COEFICIENTES DE WIGNER DEL GRUPO SU_3 PARA UN CASO PARTICULAR DE IMPORTANCIA EN LAS APLICACIONES FISICAS*

Ignacio Renero
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de México
(Recibido: Octubre 5, 1966)

RESUMEN

Se presenta una tabulación en fórmulas algebraicas cerradas de la totalidad de los coeficientes de Wigner del grupo SU_3 *correspondientes al producto directo de dos representaciones etiquetadas por las particiones* (h_1', h_2') *y* (h_1'', h_2'') *con* h_1' *y* h_2' *arbitrarias pero* $h_1'' = 2$ *y* $h_2'' = 1$. *En el caso más general se obtienen 64 coeficientes que se caracterizan en la tabulación por índices* h *y* q *correspondientes al grupo* SU_3 *y su subgrupo* SU_2. *Los coeficientes tabulados están normalizados y siguen la convención de fase de Biedenharn.*

Se esboza el procedimiento empleado en el cálculo que está basado en el concepto de coeficiente auxiliar de Wigner. El empleo de los coeficientes auxi-

*Trabajo auspiciado por la Comisión Nacional de Energía Nuclear (México)

liares de Wigner permite asimismo manejar adecuadamente el problema de la no simple reducibilidad que ya está presente en este caso.

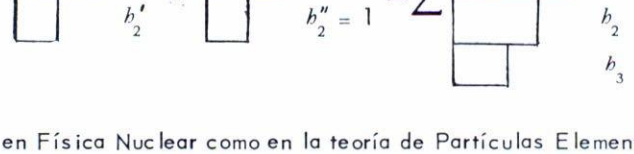
ABSTRACT

In the present paper Wigner coefficients for the group SU_3 are tabulated in closed algebraic form. These coefficients correspond to the direct product of two representations labeled by the partitions (h'_1, h'_2) and (h''_1, h''_2) with arbitrary h'_1 and h'_2, but $h''_1 = 2$ and $h''_2 = 1$. In the most general case, one obtains 64 coefficients, labeled in the tabulation by indices h and q corresponding to the group SU_3 and its subgroup SU_2 respectively. The coefficients here presented are normalized and follow Biedenharn's phase convention.

The method of calculation, based on the concept of the auxiliar Wigner coefficient, is outlined. The use of the auxiliary Wigner coefficients enables one to handle properly the problem of non-simple reducibility which appears in one of the cases here considered.

INTRODUCCION

Recientemente han sido obtenidas reglas generales de recurrencia para los coeficientes de Wigner de grupos unitarios, y en particular para el grupo SU_3 en una publicación a la que nos referimos como I. Estos resultados permiten el cálculo numérico de cualquiera de los coeficientes mencionados por un proceso iterativo. Sin embargo, dada la importancia especial de los coeficientes que aparecen en el producto directo



(1)

tanto en Física Nuclear como en la teoría de Partículas Elementales, hemos estimado conveniente calcular y tabular la totalidad de los coeficientes que aparecen en este caso bajo forma de expresiones algebraicas cerradas. Los coeficientes discutidos en I son los coeficientes auxiliares de Wigner, que en el caso que nos ocupa difieren sólo en una constante de los coeficientes ordinarios salvo en los casos correspondientes en dos de los ocho términos que aparecen en el miembro derecho de (1); esta excepción se debe precisamente a que el problema de la no simple reducibilidad se presenta en este caso, pero como se indicó en I, esta situación puede manejarse adecuadamente por medio de los coeficientes auxiliares de Wigner.

En el presente trabajo emplearemos la notación y las convenciones introducidas en I.

En el caso más general, la suma que aparece en el segundo miembro de (1) contiene ocho términos según las posibilidades de (h_1, h_2, h_3) que en nuestra tabulación numeraremos de I a VIII en el orden siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
(h_1' + 2, h_2' + 1, 0) & , & (h_1' + 2, h_2', 1) & , \\
(h_1' + 1, h_2' + 2, 0) & , & (h_1' + 1, h_2', 2) & , \\
(h_1', h_2' + 2, 1) & , & (h_1', h_2' + 1, 2) & , \\
(h_1' + 1, h_2' + 1, 1)_1 & , & (h_1' + 1, h_2' + 1, 1)_2 & ,
\end{array}
$$

en que hemos usado los índices 1 y 2 en los dos últimos términos para distinguir la representación que aparece repetida. Los valores compatibles de q_1'' y q_2'' asociados a la representación $h_1'' = 2$ $h_2'' = 1$ $h_3'' = 0$ que nos ocupa, son $q_1'' = 2, 1$ y $q_2'' = 1, 0$ y si suponemos q_1' y q_2' dadas obtenemos ocho posibles combinaciones $(q_1'', q_2'')(q_1, q_2)$:

$$(1, 0)\ (q_1' + 1, q_2') \quad ; \quad (1, 0)\ (q_1', q_2' + 1)$$

$$(1, 1)\ (q_1' + 1, q_2' + 2)$$

$$(2,0)(q_1'+2,\, q_2')\ ;\quad (2,0)(q_1'+1,\, q_2'+1)\ ;\quad (2,0)(q_1',\, q_2'+2)\ ;$$

$$(2,1)(q_1'+2,\, q_2'+1)\ ;\quad (2,1)(q_1'+1,\, q_2'+2) \tag{2}$$

Obtenemos así un total de 8 x 8 = 64 coeficientes cuyas fórmulas algebraicas tabulamos en el presente trabajo.

2. METODO EMPLEADO EN EL CALCULO DE LOS COEFICIENTES

El coeficiente de Wigner puede escribirse como un producto escalar en una forma análoga a la que aparece en I, ecuación (3.5); para el caso que nos ocupa:

$$\left\langle \begin{matrix} h_1' & h_2' & 0 \\ q_1' & & q_2' \\ & r_1' & \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & & q_2'' \\ & r_1'' & \end{matrix} \left| \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ q_1 & & q_2 \\ & r_1 & \end{matrix} ;\ u_1\ u_2\ u_3 \right. \right\rangle =$$

$$\left\langle 0 \left| P^+_{max} \begin{pmatrix} h' & h' & 0 \\ q_1' & & q_2' \\ & r_1 & \end{pmatrix} P^+_{min} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & & q_2'' \\ & r_1'' & \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & & h_1 & h_2 & h_3 & 0 \\ q_1 & & q_2 & ; & u_1 & u_2 & u_3 & \\ & r_1 & & & & h_1' & h_2' & \\ & & & & & & h_1' & \end{pmatrix} \right| 0 \right\rangle \tag{3}$$

Los polinomios $P_{min}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & & q_2'' \\ & r_1'' & \end{pmatrix}$ son de la forma $A\Delta^{+}_{\mu}\Delta^{+}_{\mu'}\,^{3}_{\mu''}$ en que A es una constante de normalización. A partir de los polinomios de máximo peso que son bases para representaciones irreducibles de SU_3[2], aplicando operadores de descenso[3] es sencillo obtener la identificación de los valores de μ, μ' y μ'' correspondientes a los valores de q_1'', q_2'' y r_1'' así como la constante A en cada caso. El resultado es:

$$P_{min}\begin{pmatrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \Delta_3^4\ \Delta_{13}^{43}$$

$$P_{min}\begin{pmatrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \Delta_3^4\ \Delta_{12}^{43}$$

$$P_{min}\begin{pmatrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 2 & & \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \Delta_1^4\ \Delta_{13}^{43}$$

$$P_{min}\begin{pmatrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 1 & \\ & & 2 & & \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \Delta_1^4\ \Delta_{12}^{43} \qquad (4)$$

Los posibles valores de u_1 u_2 y u_3 están limitados por las desigualdades de Weyl

$$h_1 \geqslant u_1 \geqslant h_2 \geqslant u_2 \geqslant h_3 \geqslant u_3 \geqslant 0$$

$$u_1 \geqslant h_1' \geqslant u_2 \geqslant h_2' \geqslant u_3 \geqslant 0 \;,$$

correspondiendo entonces dos coeficientes auxiliares para cada uno de los casos I a VI y tres para la representación que aparece repetida, que nosotros hemos numerado con VII y VIII. En la primera alternativa, es decir, para los casos de I a VI, estos coeficientes resultan proporcionales, la constante de proporcionalidad dependiendo sólo de los valores de h y para los dos casos VII y VIII se obtienen tres coeficientes auxiliares de los cuales dos son linealmente independientes.

El coeficiente auxiliar de Wigner queda dado por

$$
\left\langle
\begin{array}{cc}
b_1' \; b_2' \; 0 & 2 \;\; 1 \;\; 0 \\
q_1' \; q_2' \; ; & q_1'' \;\; q_2'' \\
r_1' & r_1''
\end{array}
\right|
\left.
\begin{array}{cc}
b_1 \; b_2 \; b_3 & \\
q_1 \;\; q_2 \; ; & u_1 \; u_2 \; u_3 \\
r_1 &
\end{array}
\right\rangle
=
$$

$$
\sum_{\bar{b}_i \, \bar{q}_i \, \bar{u}_i \, \bar{r}_1}
\left\langle
\begin{array}{cc}
b_1 \; b_2 \; b_3 & b_1 \; b_2 \; b_3 \; 0 \\
q_1 \;\; q_2 \; ; & u_1 \; u_2 \; u_3 \\
r_1 & b_1' \; b_2' \\
 & b_1'
\end{array}
\right|
\Delta^{4}_{\mu}
\left|
\begin{array}{cc}
\bar{b}_1 \; \bar{b}_2 \; \bar{b}_3 & \bar{b}_1 \; \bar{b}_2 \; \bar{b}_3 \; 0 \\
\bar{q}_1 \;\; \bar{q}_2 \; ; & \bar{u}_1 \; \bar{u}_2 \; \bar{u}_3 \\
\bar{r}_1 & b_1' \; b_2' \\
 & b_1'
\end{array}
\right\rangle
\times
$$

$$
\left\langle
\begin{array}{cc}
\bar{b}_1 \; \bar{b}_2 \; \bar{b}_3 & \bar{b}_1 \; \bar{b}_2 \; \bar{b}_3 \; 0 \\
\bar{q}_1 \;\; \bar{q}_2 \; ; & \bar{u}_1 \; \bar{u}_2 \; \bar{u} \\
\bar{r}_1 & b_1' \; b_2' \\
 & b_1'
\end{array}
\right|
\Delta^{4 \;\; 3}_{\mu_1 \, \mu_2}
\left|
\begin{array}{cc}
b_1' \; b_2' \; 0 & b_1' \; b_2' \; 0 \; 0 \\
q_1' \;\; q_2' \; ; & b_1' \; b_2' \; 0 \\
r_1' & b_1' \; b_2' \\
 & b_1'
\end{array}
\right\rangle
$$

Ya que los elementos de matriz de Δ^{4}_{μ} y $\Delta^{4 \;\; 3}_{\mu_1 \, \mu_2}$ han sido obtenidos explícitamente en I, la fórmula anterior nos da directamente los coeficientes de Wigner auxiliares en este caso. Como es bien sabido el coeficiente completo de Wigner de SU_3 contiene como factor al coeficiente de Wigner de SU_2 :

$$
\left\langle
\begin{array}{cc}
b_1' \; b_2' \; 0 & 2 \;\; 1 \;\; 0 \\
q_1' \; q_2' \; ; & q_1'' \;\; q_2'' \\
r_1' & r_1''
\end{array}
\right|
\left.
\begin{array}{cc}
b_1 \; b_2 \; b_3 & \\
q_1 \;\; q_2 \; ; & u_1 \; u_2 \; u_3 \\
r_1 &
\end{array}
\right\rangle
=
$$

$$
\left\langle
\begin{array}{cc}
q_1' \; q_2' & q_1'' \; q_2'' \\
r_1' \; ; & r_1''
\end{array}
\right|
\left.
\begin{array}{c}
q_1 \; q_2 \\
r_1
\end{array}
\right\rangle
\left\langle
\begin{array}{cc}
b_1' \; b_2' \; 0 & 2 \;\; 1 \;\; 0 \\
q_1' \; q_2' \; ; & q_1'' \;\; q_2''
\end{array}
\right|
\left.
\begin{array}{cc}
b_1 \; b_2 \; b_3 & \\
q_1 \;\; q_2 \; ; & u_1 \; u_2 \; u_3
\end{array}
\right\rangle
$$

En nuestra presente tabulación hemos eliminado el coeficiente de Wigner de SU_2.

La proporcionalidad de los coeficientes respecto de los dos valores posibles en cada caso de $u_1\ u_2\ u_3$ para los casos **I** a **VI** hace innecesario tabularlos para los diversos valores de $u_1\ u_2\ u_3$ y la constante que depende de los valores de h_i se obtuvo por normalización en cada caso.

Como se ha mencionado anteriormente, para los casos **VII** y **VIII**, de acuerdo con los valores posibles de $u_1\ u_2\ u_3$, existen 3 coeficientes auxiliares de los cuales podemos obtener dos combinaciones linealmente independientes. Existe pues cierto grado de arbitrariedad al escoger combinaciones lineales particulares de ellas.

El criterio seguido aquí fue el de escoger dichas combinaciones en tal forma que los coeficientes obtenidos sean proporcionales a los elementos de matriz de los generadores C_i^j del grupo[4] para el caso **VII** y de sus formas cuadráticas $\sum_m C_i^m C_m^j$ para el caso **VIII**. La relación que existe entre los 3 coeficientes auxiliares y los 2 coeficientes calculados a partir de los generadores del grupo es la siguiente:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} g_{\alpha;\, u_1 u_2 u_3} \left\langle \begin{matrix} h_1' & h_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} \;\; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_1'+1 & h_2'+1 & 1 \\ q_1 & q_2 & \end{matrix} \; ; \alpha \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} h_1' & h_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} \;\; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_1'+1 & h_2'+1 & 1 \\ q_1 & q_2 & \end{matrix} \; ; u_1\ u_2\ u_3 \right\rangle$$

Las g que aparecen en esta ecuación dependen sólo de las h_i' y sus valores son:

$$g_{1\,;\, h_1'+1\ h_2'\ 0} = - E(h_2'+1)^{-\frac{1}{2}} \left[(h_1'+2)\, a + (h_1'+h_2'+3)\, a^{-1} \right]$$

$$g_{1;\,h_1'\,h_2'+1\,0} = E(h_1'+2)^{-\frac{1}{2}}\left[(h_1'+h_2'+3)\,b - (h_2'+1)\,b^{-1}\right]$$

$$g_{1;\,h_1'\,h_2'\,1} = E(h_1'-h_2'+1)^{-\frac{1}{2}}\left[(h_1'+2)\,ab + (h_2'+1)\,a^{-1}b^{-1}\right]$$

$$g_{2;\,h_1'+1\,h_2'\,0} = F(h_2'+1)^{-\frac{1}{2}}(a+a^{-1})$$

$$g_{2;\,h_1'\,h_2'+1\,0} = -F(h_1'+2)^{-\frac{1}{2}}(b-b^{-1})$$

$$g_{2;\,h_1'\,h_2'\,1} = F(h_1'-h_2'+1)^{-\frac{1}{2}}(ab+a^{-1}b^{-1}) \;.$$

En las fórmulas anteriores E y F son las constantes de normalización para los casos **VII** y **VIII**, que aparecen en la tabulación de dichos casos; a y b están dadas por

$$a = \left[\frac{(h_1'+3)(h_2'+2)}{(h_2')(h_1'-h_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad b = \left[\frac{(h_1'-h_2')(h_1'+1)}{(h_1'+3)(h_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

El autor desea agradecer al Dr. Marcos Moshinsky sus valiosas indicaciones que hicieron posible la realización del presente trabajo.

REFERENCIAS

1. T.A. Brody, M. Moshinsky, I. Renero J.Math.Phys. **6**, 1540 (1965).
2. M. Moshinsky, J.Math. Phys. **4**, 1128 (1965).
3. J. Nagel and M. Moshinsky, J.Math.Phys. **6**, 682 (1965).
4. I.M. Gel'fand and M.L. Zetlin, Dok.Akad.Nauk. **71**, 825 (1950).

q_1''	q_2''	q_1	q_2	I $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1'+2 & b_2'+1 & 0 \\ q_1 & q_2 & \end{matrix} \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+2)(b_1'-q_2'+3)(b_2'-q_2'+1)(q_1'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_1'+2)(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2')(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{3(q_1'+2)(q_2'+1)(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+2)}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)}\right]^{1/2}$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(b_1'-q_2'+3)(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2'+1)(q_1'+2)(q_1'+3)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)(q_1'-q_2'+3)}\right]^{1/2}$
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+2)(q_1'+2)(q_2'+1)(2b_2'-q_1'-q_2')^2}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_1'+2)(q_1'-b_2')(b_2'-q_2')(q_2'+1)(q_2'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'-1)}\right]^{1/2}$
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2'+1)(q_1'+3)(q_1'+2)(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_2'-q_2')(q_1'+2)(q_2'+1)(q_2'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_1'+3)(b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}$

q_1''	q_2''	q_1	q_2	II $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle\vert \begin{matrix} b_1'+2 & b_2' & 1 \\ q_1 & & q_2 \end{matrix} \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(q_2')(q_1'-b_2'+1)(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+3)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_1'+2)(b_1'-q_2'+2)(b_2'-q_2')(q_1'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{3(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2')}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(b_1'-q_2'+3)(q_2')(q_1'-b_2'+1)(q_1'-b_2'+2)(q_1'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)(q_1'-q_2'+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2')(q_1'+q_2'+2)^2}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_1'+2)(b_2'-q_2'-1)(b_2'-q_2')(q_1'+1)(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2'+1)(q_1'-b_2'+2)(b_2'-q_2')(q_1'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2')(b_2'-q_2'-1)(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'-b_2'+2)(b_1'+2)(b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$

q_1''	q_2''	q_1	q_2	III $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1'+1 & b_2'+2 & 0 \\ q_1 & q_2 & \end{matrix} \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(b_2'-q_2'+2)(b_2'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(q_1'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_2'-q_2'+1)(q_1'-b_2'-1)(q_1'-b_2')(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{3(b_2'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(q_2'+1)(q_1'+2)}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(b_1'-q_1')(b_2'-q_2'+1)(b_2'-q_2'+2)(q_1'+2)(q_1'+3)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)(q_1'-q_2'+2)(q_1'-q_2'+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_2'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(q_1'+2)(q_2'+1)(2b_1'-q_1'-q_2'+2)^2}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)(q_1'-q_2'+2)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2'-1)(q_1'-b_2')(q_2'+1)(q_2'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)(q_1'-q_2'-1)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_2'-q_2'+1)(b_1'-q_1')(q_1'+2)(q_1'+3)(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(q_1'+2)(q_2'+1)(q_2'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_2'+2)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$

q_1''	q_2''	q_1	q_2	**IV** $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1'+1 & b_2' & 2 \\ q_1 & q_2 & \end{matrix} \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2'+1)(q_1'+1)(q_2')(q_2'-1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_2'-q_2')(q_1')(q_1'+1)(q_2')}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{3(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2')(q_1'+1)(q_2')}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2'+1)(q_1'-b_2'+2)(b_1'-q_1')(q_2')(q_2'-1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)(q_1'-q_2'+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2')(q_1'+1)(q_2')(2b_1'-q_1'-q_2'+2)^2}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1'+1)(b_1'-q_2'+1)(b_2'-q_2')(b_2'-q_2'-1)(q_1')(q_1'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1')(q_1'-b_2'+1)(q_1'-b_2'+2)(b_2'-q_2')(q_2')}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+1)(b_2'-q_2')(b_2'-q_2'-1)(q_1'-b_2'+1)(q_1'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2')(b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$

q_1''	q_2''	q_1	q_2	**V** $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 \\ & q_1' & q_2' \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & q_1'' & q_2'' \end{matrix} \middle\vert \begin{matrix} b_1' & b_2'+2 & 1 \\ & q_1 & q_2 \end{matrix} \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1')(q_1'-b_2')(b_2'-q_2'+1)(b_2'-q_2'+2)(q_2')}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(q_1'-b_2'-1)(q_1'+1)(b_2'-q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+\left[\dfrac{3(b_1'-q_1')(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(b_2'-q_2'+1)}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')}\right]^{1/2}$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_1'-1)(b_2'-q_2'+1)(b_2'-q_2'+2)(q_1'+2)(q_2')}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')(q_1'-q_2'+2)(q_1'-q_2'+3)}\right]^{1/2}$
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(b_2'-q_2'+1)(q_1'-q_2'+2)^2}{2(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_2')(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(q_1'-b_2'-1)(q_1'+1)(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'-1)}\right]^{1/2}$
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$-\left[\dfrac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_1'-1)(b_1'-q_2'+1)(b_2'-q_2'+1)(q_1'+2)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+\left[\dfrac{(b_1'-q_1')(q_1'-b_2')(b_1'-q_2')(b_1'-q_2'+1)(q_2'+1)}{(b_1'-b_2'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2')(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}$

q_1''	q_2''	q_1	q_2	VI $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 & 2 & 1 & 0 \\ q_1' & q_2' & & q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1' & b_2'+1 & 2 \\ & q_1 & q_2 \end{matrix} \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$+\left[\frac{(b_1'-q_1')(b_2'-q_2'+1)(q_2')(q_2'-1)(q_1'+1)}{(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$-\left[\frac{(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(q_1'+1)(q_1')(q_2')}{(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$-\left[\frac{3(b_1'-q_1')(b_1'-q_2'+1)(q_1'+1)(q_2')}{2(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)}\right]^{1/2}$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	$-\left[\frac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_1'-1)(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2'+1)(q_2')(q_2'-1)}{(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)(q_1'-q_2'+3)}\right]^{1/2}$
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$-\left[\frac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_2'+1)(q_2')(q_1'+1)(2b_2'-q_1'-q_2')^2}{2(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	$+\left[\frac{(b_1'-q_2')(b_1'-q_2'+1)(q_1'-b_2')(b_2'-q_2')(q_1')(q_1'+1)}{(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'-1)}\right]^{1/2}$
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$+\left[\frac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_1'-1)(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2'+1)(q_2')}{(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+\left[\frac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_2')(b_1'-q_2'+1)(b_2'-q_2')(q_1'+1)}{(b_1'+1)(b_1'+2)(b_2'+1)(b_1'-b_2'+1)(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}$

q_1''	q_2''	q_1	q_2	VII $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \;\Bigg\vert\; \begin{matrix} b_1'+1 & b_2'+1 & 1 \\ q_1 & q_2 & \end{matrix} ; \alpha = 1 \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$- E \left[\frac{(q_2')(b_2' - q_2' + 1)(b_1' - q_2' + 2)}{(q_1' - q_2' + 2)} \right]^{\frac{1}{2}}$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$+ E \left[\frac{(b_1' - q_1' + 1)(q_1' - b_2')(q_1' + 1)}{(q_1' - q_2')} \right]^{\frac{1}{2}}$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$- E \left[\frac{3}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[(q_1' + q_2') - \frac{2}{3} (b_1' + b_2') \right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	0
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+ E \left[\frac{(q_1' - q_2')(q_1' - q_2' + 2)}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	0
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$+ E \left[\frac{(b_1' - q_1')(q_1' - b_2' + 1)(q_1' + 2)}{(q_1' - q_2' + 2)} \right]^{\frac{1}{2}}$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+ E \left[\frac{(b_1' - q_2' + 1)(b_2' - q_2')(q_2' + 1)}{(q_1' - q_2')} \right]^{\frac{1}{2}}$

$$E = \{(2/3)[b_1'(b_1' + 3) - b_2'(b_1' - b_2')]\}^{-\frac{1}{2}}$$

q_1''	q_2''	q_1	q_2	**VIII** $\left\langle \begin{matrix} b_1' & b_2' & 0 \\ q_1' & q_2' & \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ q_1'' & q_2'' & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1'+1 & b_2'+1 & 1 \\ q_1 & q_2 & \end{matrix} ; \alpha = 2 \right\rangle$
1	0	$q_1'+1$	q_2'	$- F\left[\frac{(q_2')(b_2'-q_2'+1)(b_1'-q_2'+2)}{(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}(b_1'+b_2'-q_1'+1)$
1	0	q_1'	$q_2'+1$	$+ F\left[\frac{(b_1'-q_1'+1)(q_1'-b_2')(q_1'+1)}{(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}(b_1'+b_2'-q_2'+2)$
1	1	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+ \frac{F}{\sqrt{6}}\left[(b_1'+b_2'+1)(2b_1'+2b_2'-3q_1'-3q_2')+2b_1'+b_2'-b_1'b_2'-3q_1'+3q_1'q_2'\right]$
2	0	$q_1'+2$	q_2'	$+ F\left[\frac{(b_1'-q_1')(b_1'-q_2'+2)(q_1'-b_2'+1)(b_2'-q_2'+1)(q_1'+2)(q_2')}{(q_1'-q_2'+2)\quad(q_1'-q_2'+3)}\right]^{1/2}$
2	0	$q_1'+1$	$q_2'+1$	$+ F\left[2(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'+2)\right]^{-1/2}\left[(q_1'+q_2'+1)(q_1'-q_2')(q_1'-q_2'+2)+\right.$ $\left.+(b_1'-q_1'+1)(q_1'-b_2')(q_1'+2)-(b_1'-q_2'+2)(b_2'-q_2')(q_2')+(b_2'-q_1')(q_2')\right]$
2	0	q_1'	$q_2'+2$	$- F\left[\frac{(b_1'-q_1'+1)(b_2'-q_2')(q_1'-b_2')(b_1'-q_2'+1)(q_1'+1)(q_2'+1)}{(q_1'-q_2')\quad(q_1'-q_2'-1)}\right]^{1/2}$
2	1	$q_1'+2$	$q_2'+1$	$+ F\left[\frac{(b_1'-q_1')(q_1'-b_2'+1)(q_1'+2)}{(q_1'-q_2'+2)}\right]^{1/2}(b_1'+b_2'-q_2'+2)$
2	1	$q_1'+1$	$q_2'+2$	$+ F\left[\frac{(q_2'+1)(b_2'-q_2')(b_1'-q_2'+1)}{(q_1'-q_2')}\right]^{1/2}(b_1'+b_2'-q_1'+1)$

$$F = \{(1/6)[6(b_1'+b_2'+2)(b_1'^2+b_2'^2-b_1'b_2'+2b_1'-b_2')+(b_1'^2+b_2'^2-2b_1')^2+3(b_1'-b_2')^3(b_1'-b_2'+2)\}^{-1/2}$$