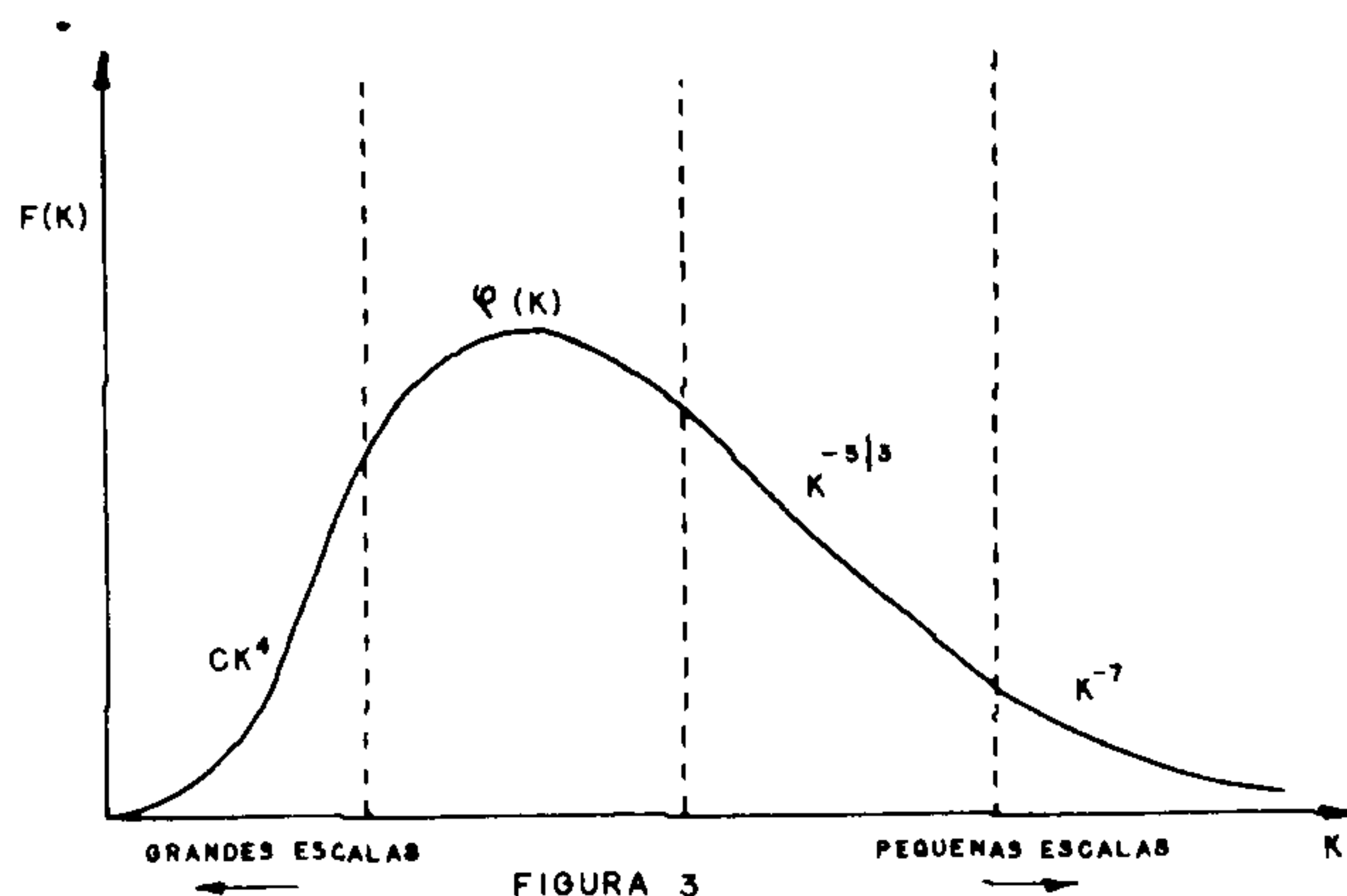


FIGURA 3

Tomando en cuenta las teorías más características:

1.- Loitsiansky: $(0 \leq k \leq k_1)$

$$F(k) \sim K^4 \text{ en la vecindad de } K = 0 \quad (\text{M.1})$$

2.- Heisenberg (y Kolmogoroff):

$$F(k) \sim K^{-5/3} (k_2 \leq k \leq k_3) \quad (\text{M.2})$$

$$F(k) \sim K^{-7} : K \rightarrow \infty \quad (k > k_3) \quad (M.3)$$

3.- Heisenberg: en la región $(k_1 \leq k \leq k_2)$ considera un estado de equilibrio entre la energía de movimiento cedida de las grandes escalas a las pequeñas escalas, en donde hay disipación viscosa, tal que:

$$F(k) = \varphi(k) \quad (k_1 \leq k \leq k_2) \quad (M.4)$$

Cabe señalar:

- 1.- Todas estas teorías no explican más que parcialmente la estructura experimental de $F(k)$.
- 2.- Todos consideran la validez de las ecuaciones de Navier.

Por otro lado, una teoría coherente de la turbulencia debe explicar:

$$F(k) : \quad 0 \leq k \leq \infty \quad (M.5)$$

sin aceptar las ecuaciones de Navier.

El área bajo la curva en la Fig. 3 representa la energía de agitación turbulenta. La curva es completamente análoga a la obtenida por Planck [11] para explicar la radiación del cuerpo negro.

Podríamos pues asimilar la estructura de la turbulencia a un sistema de osciladores armónicos (asociados a cada escala de la turbulencia) en donde cada estado propio nos determine rangos o niveles fijos de la energía de movimiento asociado a cada escala. La estructura de la turbulencia sería de naturaleza cuántica.

N) PROBLEMAS DE INVESTIGACION EN EL PROCESO UNITARIO.

Consecuentemente con lo dicho en incisos anteriores, la explicación del proceso unitario:

Flujo laminar \rightarrow Transición \rightarrow Flujo turbulento (N.1)

deberá plantearse:

- 1.- Reestructurar las ecuaciones de movimiento al nivel microscópico, a partir de la mecánica estadística, tomando en cuenta el comportamiento cuántico del proceso unitario (el flujo laminar no sería otra cosa que un caso límite). Lógicamente no se obtendrán las ecuaciones de Navier.
- 2.- Dado que el flujo laminar constituye el caso límite simplificado, cabría plantear el estudio en sentido inverso, por facilidad matemática, a como ocurre físicamente:

Flujo turbulento \rightarrow Transición \rightarrow Flujo laminar

(Número de Reynolds \rightarrow 0)

esto es, de acuerdo a la mecánica estadística, como un sistema en desequilibrio en evolución que se fuera "ordenando" progresivamente (a la inversa del planteamiento de Prigogine, en el sentido del incremento "negativo" de entropía). Cabe señalar que en este caso no nos interesa tanto la validez física de la inversión del proceso como la validez física de los resultados a los que llevaría los dos casos límite del proceso: flujo laminar y flujo turbulento.

- 3.- En cuanto a la labor experimental debería ser dirigida fundamentalmente a la determinación directa de la función espectral, no solamente para el flujo turbulento plenamente desarrollado, sino determinar sus características a lo largo de todo el proceso (a todo valor de R).

REFERENCIAS

1. Schlichting: "Boundary Layer Theory", Mc Graw Hill.
2. Cowling: "Magneto-hydrodynamique", Ed Dunod.
3. Koppel: "On the Stability Flow of a Thermally Stratified Fluid under the Action of Gravity", J. of Math. Phys. July 1964.
4. Schlichting: "A Background of the Problems of Boundary Layer Research", AGARD; N° 253.
5. Stuart: "On the Non-linear Mechanics of Hydrodynamic Stability", J. Fluid Mech.; 4; 1958.
6. Prigogine and Glansdorff: "On a General Evolution Criterium in Macroscopic Physics", Physica; 30; 1964.
7. Markovin: "Transition from Laminar to Turbulent Shear Flow", Trans. ASME, 80; 1958.
8. Agostini et Bass: "Les Theories de la Turbulence", ONERA, 1960.
9. Massignon: "Mecanique Statistique des Fluides", Ed. Dunod.
10. "Contribution a l'Etude des Spectres de Turbulence", These de Docteur; Marseille.
11. Bohm: "Quantum Theory", Prentice Hall.

Esta página está intencionalmente en blanco