

## SOBRE LA SOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Luis de la Peña Auerbach\*

Instituto de Física, Universidad Nacional de México

(Recibido: Abril 20, 1966)

## RESUMEN

*En este trabajo se obtiene una expresión exacta para todas las raíces de una ecuación algebraica de grado  $n$ . Asimismo, se desarrolla un método que permite simplificar considerablemente los resultados anteriores y que consiste en transformar el problema inicial en el del cálculo de una cierta función de dos parámetros  $S_Y(u)$ . Aunque las soluciones así obtenidas son solo aproximadas, esta variante posee varias ventajas, como la de ser aplicable aún fuera de la región de convergencia de los resultados iniciales, permitir la obtención de fórmulas simplificadas -aplicables frecuentemente a problemas algebraicos-, permitir la tabulación de raíces, etc. Se estudian algunas de las propiedades más importantes de la función  $S_Y(u)$  y se obtienen fórmulas aproximadas para ella. Se incluyen algunas curvas para la determinación rápida de esta función en problemas numéricos.*

---

\* Asesor de la Comisión Nacional de Energía Nuclear.

## ABSTRACT

*An exact solution for all the roots of an algebraic equation of degree  $n$  is obtained in this paper. A method is then developed which allows a great simplification of the results; this method consists in the transformation of the original problem into that of the evaluation of a two-parameter function  $S_y(u)$ . Although the new solutions are only approximate, this line of attack is applicable outside the region of convergence of the original results, to obtain simplified algebraic formulae; it also allows simple tabulation of the roots. In view of this, some of the properties of this function  $S_y(u)$  are studied and some approximate formulae for its evaluation are given. Curves for the rapid determination of this function for numerical problems are included.*

## INTRODUCCION

En el presente trabajo <sup>\*\*</sup> se muestra que es posible obtener una expresión exacta para las  $n$  raíces de la ecuación

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$$

La solución encontrada está dada por una serie de potencias del parámetro  $a_0$ , cada uno de cuyos coeficientes toma  $n$  valores, uno para cada raíz. Dichos coeficientes se determinan en forma recurrente a partir de las soluciones de una ecuación de grado  $n-1$ , obtenida de la ecuación original y que es llamada en este trabajo, la resolvente reducida de dicha ecuación. Estos son los resultados esenciales de la Sección 1.

Como es de esperarse, la serie obtenida no necesariamente es convergente para todo valor de sus argumentos. Este problema se analiza someramente en la Sección 2 y mas adelante (Sección 4) se muestra que para ciertos casos de interés

---

<sup>\*\*</sup> Un resumen de este trabajo fué presentado en el Congreso de la Sociedad Mexicana de Física, Octubre 1965, Mérida, Yuc.

general, existe un estrecho vínculo entre las condiciones de convergencia y de realidad de las raíces.

Cuando las fórmulas de la Sección 1 convergen con suficiente rapidez, los resultados obtenidos son directamente aplicables tanto a problemas numéricos (ejemplo en el Apéndice I) como a problemas algebraicos (ejemplo en el Apéndice II).

Aparte de las posibles dificultades por no convergencia, las fórmulas derivadas tienen el inconveniente de su complejidad. Por este motivo, en la Sección 3 se presenta un método que permite simplificar considerablemente los resultados de la Sección 1, expresando las raíces buscadas en términos de una cierta función  $S_\gamma(u)$ . Estos nuevos resultados son, sin embargo, solo aproximados (el error introducido crece conforme  $|u| \rightarrow \infty$ ).

En estas condiciones, el problema de la resolución de la ecuación original se ha transformado en el problema del cálculo de  $S_\gamma(u)$ . Asimismo, es en esta función en donde se concentra el problema de convergencia. Debido a estas razones, el resto del trabajo se consagra al estudio de algunas propiedades de dicha función (Sección 4) y a la obtención de fórmulas aproximadas y simples para su cálculo, las cuales no pierden totalmente su validez fuera de la región de convergencia original (Sección 5). Algunos de los resultados de esta última parte se pueden representar gráficamente, o bien tabular, con el objeto de simplificar mas aún el cálculo numérico. En los Apéndices III-V se presentan otros ejemplos simples de aplicación de los métodos desarrollados; todos los ejemplos poseen solo carácter ilustrativo.

El presente trabajo debe ser considerado como introductorio al tema. Es fácil notar que la mayoría de las ideas aquí presentadas pueden ser elaboradas con mucha mayor profundidad y amplitud. Sin embargo, el autor considera que en su forma actual, la teoría es ya directamente aplicable a la inmensa mayoría de los problemas relativos al tema que con tanta frecuencia ocurren en muy diversas ramas de la física y la técnica.

## I.- DESARROLLOS GENERALES

Sea  $y = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$  un polinomio en  $x$  de grado  $n$  con coeficientes reales.

Supondremos que la ecuación

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \quad (1)$$

(que por hipótesis no posee raíces múltiples\*) admite como solución la serie infinita

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} b_j a_0^j = b_0 + \delta, \quad (2)$$

en donde

$$\delta = \sum_{s=1}^{\infty} b_s a_0^s. \quad (2a)$$

La sustitución de (2) en (1) conduce a

$$y(b_0 + \delta) = y_0 + y_0' \delta + \dots + \frac{1}{n!} y_0^{(n)} \delta^n = 0 \quad (3)$$

en donde se ha usado la escritura abreviada

$$y_0^{(k)} = \left. \frac{d^k y}{dx^k} \right|_{x=b_0} \quad (3a)$$

---

\* Si la ecuación original poseyera raíces múltiples, se supone que se ha procedido a su eliminación, mediante el máximo común divisor del polinomio original y su primera derivada.

Puesto que (3) debe ser válida para toda  $a_0$ , es posible determinar unívocamente  $b_k$  anulando por separado los coeficientes de  $a_0^k$  en (3). En particular, para  $k = 0$  se tiene  $y_0 - a_0 = 0$ , o bien, en forma explícita:

$$a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \dots + a_n b_0^n = 0 \quad (4)$$

La solución de (4) proporciona  $n$  valores para el parámetro  $b_0$ , incluyendo la solución trivial  $b_0 = 0^*$ . Por su particular importancia a (4) le llamaremos la ecuación resolvente de (1) y a la ecuación  $a_1 + a_2 b_0 + \dots + a_n b_0^{n-1} = 0$ , obtenida de la resolvente por eliminación de la raíz trivial  $b_0 = 0$ , le llamaremos la ecuación resolvente reducida (R R) de (1). A su vez, para  $k = 1$  se obtiene  $1 + b_1 y_0' = 0$ , o bien

$$b_1 = -\frac{1}{y_0'} \quad (5)$$

Para la determinación de  $b_k$  para  $k \geq 2$ , se puede proceder de la siguiente manera. Insertando (2a) en (3) se tiene

$$\sum_{m=0}^n y_0^{(m)} \sum_{k_j} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_n^{k_n} a_0^s = 0 \quad (6)$$

con

$$m = \sum_j k_j, \quad s = \sum_j j k_j \quad (6a)$$

(la suma respecto a  $k_j$  se realiza sobre todos los posibles valores enteros positivos o nulos de  $k_1, k_2, \dots$  que satisfacen (6a)). La expresión (6) se puede satisfacer idénticamente anulando el coeficiente de  $a_0^s$  para cada  $s$  dada  $\geq 2$  con  $m$

---

\*Se propone expresar  $x$  como serie de potencias de  $a_0$  para asegurar que en todo caso la resolvente posea al menos una raíz trivial. Si el desarrollo de  $x$  se hace respecto de otro coeficiente  $a_k$  de (1), no necesariamente se tendrá esta facilidad y la solución de la ecuación que sustituyera a (4) sería equivalente a la solución de la ecuación original.

carriando desde 1 hasta su máximo valor  $m_{\max} = s$  que corresponde a  $k_1 = s$ . Se obtiene así el sistema de ecuaciones

$$\sum_{m=1}^s y_0^{(m)} \sum_{k_j} \frac{1}{k_1! k_2! \dots} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots = 0, \quad (7)$$

que puede reescribirse en la siguiente forma, separando el término que corresponde a  $k_s = 1$ ,  $k_j = 0$ ,  $j = s$ :

$$y_0' b_s + \sum_{m=2}^s y_0^{(m)} \sum_{k_j} \frac{1}{k_1! k_2! \dots} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots = 0$$

Tomando ahora en cuenta (5) se tiene la siguiente fórmula recursiva para la determinación de los coeficientes  $b_c$ :

$$b_s = b_1 \sum_{m=2}^s y_0^{(m)} \sum_{k_j} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{s-1}!} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_{s-1}^{k_{s-1}}, \quad (s \geq 2) \quad (8)$$

Usando en (5) y (8) los  $n$  valores de  $b_0$  dados por la solución de la resolvente (4) se obtienen las  $n$  raíces de (1):

$$x_l = \left[ b_0 + a_0 b_1 + b_1 \sum_{m=2}^s y_0^{(m)} \sum_{k_j} \frac{a_0^s}{k_1! k_2! k_3! \dots} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \dots \right]_l, \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

(9)

en donde el índice  $l$  se refiere a cada uno de los  $n$  juegos de valores de  $b_k = b_k^{(l)}$ . Por razones de simplicidad en la escritura, el índice  $l$  se omitirá en lo sucesivo en general.

Supóngase ahora que  $a_0 \rightarrow 0$ ; se tiene entonces, según (9), que  $x_l \sim b_0^{(l)}$  y a  $b_0^{(l)}$  se le puede considerar como la aproximación de orden cero de  $x_l$  y a los términos sucesivos en (9), las sucesivas correcciones de orden 1, 2, ... Luego la solución trivial de la resolvente corresponde, en particular, a la raíz de (1) de módulo menor, la cual está dada por ( $b_0 = 0$ ,  $b_1 = -\frac{1}{a_1}$ ,  $y_0^{(m)} = m! a_m$ )

$$x_{\text{mod menor}} = -\frac{a_0}{a_1} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m}{a_1} \sum_{k_j} \frac{m!}{k_1! k_2! \dots} a_0^s b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots \quad (9a)$$

En forma explícita, los primeros coeficientes  $b_j$  son

$$b_2 = \frac{1}{2!} y_0'' b_1^3,$$

$$b_3 = \frac{1}{3!} y_0''' b_1^4 + \frac{1}{2} (y_0'')^2 b_1^5, \quad (10)$$

$$b_4 = \frac{1}{4!} y_0^{(4)} b_1^5 + \frac{5}{12} y_0'' y_0''' b_1^6 + \frac{5}{8} (y_0'')^3 b_1^7,$$

con  $b_1$  dado por (5) para cada  $b_0$  solución de (4). La introducción de (10) en (9) permite escribir:

$$x = b_0 + a_0 b_1 \left( 1 + \frac{1}{2!} y_0'' b_1^2 a_0 + \dots \right) \quad (9b)$$

Para dar a (9) una forma más conveniente, definamos  $n-1$  nuevos parámetros

$$\lambda_k = \frac{1}{k!} y_0^{(k)} a_0^{k-1} b_1^k, \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad (11)$$

(cuya determinación exige el conocimiento previo solo de  $b_0$  y  $b_1$ ) y en términos de los cuales (9) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 x &= b_0 + a_0 b_1 \left[ 1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots) + \right. \\
 &+ (2\lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 + 4\lambda_4^2 + \dots + 5\lambda_2 \lambda_3 + 6\lambda_2 \lambda_4 + \dots + 7\lambda_3 \lambda_4 + \dots) + \\
 &+ (5\lambda_2^3 + 12\lambda_3^3 + 22\lambda_4^3 + \dots + 21\lambda_2^2 \lambda_3 + 28\lambda_2^2 \lambda_4 + \dots + \\
 &+ 28\lambda_2 \lambda_3^2 + 45\lambda_3^2 \lambda_4 + \dots + 45\lambda_2 \lambda_4^2 + 55\lambda_3 \lambda_4^2 + \dots + 72\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 + \dots) \\
 &\left. + \dots \right] = \\
 &= b_0 + a_0 b_1 \left[ 1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k S_k + \sum_{k,j} \lambda_k \lambda_j S_{kj} + \dots \right], \quad (12)
 \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 S_k &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(kl)!}{l!(k-l+1)!} \lambda_k^{l-1} = 1 + k\lambda_k + \frac{1}{2!} k(3k-1)\lambda_k^2 + \\
 &+ \frac{1}{3!} k(4k-1)(4k-2)\lambda_k^3 + \dots
 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$S_{km} = \sum_{s,s'=0}^{\infty} \frac{[m(s+1) + k(s'+1)]!}{[m(s+1) + k(s'+1) - s - s' - 1]! (s+1)! (s'+1)!} \lambda_k^{s'} \lambda_m^s \quad (13b)$$

(Nótese que  $S_k$ ,  $S_{km}$ , etc., no dependen del grado de la ecuación a resolver).

En el apéndice se dan algunos ejemplos simples de aplicación de los resultados recién derivados.



## 2. Convergencia.

La fórmula (12) resuelve en principio el problema planteado, permitiendo calcular las  $n$  raíces de la ecuación original, si dicha expresión no diverge.

Es fácil demostrar que  $S_k, S_{k+1}, \dots$  convergen absolutamente si

$|\lambda_k| < \lambda_k^{\max} = \frac{1}{k} \left( \frac{k-1}{k} \right)^{k-1} \approx \frac{1}{ke}$  para  $k \gg 1$ . Tomando esto en cuenta, se puede demostrar que la serie (12) es absolutamente convergente en la región  $|\sum k \lambda_k| < \frac{1}{e}$ . Resultados análogos serán establecidos en forma más simple mas adelante.

Supóngase ahora que (algunas de) las  $\lambda_k$  de una ecuación dada no satisfacen las condiciones de convergencia. Es posible entonces modificar la ecuación original en tal forma que los nuevos parámetros  $\lambda_k$  satisfagan dichas condiciones y los resultados de la Sección 1 adquieran sentido. En efecto, sea

$f(w) = \sum_{k=0}^n g_k w^k = 0$  la ecuación a resolver. Haciendo el cambio de variable  $w = x_0 + x$ , en donde  $x_0$  es un valor adecuadamente escogido, la ecuación se transforma en  $\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$ , con  $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ . Se tendrá así, para el caso  $b_0 = 0$ , que los nuevos parámetros  $\lambda_k$  están dados por

$$\lambda_k = -\frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(x_0)}{f'(x_0)} \left( -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right)^{k-1} \quad (14)$$

Puesto que la ecuación original, por hipótesis, no posee raíces múltiples siempre es posible encontrar una  $x_0$  tal que  $f(x_0)$  sea suficientemente pequeña y  $f'(x_0) \neq 0$ , en tal forma que todos los nuevos parámetros  $\lambda_k$  dados por (14) satisfagan las condiciones de convergencia, como se afirmó arriba.

## 3. Fórmulas aproximadas.

Las fórmulas obtenidas en la Sección 1 son exactas, pero su validez está limitada a la región de convergencia, lo que en muchos casos puede impedir su

aplicación directa. Supóngase, como ejemplo, que la raíz de módulo menor de una cierta ecuación es compleja. Es evidente que en estas condiciones la serie (12) será divergente para  $b_0 = 0$ , puesto que dicha serie solo puede convergir a valores reales para  $b_0$  real. Más adelante se demostrará que la divergencia de  $S_k(\lambda_k)$  dada por (13a) para  $k$  y  $\lambda_k > 0$  reales significa, en efecto, que  $S_k(\lambda_k)$  es compleja y no es posible por lo tanto calcularla con las fórmulas de la Sección 1. Problemas de esta naturaleza serán revisados en las Secciones 4 y 5, en donde se obtendrán expresiones aproximadas cerradas para la función  $S_k(\lambda_k)$ .

Otro inconveniente de los resultados de la Sección 1, es lo relativamente complicado de las fórmulas obtenidas, lo que reduce considerablemente la posibilidad de usarlas para expresar algebraicamente las raíces de una ecuación dada. Con la intención de hacer soluble, aunque sea solo en forma aproximada, un grupo mas amplio de problemas algebraicos, en este párrafo se mostrará como es posible obtener fórmulas aproximadas pero considerablemente mas simples que (9) o (12).

Naturalmente, estos resultados pueden servir también para obtener una primera aproximación numérica de las raíces que sirva de base para el empleo de alguno de los métodos numéricos que exigen su previa localización.

Con este objetivo, definamos dos nuevos parámetros  $u$  y  $v$ :

$$u \equiv \sum_{k=2}^n \lambda_k = \frac{1}{a_0} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} y^{(k)}(b_0) (a_0 b_1)^k = \frac{1}{a_0} y(b_0 + a_0 b_1) \quad (15)$$

$$v \equiv \sum_{k=2}^n k \lambda_k = b_1 [y'(b_0 + a_0 b_1) - y'(b_0)] = 1 + b_1 y'(b_0 + a_0 b_1) \quad (16)$$

Tenemos:

$$uv = 2\lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 + 4\lambda_4^2 + \dots + 5\lambda_2\lambda_3 + 6\lambda_2\lambda_4 + \dots + 7\lambda_3\lambda_4 + \dots$$

$$\frac{1}{3!} 3uv(3v - u) = 5\lambda_2^3 + 12\lambda_3^3 + 22\lambda_4^3 + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + (21 - \frac{1}{2}) \lambda_2^2 \lambda_3 + (28 - 2) \lambda_2^2 \lambda_4 + \dots + (28 - \frac{1}{2}) \lambda_2 \lambda_3^2 + \\
& + (45 - \frac{1}{2}) \lambda_3^2 \lambda_4 + \dots + (45 - 2) \lambda_2 \lambda_4^2 + (55 - \frac{1}{2}) \lambda_3 \lambda_4^2 + \dots \\
& + (72 - 3) \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 + \dots ,
\end{aligned}$$

etc. Comparando estos resultados con (12) se ve que es posible escribir en forma *aproximada*:

$$\begin{aligned}
x &= b_0 + a_0 b_1 \left[ 1 + u + uv + \frac{1}{2!} uv(3v-u) + \frac{1}{3!} uv(4v-u)(4v-2u) + \dots \right] \\
&\equiv b_0 + a_0 b_1 [1 + u + s'] ,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$(\gamma = \frac{v}{u})$$

en donde

$$s' = uv \left[ 1 + \frac{1}{2!} (3\gamma - 1) u + \frac{1}{3!} (4\gamma - 1)(4\gamma - 2) u^2 + \dots \right] .$$

Usando ahora la definición (13a) con  $k \rightarrow \gamma$  ( $\gamma$  no necesariamente entera), se tiene

$$\begin{aligned}
s' &= u \left[ \gamma u + \frac{1}{2!} \gamma (3\gamma - 1) u^2 + \frac{1}{3!} \gamma (4\gamma - 1)(4\gamma - 2) u^3 + \dots \right] = \\
&= u [-1 + S_\gamma(u)] ,
\end{aligned} \tag{19}$$

por lo que (17) se puede escribir como

$$x = b_0 + a_0 b_1 [1 + u S_\gamma(u)] , \quad (20)$$

que es la fórmula buscada. Ejemplos concretos de aplicación de (20) se encuentran en el apéndice

De acuerdo a los resultados de la Sección 2,  $S_\gamma(u)$  es absolutamente convergente si

$$|v| = |\gamma u| < v_0 = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\gamma - 1} \rightarrow \frac{1}{e} \text{ si } \gamma \rightarrow \infty \quad (21)$$

La aplicación de (20) a un problema concreto ofrece dos tipos de dificultades:

a) La primera es de carácter meramente práctico y se refiere al cálculo de  $b_0^{(l)}$ . El proceso directo de determinación de  $b_0^{(l)}$  exige la solución de la resolvente reducida de la ecuación original, es decir, de una ecuación de grado  $n-1$ . Esto se puede realizar aplicando el mismo procedimiento a dicha resolvente reducida y continuando en esta forma hasta llegar a la ecuación  $a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2} = 0$ , que se tomará como punto de partida. En esta forma se determinarán los  $n-1$  valores no triviales de  $b_0^{(l)}$ , que se insertarán en (20) para la determinación aproximada y simultánea de las  $n$  raíces.

La necesidad de resolver la RR puede eliminarse si en sustitución del método anterior se utiliza un proceso de cálculo sucesivo de las raíces. Para ello, en la fórmula (20) se emplea solo la solución trivial  $b_0 = 0$  para determinar la raíz de módulo menor, la cual se elimina de la ecuación original. A la ecuación resultante de grado  $n-1$  se le aplica el mismo procedimiento, el cual se continúa en la forma habitual hasta obtener la solución completa.

b) La segunda dificultad, sin embargo, es de carácter principal: en el momento actual los dos programas de cálculo mencionados en a) pueden no ser realizables debido a dificultades de convergencia que impiden la determinación de  $S_\gamma$ .

Se ha mostrado en la Sección 2 que *en principio* esta dificultad es siempre eliminable escogiendo adecuadamente el valor de  $x_0$ ; sin embargo, la selección de valores adecuados de  $x_0$  es equivalente al previo conocimiento de la localización de las raíces.

La solución efectiva de este problema consiste en la obtención de una fórmula cerrada para la función  $S_\gamma$  válida por todo valor de sus argumentos. Expresiones explícitas de esta naturaleza no son fáciles de obtener (suponiendo que existan), por lo que en el presente trabajo nos limitaremos a la deducción de una fórmula cerrada, pero implícita, de  $S_\gamma$  (ver (21)) y al estudio, mediante ella, de algunas propiedades de dicha función (Sección 4) para, mas adelante (Sección 5), obtener una fórmula aproximada y simple de ella (ver (36)) que no pierde totalmente su validez fuera de la región de convergencia de (13a). Con la ayuda de estos resultados, la fórmula (20) adquiere mayor interés práctico, tanto para la solución de problemas algebraicos como numéricos.

#### 4. La función $S_\gamma(u)$ .

Para llevar adelante el programa previamente trazado, definamos una nueva función  $f = f(\gamma, u)$  tal que  $S_\gamma(u) = f^\gamma$ . Proponiendo que es posible desarrollar  $f$  en serie de potencias de  $u$ ,  $f = \sum a_s u^s$  con  $a_0 = 1$ , se tiene, según (13a):

$$S_\gamma = f^\gamma \equiv (1 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots)^\gamma = 1 + \gamma u + \frac{1}{2!} \gamma(3\gamma - 1) u^2 + \dots$$

Desarrollando e igualando coeficientes de  $u^k$  se obtiene

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \gamma, \quad a_3 = \frac{1}{2!} \gamma(3\gamma - 1), \dots,$$

y, en consecuencia, usando nuevamente (13a):

$$S_\gamma = [1 + u + \gamma u^2 + \frac{1}{2!} \gamma(3\gamma - 1) u^3 + \dots]^\gamma = (1 + u S_\gamma)^\gamma. \quad (22)$$

En lo sucesivo, se considerará que (22) define la función  $S_\gamma$ .

Sea ahora

$$z = 1 + uS \quad (23)$$

(por simplicidad se omite el índice  $\gamma$ ).

En función de  $z$ , (22) toma la forma

$$uz^\gamma - z + 1 = 0 \quad (24)$$

y las soluciones de (1), según (20), se escriben como

$$x = b_0 + a_0 b_1 z, \quad (25)$$

para cada  $b_0^{(l)}$ .

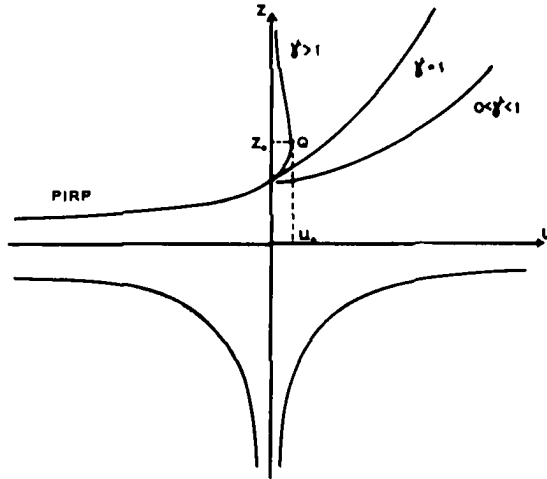
A continuación se analiza la función  $z = z_\gamma(u)$  para valores reales de  $\gamma > 1$  y  $u$  real. Esta limitación se adopta fundamentalmente por razones de simplicidad del análisis y está parcialmente justificada por el hecho de que el parámetro

$$\gamma = \frac{v}{u} = \frac{2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + \dots}{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots} = 2 + \frac{\lambda_3 + 2\lambda_4 + \dots}{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots}$$

toma frecuentemente valores cercanos a 2 (suponiendo  $\lambda_k \neq 0$ ,  $|\lambda_k| > |\lambda_{k+j}|$ , como frecuentemente es el caso en las aplicaciones numéricas).

La ecuación (24) con  $\gamma$  y  $u$  reales posee un número variable de soluciones reales. En la figura 1 se muestra  $z$  como función de  $u$  (no a escala) con  $\gamma$  como parámetro. Las ramas situadas en el semiplano inferior (que llamaremos ramas accesorias) existen solo para ciertos valores de  $\gamma$ , a diferencia de la rama situada en el semiplano superior (que llamaremos rama principal), la cual existe para toda  $\gamma$  real  $> 0$ . Es fácil mostrar que para  $\gamma > 1$  la rama principal (RP) posee un punto

$Q(u_0, z_0)$  para el cual  $\frac{dz}{du} = \infty$ . A la sección monótona de la RP comprendida entre  $z = 0$  y  $z = z_0$  le llamaremos parte inferior de la rama principal (PIRP). A continuación se analizan algunas características de la PIRP, que es la porción de la función que tiene especial interés en nuestro caso (en el apéndice IV se hace un análisis mas completo de la función  $z$  para el caso de las ecuaciones cúbicas).



Como se ha dicho, el punto  $Q$  (fig. 1) está definido por la relación  $\frac{dz}{du} = \infty$  para  $\gamma > 1$  y posee las coordenadas

$$v_0 = \gamma u_0 = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\gamma - 1}, \quad (26a)$$

$$z_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (26b)$$

Además,  $z$  es real y positiva (ver fig. 1) para toda  $u \leq u_0 = \frac{v_0}{\gamma}$  y compleja para  $u > u_0$ , es decir,  $S_\gamma$  es real para  $v = \gamma u \leq v_0$  y compleja en caso contrario. Como, por otra parte, si  $b_0$  es real, son también reales  $b_1, u, v$  y  $\gamma$  (ver sus respectivas definiciones), se concluye, de acuerdo con (20), que

la ecuación (1) posee una raíz real por cada solución real de su resolvente, para la cual es cierto que

$$a) v \leq v_0 = \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\gamma-1} \text{ si } \gamma > 1,$$

$$b) 0 < \gamma \leq 1 \text{ (sin restricción sobre } v).$$

Si  $\gamma > 1$  pero  $v > v_0$ , la correspondiente raíz de (1) es compleja.

Como caso particular de los resultados anteriores se tiene que  $S_\gamma$  es real si  $|v| < v_0$ , para toda  $\gamma$  y  $v$  reales. Esta última relación coincide con la condición de convergencia absoluta de  $S_\gamma$  (ver (21)). Por lo tanto, la serie (13a) converge absolutamente si la raíz en cuestión es real, con  $\gamma > 1$  y  $u$  real. La divergencia de  $S_\gamma$  es así, en este caso, indicio de la existencia de una raíz compleja. (En el caso  $u < 0$ ,  $|u| > u_0$  la serie (13a) es alternante y más que divergencia se tiene indeterminación de su valor, que es real).

Es posible demostrar que para toda  $u$  real se tiene  $0 \leq |z| \leq z_0^*$ . Puesto que para  $u \leq u_0$  en efecto se cumple esta relación (ver fig. 1), basta demostrar su validez para  $u > u_0$ , es decir, para  $z$  compleja. Para ello, sea

$$z = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}, \quad u > u_0 \quad (27)$$

Introduciendo (27) en (24) y separando parte real e imaginaria se obtiene:

$$\gamma \operatorname{sen} \gamma \varphi = \operatorname{sen}(\gamma-1) \varphi, \quad u \operatorname{sen} \gamma \varphi = r^{\gamma-1} \operatorname{sen} \varphi,$$

de donde son inmediatas las relaciones

$$u = \left( \frac{\operatorname{sen}(\gamma-1) \varphi}{\operatorname{sen} \gamma \varphi} \right)^\gamma \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(\gamma-1) \varphi}, \quad (28a)$$

---

\* Para el caso  $0 < \gamma \leq 1$  se tiene  $z_0 = \infty$ ,  $u_0 = \infty$  y el teorema es válido para toda  $\gamma > 0$ , real.



$$|z| = \frac{1}{r} = \frac{\text{sen } \gamma \varphi}{\text{sen } (\gamma - 1) \varphi} \quad (28b)$$

La función  $|z|$  dada por (28b) decrece monótonamente desde  $z_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$  para  $\varphi = 0$  hasta cero para  $\varphi = \varphi_{\max} = \frac{\pi}{\gamma}$  (ver fig. 3) si  $\gamma > 1$ . Como para  $\varphi = \varphi_{\max}$  se tiene, según (28a),  $u = +\infty$  y  $u(\varphi)$  es continua para  $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ , resulta que para toda  $u \geq u_0$  existe una  $|\varphi| \leq \varphi_{\max}$  que satisface (28a). En consecuencia, las soluciones complejas  $z$  están caracterizadas por  $0 \leq |z| \leq z_0$  para  $0 \leq |\varphi| \leq \varphi_{\max}$  y  $u_0 \leq u \leq \infty$ , lo cual completa la demostración. Además, puesto que  $\varphi_{\max} = \pi/\gamma$ , se tiene que si  $\gamma > 2$ , entonces necesariamente  $\text{Re } z > 0$ .

### 5. Fórmulas aproximadas y curvas de $S_\gamma(u)$ .

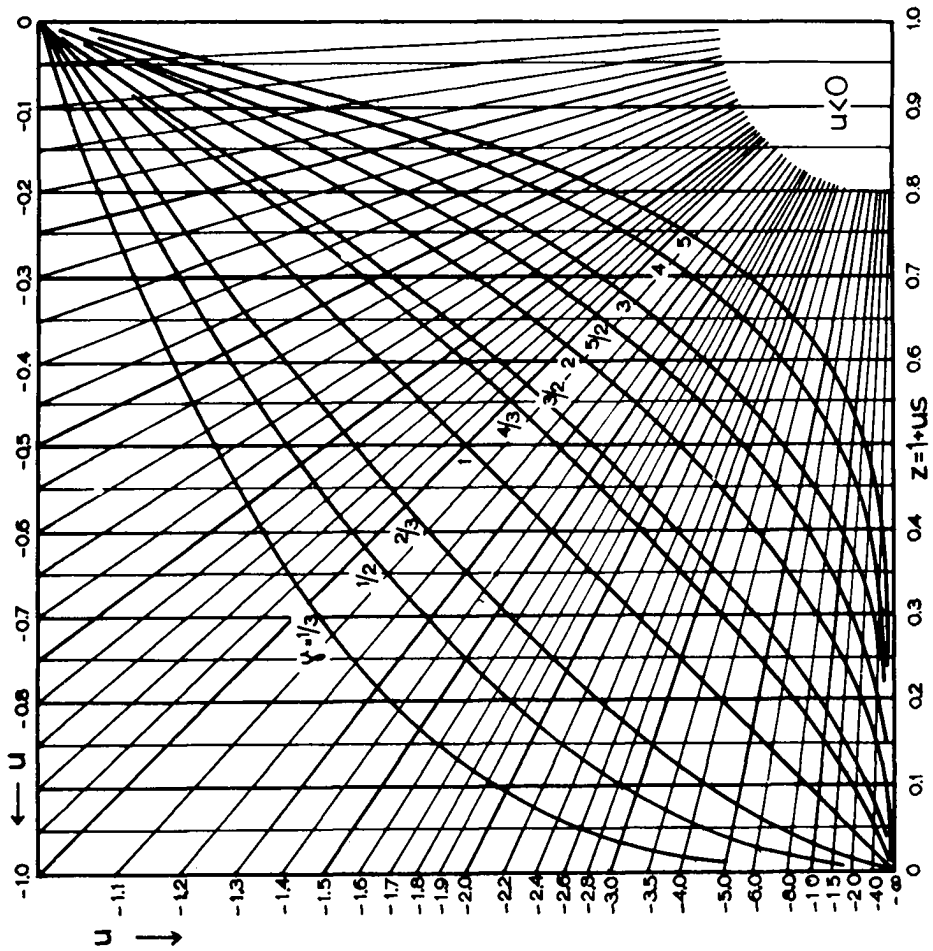
En este párrafo se analizan diversas posibilidades de representación de la función  $S_\gamma(u)$  ó, equivalentemente, de la función  $z$ . El objeto de esta sección es, como se ha dicho ya, generalizar y facilitar lo mas posible el cálculo de las raíces de una ecuación.

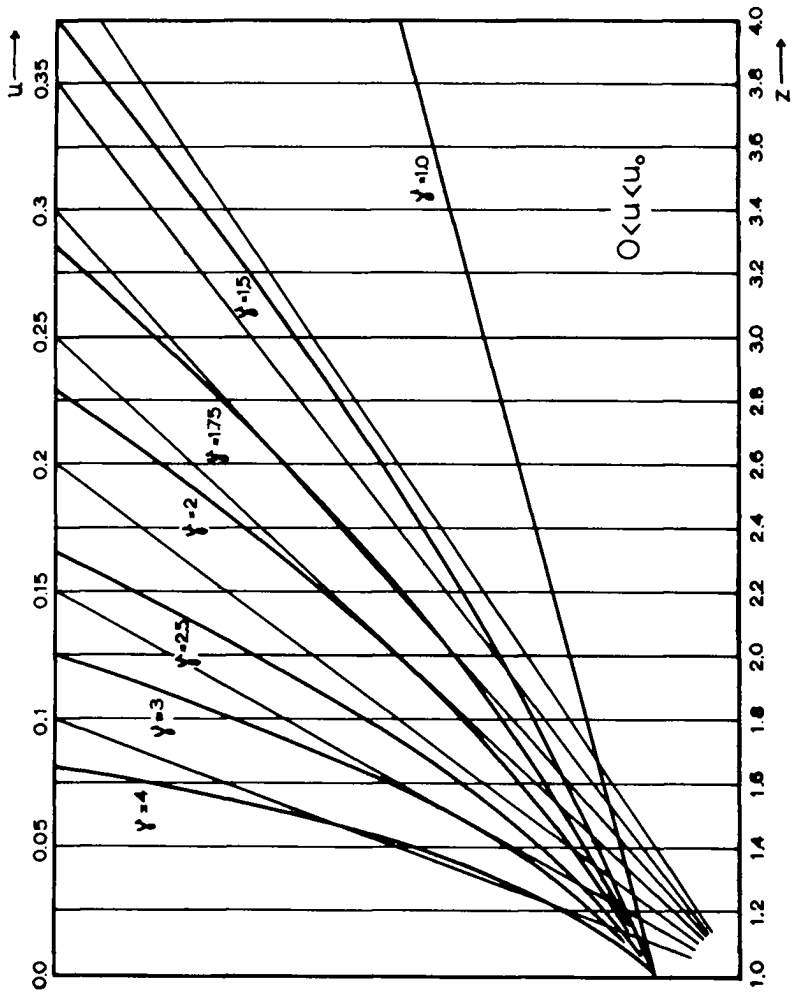
5.1. Las soluciones de (24) que corresponden a la PIRP\* pueden ser obtenidas gráficamente mediante el empleo de curvas del tipo mostrado en las Figs. 2 ( $u < u_0$ , soluciones reales) y 3 ( $u > u_0$ , soluciones complejas). El empleo de dichas curvas es directo. Para la obtención de los resultados en el caso  $u < u_0$  se utilizó el siguiente procedimiento. Sea  $\eta = z^\gamma$ ; de (24) resulta

$$\eta = z^\gamma = \frac{z - 1}{u} \quad (29)$$

y las soluciones reales de (24) están dadas por la intersección de las curvas  $\eta_1 = z^\gamma$  y  $\eta_2 = \frac{z - 1}{u}$ , cada una de las cuales depende de un solo parámetro (Ver fig. 2a para  $u \leq 0$  y 2b para  $0 \leq u \leq u_0$ ). Para las soluciones complejas de (24) se pueden utilizar directamente las fórmulas (28) que se muestran en la figura 3,

\* Para ciertos casos particulares de suficiente interés, como por ejemplo, para  $\gamma = 3$ , las correspondientes tablas y curvas pueden completarse con las soluciones dadas por la parte superior de la RP y por las ramas accesorias, con lo que se dispondría de tablas y curvas simples para la determinación de todas las raíces en dichos casos.





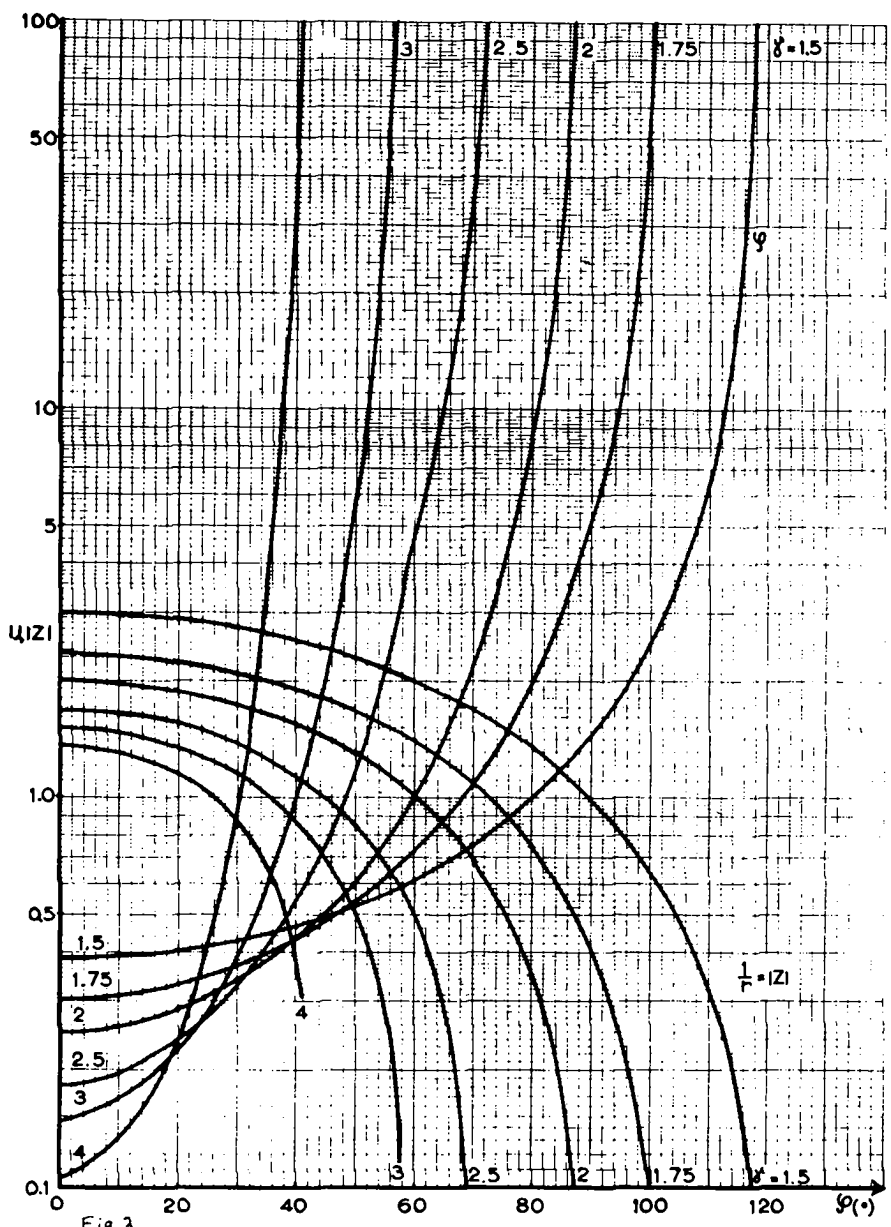


Fig 3

mediante la cual se debe determinar inicialmente el ángulo  $\varphi$  que corresponde a los valores dados de  $u$  y  $\gamma$  y a continuación el valor correspondiente de  $|z|$ , determinado a partir de la  $\varphi$  previamente encontrada.

5.2. Hasta el momento no se dispone sino de la serie (13a) para el cálculo de  $S_\gamma$ . En este apartado se analizan someramente algunas posibilidades para obtener fórmulas simples aproximadas para la determinación de dicha función. En a) y b) abajo se proponen solo variantes de cálculos mas o menos obvias, mientras que en c) se analiza con cierta amplitud la posibilidad de expresar la función  $S_\gamma$  en una forma simple, aunque aproximada, que no pierde totalmente su validez fuera de la región de convergencia de (13a).

a) Dentro de la región de convergencia de (13a) es posible proceder de la siguiente manera: Sea

$$\begin{aligned}
 S_\gamma(u) &= 1 + \gamma u + \frac{1}{2!} \gamma(3\gamma - 1) u^2 + \frac{1}{3!} \gamma(4\gamma - 1)(4\gamma - 2) u^3 + \dots \\
 &= 1 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Sea también

$$\Delta_1 = 1 - c_1 u = 1 - \gamma u
 \tag{31a}$$

Se tiene entonces

$$\Delta_1 S_\gamma = 1 + (c_2 - c_1^2) u^2 + (c_3 - c_1 c_2) u^3 + \dots ;$$

sea ahora

$$\Delta_2 = 1 - (c_2 - c_1^2) u^2 = 1 - 2! \gamma(\gamma - 1) u^2,
 \tag{31b}$$

por lo que

$$\Delta_2 \Delta_1 S_\gamma = 1 + (c_3 - c_1 c_2) u^3 + \dots ;$$

continuando este proceso con

$$\Delta_3 = 1 - (c_3 - c_1 c_2) u^3, \quad (31c)$$

etc., se pueden ir eliminando sucesivamente los términos de menor exponente, hasta obtener finalmente

$$S_\gamma = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} \Delta_k} \quad (32)$$

La fórmula (32) permite obtener aproximaciones sucesivas a  $S_\gamma$  para  $|u| < u_0$ . Es claro que para  $u$  suficientemente pequeña,  $\Delta_k \rightarrow 1$  rápidamente conforme  $k$  crece. En particular, en primera aproximación se tiene

$$S_\gamma^{(1)} = \frac{1}{\Delta_1} = \frac{1}{1 - \gamma u} = \frac{1}{1 - \nu} \quad (32a)$$

Sea ahora  $x_0 = b_0 + a_0 b_1$ . Se tiene entonces en primera aproximación, según (16), (23) y (32a)

$$z = 1 + u S_\gamma = 1 + \frac{u}{1 - \nu} = 1 - \frac{u}{b_1 y'(x_0)},$$

valor que sustituido en (25), tomando en cuenta (15), da:

$$x = b_0 + a_0 b_1 z = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}.$$

Esta es la fórmula del método de aproximaciones sucesivas de Newton. En el caso presente, sin embargo, la aproximación inicial  $x^{(1)}$  está dada por el proceso mismo de cálculo como  $x^{(1)} = x_0 = b_0 + a_0 b_1$ , no siendo necesario estimarla previamente.

b) Para el caso de  $z$  compleja con  $u/u_0 = 1 + \epsilon$ , en donde  $0 < \epsilon \ll 1$ , de (28) se tiene directamente

$$\varphi \approx \pm \sqrt{\frac{2\epsilon}{\gamma(\gamma-1)}} \quad , \quad (33a)$$

$$|z| \approx \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \frac{1}{6} (2\gamma-1) \varphi^2 \right] \quad (33b)$$

y las raíces respectivas están dadas por

$$x \approx b_0 + a_0 b_1 |z| e^{\pm i\varphi} \quad . \quad (33c)$$

c) Una expresión aproximada para  $S$  real o compleja se puede obtener en la siguiente forma. Desarrollando (22) se tiene (se omite el índice  $\gamma$  por brevedad):

$$\begin{aligned} S &= 1 + \gamma u S + \frac{1}{2!} \gamma(\gamma-1) u^2 S^2 + \frac{1}{3!} \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) u^3 S^3 + \dots \\ &= 1 + \gamma u S + \frac{1}{2} \gamma(\gamma-1) g u^2 S^2 \quad , \quad (34) \end{aligned}$$

en donde, por definición

$$g = 1 + \frac{2}{3!} (\gamma-2) u S + \frac{2}{4!} (\gamma-2)(\gamma-3) u^2 S^2 + \dots \quad (35)$$

De (34) se tiene entonces \*

$$z = 1 + uS = 1 + \frac{1 - v - \sqrt{(1 - v)^2 - 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} g v^2}}{(\gamma - 1) g v} \quad (36)$$

La fórmula (36) es exacta, pero su uso requiere el previo conocimiento de  $g(S)$ , lo que demanda a su vez conocer  $S$ . Es posible, sin embargo, encontrar expresiones simples aproximadas de  $g$  como función de  $u$ . Para ello, trataremos de construir una función  $g(u, \gamma)$  que permita satisfacer las siguientes condiciones:

- 1) - para  $u \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow 1 + u$ , según requieren (23 y (32a));
- 2) - para  $u = u_0$ ,  $z = z_0$ , de acuerdo a (26);
- 3) - el subradical de (36) debe anularse para  $v = v_0$  si se impone a  $g$  la condición de ser real para  $v$  real, lo que dará  $z$  real para  $v \leq v_0$  y  $z$  compleja para  $v > v_0$  para  $\gamma > 1$ ;
- 4) - para  $|u| \rightarrow \infty$ ,  $|z| \rightarrow 0$ , de acuerdo a resultados anteriores;
- 5) - para  $u = 0$  debe ser  $g = 1$  para toda  $\gamma$ ;
- 6) - para  $\gamma = 2$  debe ser  $g = 1$  para toda  $u$ .

Las condiciones 5) y 6) siguen directamente de (35)

Analizaremos ahora la fórmula (36) desde el punto de vista de estas seis condiciones. En primer lugar (36) satisface 1) para toda  $g$  finita. En efecto, según esta fórmula, se tiene

$$z \underset{v \rightarrow 0}{\rightarrow} 1 + \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 1) g v} g v^2 = 1 + \frac{v}{\gamma} = 1 + u .$$

---

\* En (36) se toma solo el signo - frente al radical para el caso de raíces reales pues se trata de la solución correspondiente a la parte inferior de la rama principal (ver Fig. 1); para raíces complejas evidentemente debe mantenerse el doble signo.



Las condiciones 2) y 3) requieren un análisis más cuidadoso. De la segunda de éstas sigue que si se escribe  $g(v_0) \equiv g_0$  se debe tener

$$g_0 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{1-v_0}{v_0} \right)^2, \quad (37a)$$

mientras que 2) requiere, tomando en cuenta (25)

$$g_0 = \frac{1-v_0}{v_0} \quad (37b)$$

Los resultados (37) no son consistentes, lo que muestra que la suposición  $g$  real si  $v$  real no es del todo correcta. Sin embargo, es fácil demostrar que  $g_0$  dada por (37b) no difiere excesivamente del valor dado por (37a). En efecto, sea

$g'_0 = \frac{1-v_0}{v_0}$ ; se tiene entonces, usando (37a):

$$\frac{g_0}{g'_0} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1-v_0}{v_0};$$

el cálculo numérico del valor de esta relación muestra que para  $\gamma$  comprendida, por ejemplo, entre  $\sim 2$  y  $+\infty$  el cociente  $g_0/g'_0$  varía monótonamente entre la unidad y  $\frac{1}{2}(e-1) \approx 0.86$ . Este hecho\* nos permite conservar simultáneamente las condiciones 2) y 3) anteriores, pero considerando la fórmula (36) como aproximada (el error decrecerá conforme  $\gamma \rightarrow 2$ ).

Para investigar las implicaciones de la condición 4) introducimos el parámetro  $g_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} g(u)$ . Se puede demostrar entonces que 4) exige que sea

$$g_\infty = \frac{2}{\gamma}. \quad (38)$$

---

\* La relación  $g_0/g'_0 = 1$  implica  $v_0 = \gamma/(3\gamma-2)$  que efectivamente puede ser considerada como una buena aproximación al valor exacto  $((\gamma-1)/\gamma)^{\gamma-1}$ .

Podemos ahora construir una función  $g = g(\gamma, u)$  que se aproxime a la función  $g$  dada por (35) para un intervalo suficientemente amplio de sus argumentos; en particular, se puede proponer, entre otras posibles expresiones, la siguiente:

$$g = \frac{a + b |u - u_0|^q}{c + |u - u_0|^q}, \quad (39)$$

en donde  $a, b, c, q$  son parámetros que se proponen independientes de  $u$  y que se determinan mediante las fórmulas (37a), (38) y la condición 5) anterior, en tal forma que se tiene:

$$g = g_0 \frac{1 + \frac{g_\infty}{g_0} \frac{g_0 - 1}{1 - g_\infty} \left| \frac{u - u_0}{u_0} \right|^q}{1 + \frac{g_0 - 1}{1 - g_\infty} \left| \frac{u - u_0}{u_0} \right|^q} \quad (39a)$$

Este resultado se puede simplificar si se observa que para  $\gamma$  comprendida entre  $\sim 3/2$  y  $+\infty$  la expresión  $(g_0 - 1)/(1 - g_\infty)$  permanece prácticamente constante e igual a  $1/2$ , es decir, que en este intervalo se satisface con excelente aproximación la relación

$$2g_0 + g_\infty = 3, \quad (40)$$

en donde  $g_0$  y  $g_\infty$  están definidos por (37a) y (38), respectivamente. Introduciendo (40) en (39a) se tiene

$$g = g_0 \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{g_\infty}{g_0} \left| 1 - \frac{v}{v_0} \right|^q}{1 + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{v}{v_0} \right|^q}. \quad (41)$$

Es fácil comprobar que (41) satisface automáticamente la condición 6) anterior. Para determinar  $q$  desarrollamos (41) en serie de potencias de  $u$  e igualamos el término lineal de este desarrollo con el correspondiente término en la serie

$$g = 1 + \frac{1}{3} (y-2) u S + \dots = 1 + \frac{1}{3} (y-2) u + \dots$$

Se obtiene

$$q = \frac{3}{2} (y-2) \frac{u_0}{g_0 - g_\infty} , \quad (42)$$

que, con la ayuda de (38) y (40), se reduce a

$$q = v_0 \quad (42a)$$

Se tiene así, finalmente,

$$g = g_0 \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{g_\infty}{g_0} \left| 1 - \frac{v}{v_0} \right|^{v_0}}{1 + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{v}{v_0} \right|^{v_0}} . \quad (43)$$

La fórmula (36), con  $g$  dada en forma aproximada por (43) es la expresión buscada. Un ejemplo de aplicación de estos resultados se presenta en el apéndice III.

## APENDICE I

Con este primer ejemplo se pretende mostrar, con un caso sencillo, cómo se puede proceder para calcular las raíces de una ecuación numérica. Tomemos la ecuación

$$x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 34x - 13 = 0 \quad (\text{A1})$$

No es difícil convencerse que a esta ecuación se le pueden aplicar directamente los métodos desarrollados en la Sección 1. Sin embargo, emplearemos un procedimiento de cálculo simultáneo de las cuatro raíces que frecuentemente reduce el trabajo de computación. (Es claro que podría igualmente utilizarse un proceso análogo de cálculo consecutivo de las raíces). Para iniciar el trabajo, determinaremos un valor aproximado de las raíces como sigue. La resolvente de (A1) es

$$b_0^4 + 6b_0^3 - 4b_0^2 - 34b_0 = 0. \quad (\text{A2})$$

Para la raíz trivial de (A2)  $b_0 = 0$  se tiene de (15), (16) y (19) que  $b_1 = -\frac{1}{a_1} = \frac{1}{34}$ ,  $u = 0.0692$ ,  $\gamma = 2.42$ ; como  $u \ll 1$ , en primera aproximación se tiene, según (32a), que  $s \approx \frac{1}{\Delta_1} = \frac{1}{0.833}$  y, finalmente, usando (20), se tiene que la raíz de módulo menor es, en primera aproximación,

$$x_1 \approx -\frac{13}{34} \left( 1 + \frac{0.0692}{0.833} \right) = -0.414$$

Para la determinación de las restantes raíces debemos resolver la RR de (A1):

$$b_0^3 + 6b_0^2 - 4b_0 - 34 = 0. \quad (\text{A3})$$

El trabajo de solución de (A3) se simplifica eliminando el término cuadrático (podrían emplearse los métodos discutidos mas adelante en AII) mediante el cambio de variable  $b_0 = w - 2$ , que da

$$w^3 - 16w - 10 = 0, \quad (A4)$$

cuya resolvente es

$$b_0'(b_0'^2 - 16) = 0, \quad (A5)$$

con raíces  $b_0'^{(2)} = 0$ ,  $b_0'^{(3)} = 4$ ,  $b_0'^{(4)} = -4$ . A estos valores de  $b_0'^{(l)}$  corresponden los siguientes valores de  $b_1'^{(l)}$ :

$$b_1'^{(l)} = -\frac{1}{y'(b_0'^{(l)})} = \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{32},$$

por lo que las raíces de (A4) son aproximadamente (aquí  $a_0 = -10$ )

$$w^{(l)} \approx b_0'^{(l)} + a_0 b_1'^{(l)} = -\frac{5}{8}, \frac{13}{3}, -\frac{11}{3}$$

y, consecuentemente, las soluciones aproximadas de (A3) son

$$b_0^{(l)} = w^{(l)} - 2 = -\frac{21}{8}, \frac{7}{3}, -\frac{17}{3} \quad (l = 2, 3, 4)$$

Con los valores obtenidos de  $b_0^{(l)}$  se determinan  $b_1^{(l)}$  (aquí  $y(x)$  es la función original de (A1)):

$$b_1^{(l)} = -\frac{1}{y'(b_0^{(l)})} = -\frac{1}{38.8}, -\frac{1}{96}, \frac{1}{138}.$$

Se tiene así, finalmente, para las raíces restantes en primera aproximación:

$$x_2 \approx b_0^{(2)} + a_0 b_1^{(2)} = -2.29,$$

$$x_3 \approx b_0^{(3)} + a_0 b_1^{(3)} = 2.46,$$

$$x_4 \approx b_0^{(4)} + a_0 b_1^{(4)} = -5.76.$$

Supóngase ahora que se desea obtener las raíces de (A1) con mayor aproximación. Con el objeto de aumentar la rapidez de convergencia de las fórmulas de la Sección 1 y reducir el trabajo de computación, es conveniente proceder como se muestra a continuación. Tomemos como ejemplo  $x_1$ . Haciendo en (A1) el cambio de variable  $x_1 = -0.4 + z_1$ , se tiene que  $z_1$  satisface la ecuación

$$z_1^4 + 4.4z_1^3 - 10.24z_1^2 - 28.176z_1 - 0.3984 = 0 \quad (\text{A6})$$

Nos interesa determinar sólo la raíz de módulo menor de (A6), por lo que se tiene de inmediato  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = \frac{1}{28.176}$  y, además:

$$\lambda_2 = \frac{10.24 \times 0.3984}{(28.176)^2} = 5.13879 \times 10^{-2}$$

$$\lambda_3 = \frac{4.4 \times (0.3984)^2}{(28.176)^3} = 3.122 \times 10^{-4}$$

$$\lambda_4 = -\frac{(0.3984)^3}{(28.176)^4} = -10^{-7}$$

Con estos valores sustituidos en (12) se tiene

$$z_1 = -0.014 \quad 2135,$$

por lo que

$$\underline{x_1} = z_1 - 0.4 = -0.414 \quad 2135$$

Un proceso enteramente análogo con  $z^{(l)}$  dada sucesivamente por  $2.3 + x_2$ ,  $-2.4 + x_3$  y  $5.7 + x_4$  (empleando en cada caso sólo la solución  $b_0^{(l)} = 0$ ) conduce a los resultados

$$x_2 = -2.267 \quad 949 \quad 2$$

$$x_3 = 2.414 \quad 213 \quad 5$$

$$x_4 = -5.732 \quad 050 \quad 8$$

Como el cálculo de cada raíz se ha hecho independientemente de la determinación de las restantes, es posible checar estos resultados. Se tiene así, por ejemplo, que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.000 \quad 000 \quad 0.$$

## APENDICE II

Se mostrará ahora como es posible tratar algunos problemas algebraicos con los métodos desarrollados en la Sección 1. Con este objeto nos proponemos estudiar en primer lugar la ecuación

$$w^n + g_1 w + g_0 = 0, \quad g_1 \neq 0. \quad (A7)$$

Para simplificar un tanto el trabajo algebraico es conveniente hacer el cambio de variable  $w = -\frac{g_0}{g_1} x$ , con el que (A7) toma la forma

$$u x^n - x + 1 = 0, \quad (A8)$$

en donde

$$u = \frac{1}{g_0} \left( -\frac{g_0}{g_1} \right)^n.$$

Para resolver (A8) debemos determinar las raíces de su resolvente

$$b_0 (u b_0^{n-1} - 1) = 0 \quad (A9)$$

que son

$$b_0 = 0, \quad |u|^{-\frac{1}{n-1}} \times \omega_{\epsilon, n-1},$$

en donde  $\omega_{\epsilon, n-1}$  son las  $n-1$  raíces de  $\epsilon \equiv \frac{u}{|u|} = +1$  si  $u > 0$ ,  $-1$  si  $u < 0$ , es decir,  $(\omega_{\epsilon, n-1})^{n-1} = \epsilon$ . Para la raíz de módulo menor se tiene  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$ ,  $\lambda_n = u$ ,  $\lambda_k = 0$  para  $k \neq n$ , por lo que para ellas se tiene



$$x_1 = 1 + u S_n(u), \quad (\text{A10a})$$

con  $S_n(u)$  dada por (13a). Para las restantes  $n-1$  raíces se procede en forma análoga, con  $b_1 = -\frac{1}{n-1}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} |u|^{\frac{1}{n-1}} \times \omega_{\epsilon, n-1}^{-1}, \dots, \lambda_n = \left(\frac{-1}{n-1}\right)^n u$ , lo que da

$$x = \frac{1}{n-1} \frac{1}{\sqrt{|u|}} \omega_{\epsilon, n-1} - \frac{1}{n-1} \left[ 1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k S_k(\lambda_k) + \dots \right]. \quad (\text{A10b})$$

Abstrayendo por el momento de eventuales dificultades de convergencia, (A10) representan la solución del problema propuesto. Está claro que en caso de ser necesario, podrían emplearse los métodos de la Sección 5 para la determinación de  $S_l(\lambda_l)$ . En el caso particular  $|u| \ll 1$  se tiene (ver (32a))  $S_n(u) \approx \frac{1}{1-nu}$  y (A10) se pueden reescribir en primera aproximación en la forma\*

$$x_1 = 1 + \frac{u}{1-nu}, \quad (\text{A11a})$$

$$x_l = \frac{1}{n-1} \frac{1}{\sqrt{|u|}} \omega_{\epsilon, n-1} - \frac{1}{n-1} [1 + O(u)], \quad (\text{A11b})$$

$$(l = 2, 3, \dots, n)$$

Un caso un tanto más general que puede también analizarse en forma elemental, es el de la ecuación

$$w^n + g_m w^m + g_0 = 0, \quad m < n \quad (\text{A12})$$

\* Algunos de los resultados anteriores y, en particular, los que se refieren a la raíz de módulo menor, conservan su validez aun en el caso de  $n$  no entera.

que toma la forma

$$u x^n - x^m + 1 = 0 \quad (A13)$$

con  $u = \frac{1}{g_0} \left( -\frac{g_0}{g_m} \right)^{n/m}$  mediante el cambio de variable  $w = \left( -\frac{g_0}{g_m} \right)^{1/m} x$ .

Para simplificar el análisis, supondremos que  $u$  es real y  $|u| \ll 1$ . La resolvente de (A13)

$$b_0^m (u b_0^{n-m} - 1) = 0 \quad (A14)$$

nos proporciona de inmediato  $n-m$  valores no triviales de  $b_0$ :

$$b_0 = |u|^{-\frac{1}{n-m}} \omega_{\epsilon, n-m}, \quad (A15)$$

en donde una vez más se ha escrito  $(\omega_{\epsilon, n-m})^{n-m} = \epsilon = \frac{u}{|u|}$ , para los cuales se tiene

$$x = \frac{1}{n-m} \frac{1}{\sqrt{|u|}} \omega_{\epsilon, n-m} - \frac{1}{n-m} |u|^{\frac{m-1}{n-m}} \omega_{\epsilon, n-m}^{m-1} + \dots \quad (A16a)$$

Las restantes  $m$  raíces pueden ser obtenidas si se resuelve la ecuación

$$z^n - z^{n-m} + u = 0 \quad (A17)$$

deducida de (A13) con el cambio de variable  $x = 1/z$  y operando sólo con las  $m$  raíces no triviales de la resolvente

$$b_0^{n-m} (b_0^m - 1) = 0, \quad (A18)$$

es decir, con

$$b_0 = \omega_{+,m} = \sqrt[m]{+1}.$$

Se obtiene

$$x = \frac{1}{z} = \frac{\omega_{+,m}^{-1}}{1 - \frac{u}{m} \omega_{+,m}^{-(n-m)} + \dots} \quad (\text{A16b})$$

A modo de ejemplo numérico, sea

$$x^5 - 8x^2 + 3 = 0$$

la ecuación a resolver. Se tiene  $u = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^{5/2} = \frac{3}{128} \sqrt{\frac{3}{2}} \ll 1$ ; las  $n - m = 3$  raíces de módulo mayor corresponden a  $b_0 = 4 \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{+,3}$  y en primera aproximación se tiene para ellas, directamente de los resultados anteriores

$$\begin{aligned} x \approx b_0 + a_0 b_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ 4 \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{+,3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \omega_{+,3}^{-1} \right] = \\ &= 2 \omega_{+,3} \left( 1 - \frac{1}{32} \omega_{+,3} \right), \end{aligned}$$

en donde  $\omega_{+,3} = 1, -\frac{1}{2} \pm i \sqrt{\frac{3}{2}}$ . De acuerdo a (A16b), para las  $m = 2$  raíces de módulo menor se tiene aproximadamente, con  $\omega_{+,2} = \pm 1$ ,

$$x \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pm 1}{1 \mp \frac{3}{256} \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots} \approx \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( 1 \pm \frac{3}{256} \sqrt{\frac{3}{2}} \right).$$

### APENDICE III

Se tratará aquí, a modo de ejemplo, un problema que involucra la solución de una ecuación trascendente. Se pretende con este ejemplo, más que de obtener la solución exacta, de mostrar como pueden emplearse los métodos propuestos en las Secciones 3 y 5 para tratar problemas de esta naturaleza.

El ejemplo en cuestión consiste en obtener la primera raíz de la ecuación

$$J_0(z) = 0 \quad (\text{A19})$$

Si se desarrolla (A19) en serie de potencias y se introduce en el resultado  $x = -\frac{1}{4}z^2$ , se obtiene

$$J_0(z) = 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots,$$

con lo que el problema se reduce al cálculo de la raíz de módulo menor de la ecuación

$$1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{576}x^4 + \dots = 0 \quad (\text{A20})$$

Para  $b_0 = 0$  se tiene  $b_1 = -1$ ,  $u = y(b_0 + a_0 b_1) = J_0(2)$ ,  $v = 1 - J_1(2)$  (se han usado las fórmulas (15) y (16)). Con estos valores, (36) y (43) dan, aproximadamente,  $s = 2$ ; por lo tanto, de acuerdo a (20), se tiene

$$x_1 = -(1 + uS_y(u)) = -(1 + 2J_0(2)),$$

o bien, en términos de la variable original  $z$ :

$$z_1 = 2\sqrt{-x} = 2\sqrt{1 + 2J_0(2)}. \quad (\text{A20})$$

## APENDICE IV

En este apéndice se aplican los métodos presentados en la Sección 4 al análisis de la ecuación cúbica. En concreto, el estudio de la función  $S_3(u)$  nos permitirá obtener en forma simple las propiedades de las raíces, como un caso particular de relaciones más generales.

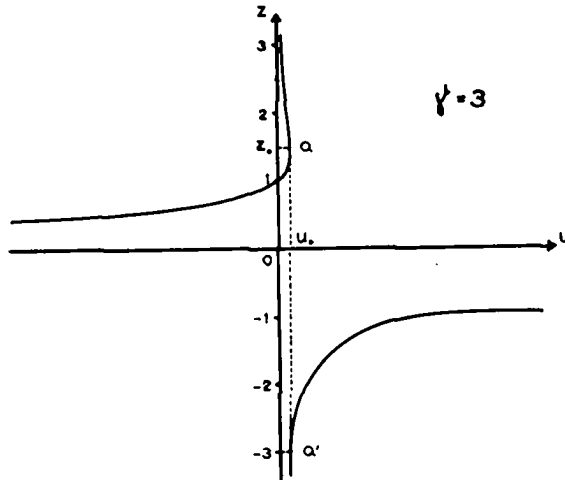
Sea

$$w^3 + g_2 w^2 + g_1 w + g_0 = 0 \quad (\text{A21})$$

la ecuación cúbica a estudiar, la cual, por hipótesis, no posee tres raíces iguales. En estas condiciones es siempre posible eliminar el término cuadrático y, mediante un ulterior cambio de escala de la variable (análogo al empleado con (A7)), reducir (A21) a la forma previamente analizada

$$u x^3 - x + 1 = 0 \quad (\text{A22})$$

Así pues, pese a que (A22) contiene sólo un parámetro libre, representa a la cúbica más general que no es cubo perfecto\*. La función  $z = 1 + u S_3(u)$  que resuelve (A22) de acuerdo a (20), se muestra en la fig. A1. El punto Q posee coordenadas (calculadas con (26))  $u_0 = \frac{4}{27}$ ,  $z_0 = \frac{3}{2}$ . De la figura se concluye que para  $u$  real,



\* Debido a este hecho, puede considerarse que (20) es solución exacta de la ecuación cúbica, con  $\gamma = 3$ , dentro de la región de convergencia.

- a) Si  $-\infty < u < 0$ , la ecuación (A22) posee una raíz real positiva  $0 < x < 1$  (que es precisamente la raíz de módulo menor) y un par de raíces complejas conjugadas,
- b) Si  $0 < u < u_0$ , (A22) tiene tres soluciones reales (dos positivas y una negativa); la raíz de módulo menor satisface  $1 < x < 3/2$ , mientras que la de módulo mayor es  $< -3$ ;
- c) Si  $u_0 < u < \infty$ , (A22) posee una raíz real negativa  $-3 < x < 0$  (que corresponde a la raíz de módulo mayor) y un par de raíces complejas conjugadas;
- d) Si  $u = 0$ , (A22) posee las raíces  $+1$  y  $\pm \infty$ ;
- e) Si  $u = u_0 = 4/27$ , la ecuación (A22) posee, finalmente, la raíz doble  $x = z_0 = 3/2$  y la raíz simple  $-3$ .

En consecuencia, (A22) posee tres raíces reales si y sólo si  $0 \leq u \leq \frac{4}{27}$ .

Expresado en términos de la ecuación

$$w^3 - 3aw + 2b = 0, \quad (A21a)$$

el resultado anterior equivale a decir que (A21a) posee tres raíces reales finitas si y sólo si  $0 < \frac{b^2}{a^3} \leq 1$ , como es ampliamente conocido en la teoría de ecuaciones.

## APENDICE V

Finalmente, en este apéndice se presenta un ejemplo de aplicación de los métodos previamente desarrollados a un problema físico. Se discutirá, en términos elementales, el comportamiento de un oscilador anarmónico en régimen forzado y, en particular, se prestará atención al problema de la determinación de la amplitud de oscilación.

Como es sabido, característica específica del comportamiento de dichos sistemas, es la existencia de inestabilidades que se manifiestan en forma de discontinuidades mas o menos pronunciadas de la amplitud de oscilación a ciertas frecuencias de operación y, además, que aun en ausencia de amortiguamiento dicha amplitud es finita, incluso durante la resonancia. Los métodos hasta aquí expuestos permiten analizar simplemente problemas de esta naturaleza y obtener conclusiones, incluso cuantitativas, sobre la conducta del sistema.

El sistema no lineal, pero suficientemente simple, que usaremos como ejemplo es el caracterizado, en régimen forzado, por la ecuación diferencial

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z - \epsilon z^3 = f_0 \cos \omega t, \quad (\text{A23})$$

cuya solución es, suponiendo  $\epsilon$  suficientemente pequeña,

$$z = a \cos \omega t - \frac{\epsilon a^3}{36 \omega^2} \cos 3\omega t + \dots$$

y en donde la amplitud  $a$  de la fundamental satisface la ecuación<sup>\*</sup>)

$$\frac{3}{4} \epsilon a^3 + (\omega^2 - \omega_0^2) a + f_0 = 0. \quad (\text{A24})$$

---

<sup>\*</sup> Por brevedad, a  $a$  le llamaremos simplemente "amplitud de oscilación".

Nos interesa en este caso investigar la dependencia de la amplitud de oscilación respecto de la frecuencia y determinar las condiciones de estabilidad de operación; en otras palabras, deberemos investigar las raíces de (A24).

De acuerdo a los apéndices II y IV, es conveniente reducir (A24) a su forma normal

$$ux^3 - x + 1 = 0 \quad (\text{A24a})$$

mediante el cambio de variable

$$a = \frac{f_0}{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} x \quad (\text{A25})$$

Se tiene en este caso

$$u = \frac{u_1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^3} \quad (\text{A26})$$

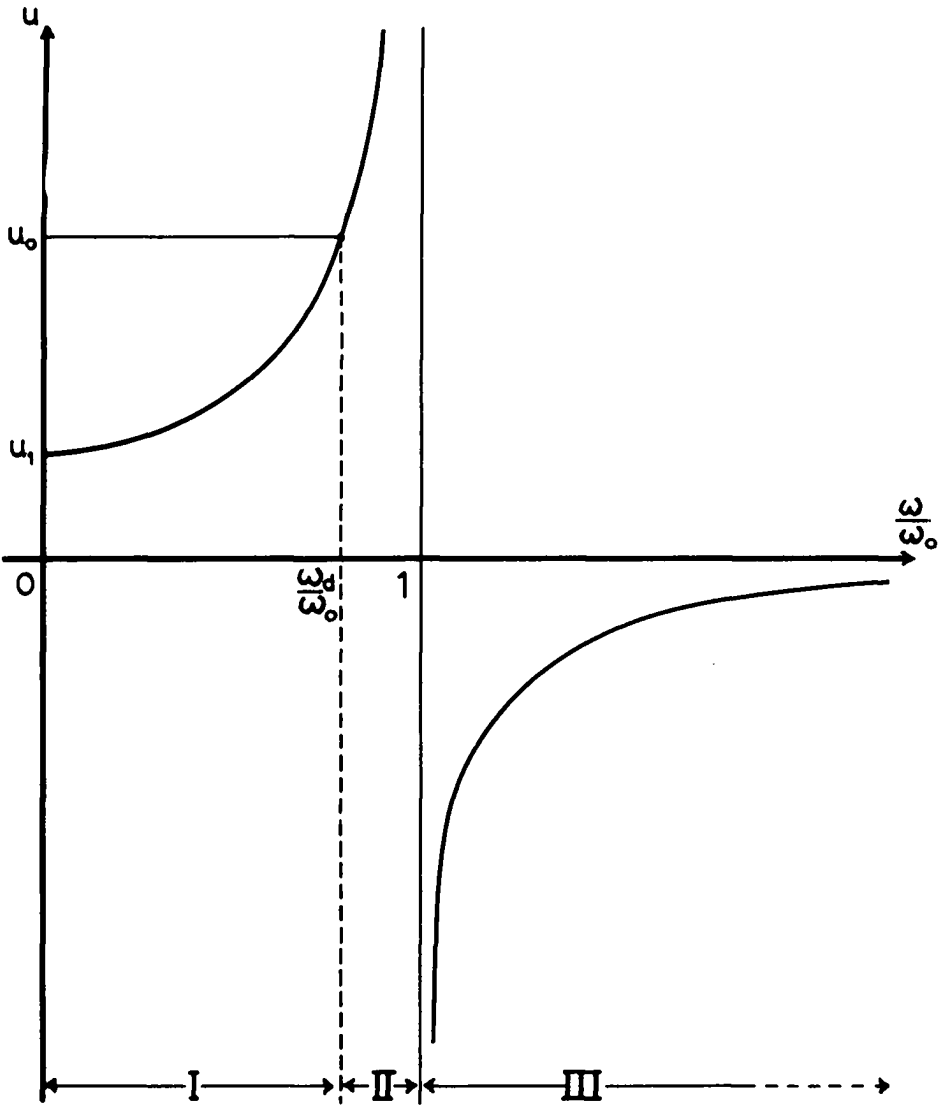
con

$$u_1 = \frac{1}{2} A^3 \quad , \quad A = \frac{1}{\omega_0^2} \times \sqrt[3]{\frac{3}{2} \epsilon f_0^2} \quad (\text{A27})$$

En la figura A2 se muestra  $u$  dada por (A26) para el caso  $\epsilon > 0$  (único que analizaremos aquí) y  $u_1 < u_0$  ( más adelante se analiza el caso  $u_1 > u_0$ ). El semiplano derecho puede dividirse en tres regiones, en las cuales, según los resultados del Apéndice IV, se tiene:

**Región I** : ( $u_1 \leq u < u_0$ ). La ec. (A24a) posee dos raíces positivas y una negativa;





Región II : ( $u_0 < u \leq + \infty$ ). (A24a) posee una raíz real negativa y un par complejo conjugado;

Región III : ( $0 \geq u \geq - \infty$ ). (A24a) posee una raíz real  $0 \leq x \leq 1$  y un par de raíces complejas conjugadas.

En la figura A3 se muestran las raíces de (A24a) como función de  $u$  y en la figura A4 los correspondientes valores de  $a$ , según (A25), como función de  $\omega$ .

De lo anterior se deduce de inmediato que la región I es la única en donde puede presentarse inestabilidad de la amplitud, ya que solo en ella  $a$  puede poseer varios valores reales. La frecuencia  $\omega_d$  que separa la región de inestabilidad de la región de estabilidad (fig. A2) puede ser obtenida de (A26) haciendo

$$u = u_0 = \frac{4}{27} :$$

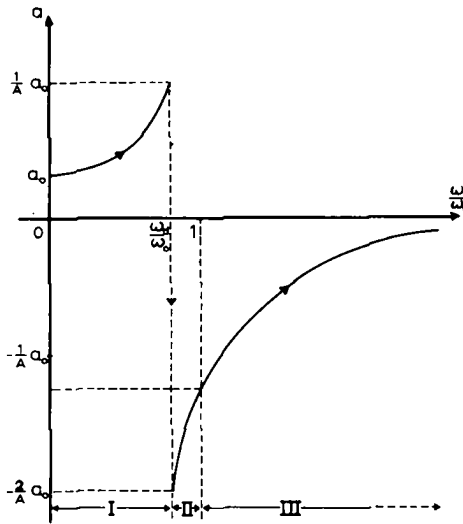
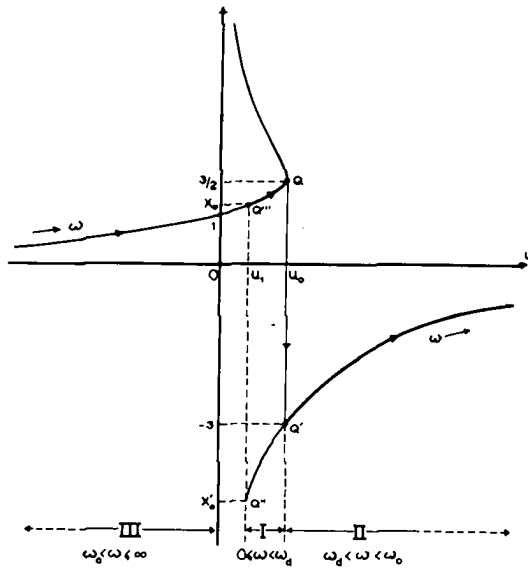
$$\frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{3}{2} A} . \quad (A28)$$

La forma en que la inestabilidad se manifiesta depende de las condiciones de operación del sistema. Como ejemplo, analicemos el comportamiento del oscilador cuando la frecuencia de la fuerza externa se incrementa lentamente a partir de cero\*).

De acuerdo a las figs. A2 - 4, conforme  $\omega$  va desde cero hasta  $\omega_d$ ,  $u$  pasa continuamente de  $u_1$  a  $u_0$  (es decir, de  $Q'''$  a  $Q$ ) y  $a$  se incrementa de

$$a_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} x_0 \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} a \quad a \quad a_d^- = \frac{1}{A} a_0, \text{ si se supone que el oscilador, pese a la inestabilidad, mantiene su operación sobre la PIRP. Sin embargo, un ulterior incremento de la frecuencia de operación de } \omega_d^- = \omega_d - \epsilon_0 \text{ hasta } \omega_d^+ = \omega_d + \epsilon_0 (\epsilon_0 \sim 0^+) \text{ conduce a } u \text{ mas allá de } u_0 \text{ (fig. A2), lo que obliga al punto de operación a saltar bruscamente de la rama principal a la accesoria (de } Q \text{ a } Q') \text{ y la amplitud de osci-}$$

\*Debido al método de aproximaciones usado en la solución de (A23), el análisis del comportamiento del sistema puede perder validez a frecuencias extremadamente bajas.



lación pasa discontinuamente de  $a_d^- = \frac{1}{A} a_0$  a  $a_d^+ = -\frac{2}{A} a_0$ ; es decir, la oscilación, duplica su amplitud e invierte simultáneamente su fase cuando se cruza la frecuencia  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{3}{2} A}$ . Por lo tanto, el salto brusco de la amplitud se realiza a más tardar en dicha frecuencia  $\omega_d$ .

No es difícil convencerse que incrementos ulteriores de la frecuencia de operación no producen en nuestro ejemplo ninguna nueva discontinuidad de la amplitud (aunque sea sólo porque se opera ya en la región estable). Es, asimismo, fácil demostrar que para  $\omega = \omega_0$ , es decir, en resonancia, se tiene

$$a_{res} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{A} a_0 \quad (\text{este resultado permite definir } Q \equiv \left| \frac{a_{res}}{a_0} \right| = \sqrt[3]{2} A^{-1}) \text{ y que}$$

$$\text{para } \omega \gg \omega_0, \quad a_{asimp} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 a_0 \quad (\text{ver fig. A4}).$$

Si, por el contrario, el oscilador es forzado a operar con frecuencias lentamente decrecientes, su comportamiento puede ser diferente al alcanzarse la región de inestabilidad. En efecto, de la fig. A3 es evidente que el punto de operación, que se desplaza sobre la rama *accesoria* si  $\omega < \omega_0$ , podría pasar sin discontinuidad alguna en  $x$  (y, en consecuencia, en  $a$ ) de la región II a la I. Si este fuera el caso, se alcanzaría un punto de operación altamente inestable, con amplitud  $a = x_0' a_0$ , en donde  $|x_0'|$  puede ser varias veces mayor que la unidad (fig. A3). Está claro que en condiciones reales, normalmente se produciría una transición brusca de la rama accesoria a la principal en algún punto de la región I, reduciéndose drásticamente la amplitud de la oscilación (con la consiguiente inversión de la fase).

En el caso que fuera  $u_1 > u_0$ , no existiría la región I, pues para toda  $\omega$  la ec. (A24a) poseería solo una raíz real; con ello desaparecería la región de inestabilidad. Por lo tanto, la condición de estabilidad de la amplitud a *cualquier* frecuencia se puede escribir como  $u_1 > u_0$ , es decir, según (A27),  $\frac{1}{2} A^3 > \frac{4}{27}$ , lo que equivale a

$$f_0 > \frac{4}{9} \frac{\omega_0^3}{\sqrt{\epsilon}} \quad (\text{A29})$$

En otras palabras, dados los parámetros del sistema, la aparición o no de inestabilidad a *cualquier* frecuencia depende de la magnitud de la fuerza externa aplicada.

Esta página está intencionalmente en blanco