

ASPECTOS TEORICOS DEL DIAGNOSTICO  
ESPECTROSCOPICO DE PLASMAS

Homero Jiménez Domínguez\*

Laboratorio de Plasmas

Comisión Nacional de Energía Nuclear

(Recibido: Abril 13, 1967)

RESUMEN

*Se presentan en forma resumida algunos de los resultados teóricos en que se basan los métodos experimentales para la determinación espectroscópica de temperaturas y densidades de gases parcial o totalmente ionizados. En particular estos métodos utilizan las expresiones para la intensidad absoluta de las líneas espectrales, efecto Doppler, depresión del límite de la serie, intensidad de radiación en el continuo, equilibrio de ionización, relación de Inglis-Teller, ensanchamiento estadístico y requieren de anchuras e intensidades de líneas, así como de las frecuencias correspondientes, obtenidas experimentalmente.*

---

\* Este trabajo forma parte del trabajo de tesis para obtener el título de Físico. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de México.

Trabajo patrocinado parcialmente por el INIC.

## ABSTRACT

*The purpose of this paper is to present in an ordered form some of the theoretical results on which the experimental methods for the spectroscopic measurement of temperatures and densities of fully and partially ionized gases, are based.*

*The formulae for the absolute intensities and statistical broadening of spectral lines, those for Doppler effect, depression of series limit, continuum intensity of radiation, ionization equilibrium, Inglis-Teller relation, etc., are used in these methods, to get information on the actual conditions prevailing in the system, as well as the experimental values of spectral line widths, intensities and frequencies.*

## INTRODUCCION

El estado gaseoso ionizado que se ha dado en llamar cuarto estado de la materia y que constituye más del 99% del conjunto material disperso en el espacio, presenta una serie de peculiaridades en su comportamiento, mismas que determinan interés teórico y posibilidades prácticas. Interés en problemas de astrofísica, geofísica, electrónica, problemas de flujo, de comunicación, etc. y posibilidades para el desarrollo de generadores magneto-hidrodinámicos, generadores de microondas, reactores de fusión, etc.

Para modificar en forma adecuada los factores que intervienen en la producción y control de un gas ionizado o plasma, con el objeto de llegar a una meta pre-fijada o simplemente obtener resultados satisfactorios, para la solución de los problemas citados, se hace necesario conocer que es lo que está ocurriendo dentro del sistema. Por ejemplo, es útil conocer la presión dentro del plasma, las temperaturas y densidades de las especies de partículas que componen al plasma, las magnitudes de los campos eléctricos y magnéticos, etc.

Actualmente se dispone de varios métodos -métodos de diagnóstico- para determinar cualitativa y cuantitativamente los parámetros característicos de un plasma:

1. Cámaras de espejo rotatorio
2. Convertidores de imagen
3. Espectroscopía óptica
4. Microondas
5. Sondas magnéticas
6. Sondas electrostáticas
7. Emisión de neutrones
8. Emisión de rayos X
9. Lasers.

El propósito de este trabajo es presentar algunos resultados teóricos que permiten la determinación de los parámetros del plasma, haciendo uso de la espectroscopía óptica. Dichos resultados son relaciones de intensidades y perfil de las líneas espectrales con temperaturas, densidades de partículas y campos eléctricos; éstos últimos parámetros definen el estado del plasma considerado.

## I. RADIACION EMITIDA POR GASES IONIZADOS

La gran variedad de procesos físicos que se verifican en el seno de un plasma o gas ionizado entre las distintas especies de partículas-átomos, iones, electrones- se manifiesta principalmente en el espectro de la radiación electromagnética emitida por el plasma. Mediante el análisis de dicha radiación es posible obtener información tanto de las condiciones que prevalecen dentro del plasma como de las densidades y temperaturas de las partículas que lo componen.

La radiación emitida por un plasma proviene en general de mecanismos tales como transiciones entre estados atómicos discretos, entre estados del continuo y estados discretos, entre estados del continuo y como la interacción entre partículas cargadas y campos magnéticos. Estos tipos de radiación, en general, están presentes en las regiones de rayos X, ultravioleta, visible, infrarrojo y ondas de radio.

El carácter del espectro de un plasma de hidrógeno o que contenga hidrógeno depende, entre otras cosas, del grado de ionización que a su vez depende de la

temperatura: a temperaturas inferiores a  $10^7$  °K el espectro muestra radiación discreta; a partir de dicha temperatura, el espectro es principalmente un continuo. Los efectos predominantes en la desaparición de líneas son la ionización y el efecto Stark. Sin embargo, las impurezas -átomos de Z grande- emiten radiación discreta a temperaturas mayores que la mencionada. Esas impurezas se introducen a veces dentro del plasma -con el objeto de determinar temperaturas a partir de intensidades de líneas- o se desprenden de las paredes del recipiente.

Las pérdidas por radiación electromagnética constituyen una parte importante de la energía perdida por un plasma. Esto es especialmente importante en experimentos dirigidos a la fusión termonuclear controlada; sin embargo la energía electromagnética radiada por los plasmas termonucleares y en plasmas de baja temperatura es interesante, desde el punto de vista de esta exposición, en lo que respecta a la información que se puede obtener del análisis espectroscópico de dicha radiación en las distintas regiones del espectro.

## II. PARAMETROS CARACTERISTICOS DE UN PLASMA DE LABORATORIO

Con el propósito de dar una idea de los órdenes de magnitud que tienen los parámetros que caracterizan a un plasma, se mencionan a continuación los intervalos en que los valores de estos parámetros se encuentran.

1. La densidad del gas varía desde  $10^{10}$   $\text{cm}^{-3}$  en plasmas de baja densidad hasta  $10^{19}$   $\text{cm}^{-3}$  en plasmas densos.
2. La temperatura de un gas o de alguna especie de partículas varía desde la temperatura ambiente hasta  $10^8$  °K para un plasma termonuclear.
3. En un plasma termonuclear, el camino libre medio de reacción de fusión es de  $10^9$  cm. El camino libre medio de colisión ión-ión es del orden de  $10^2$  cm.
4. En un plasma tenue ( $\sim 10^{15}$   $\text{cm}^{-3}$ ) de alta temperatura ( $\sim 10^8$  °K), los tiempos para que se establezca una distribución Maxwelliana de velocidades para iones y electrones, independientemente, son

más pequeños que el tiempo para establecer la equipartición de energía entre ambas especies; de manera que se tienen temperaturas cinéticas distintas para iones y electrones. Esto significa que en esas condiciones no se alcanza equilibrio térmico entre las distintas especies de partículas. Dicha situación no es privativa de los plasmas termonucleares: aún en plasmas de baja temperatura ( $\sim 10^3 - 10^4$  °K) y altas densidades ( $10^{17} - 10^{18}$  cm<sup>-3</sup>), como plasmas producidos por arcos eléctricos trabajando a una atmósfera de presión, etc., se encuentra experimentalmente, que las temperaturas que caracterizan a las distribuciones de velocidades de las diferentes especies de partículas difieren en forma apreciable. Sin embargo se han encontrado<sup>2</sup> que en arcos eléctricos de altas corrientes existen ciertas regiones en las que con buena aproximación se puede considerar que hay equilibrio térmico local.

5. La presión del gas (suponiendo comportamiento ideal ( $P = NkT$ ) varía desde  $\sim 10^{-7}$  mm Hg  $10^{-9}$  at. hasta presiones del orden de  $10^2$  at.
6. Un plasma de alta temperatura ( $10^8$  °K) está completamente ionizado.  
El grado de ionización de un plasma de argón en un arco eléctrico cuya corriente es de 40 Amp. se ha estimado en 0.1%.
7. Los iones alcanzan velocidades medias del orden de  $10^8$  cm/seg. correspondientes a energías medias de 100 Kev. Las velocidades de los electrones pueden alcanzar valores del orden de  $10^{10}$  cm/seg.
8. Existen campos magnéticos constrictores aplicados o producidos por la corriente de la descarga. Sus valores alcanzan valores del orden de  $10^4$  gauss.
9. Los campos eléctricos interiónicos o microcampos alcanzan valores de  $10^4$  V/cm.

10. La radiación de Bremsstrahlung aparece en las regiones de microondas, luz visible, ultravioleta y rayos X.

Estos parámetros contribuyen a alterar substancialmente el espectro de la radiación emitida y las características de las líneas que lo constituyen debido a las perturbaciones sobre las partículas emisoras. Del análisis de esas alteraciones es posible, como se dijo antes, deducir, aunque no siempre con precisión datos tales como las densidades de las distintas especies de partículas, sus temperaturas, las magnitudes de los campos eléctricos y magnéticos, etc.

En la técnica espectroscópica de diagnóstico suelen presentarse factores que introducen incertidumbres en los resultados obtenidos. Entre estos factores pueden mencionarse los siguientes:

1. La falta de equilibrio térmico que contradice las hipótesis implícitas en las relaciones estadísticas que se usan.
2. Algunas magnitudes observadas son la resultante de varios fenómenos que ocurren simultáneamente y cuyos efectos pueden ser difíciles de separar. Por ejemplo, en el ensanchamiento de una línea espectral intervienen el efecto Doppler producido por el movimiento caótico de los emisores, el efecto Stark entre partículas, efecto de colisiones, interacciones de Van der Waals. Estos efectos en general dependen de la presión, de la temperatura y de los campos que actúan sobre el sistema.
3. Un factor más, es que algunas magnitudes atómicas como probabilidades de transición o las intensidades de oscilador no se conocen aún para todas las transiciones y estados de interés. Además los potenciales de ionización varían dependiendo de las condiciones especiales de cada experimento; no obstante, estos potenciales de ionización deben ser determinados con el objeto de hacer la corrección al factor exponencial de la ecuación que gobierna el equilibrio de ionización. Esta corrección para átomos hidrogenoides es<sup>3</sup>.

$$\Delta E_i = 7 \times 10^{-7} N_i^{1/3} \text{ eV} \quad (1)$$

donde  $N_i$  es la densidad de iones en  $\text{cm}^{-3}$ .

Los aparatos empleados en el diagnóstico espectroscópico de plasmas, tienen sensibilidades que permiten determinar valores de los diferentes parámetros, hasta los mínimos que se muestran enseguida:

PARAMETRO	TECNICA	VALOR MINIMO APROXIMADO
Temperatura	Ensanchamiento Doppler Intensidad de líneas espectrales	300 °K
Movimiento ordenado	Corrimiento Doppler	$10^4 \text{ cm/seg.}$
Densidad de partículas neutras	Perfiles de líneas Intensidad absoluta de líneas atómicas ópticamente delgadas	$10^{16} \text{ cm}^{-3}$
Densidad de iones	Efecto Stark interatómico Corte de la serie espectral	$10^{12} \text{ iones cm}^{-3}$
Grado de ionización	Ecuación de Saha Razones de intensidades de líneas iónicas y atómicas	0%
Campos eléctricos	Efecto Stark	1000 V/cm.
Campos magnéticos	Efecto Zeeman	1000 gauss
Energía de electrones	Excitación de líneas	2 eV

Estos valores se dan con base en la suposición de que, en cada caso, no hay perturbaciones serias por otras causas que no sean aquellas que se consideran.

### III. DETERMINACION DE TEMPERATURAS

#### A. TEMPERATURA DE EXCITACION DE LOS ELECTRONES

De acuerdo con lo mencionado en la parte II, el plasma está compuesto de subsistemas supuestos cada uno en equilibrio interno, de manera que, rigurosamente, no se puede hablar de una sola temperatura de equilibrio que caracterice al sistema completo. Cada especie de partículas y cada fenómeno están caracterizados por una temperatura distinta que se determina separadamente. Aún más, en el caso de sistemas anisotrópicos que involucran campos eléctricos o magnéticos no uniformes, cada especie de partículas y cada fenómeno estarán caracterizados por diferentes temperaturas en diferentes regiones del sistema y las distribuciones de velocidad no serán necesariamente Maxwellianas.

La radiación emitida por un plasma, contiene longitudes de onda tales que para éstas el plasma es ópticamente delgado ( $\alpha_\nu l \ll 1$ ,  $\alpha_\nu$  es el coeficiente de absorción en  $\text{cm}^{-1}$  en la frecuencia  $\nu$  y  $l$  es la profundidad en cm. de la capa emisora), esto es, el plasma es transparente a la radiación de esas longitudes de onda; esto querría decir también que la absorción de radiación y la emisión inducida son despreciables comparadas con la emisión espontánea. En tales circunstancias los fenómenos de ionización y excitación son producidos por colisiones de electrones contra iones y átomos. Dichos electrones poseen una energía (velocidad) media que les permita por medio de las colisiones, dar origen a determinadas poblaciones de estados atómicos excitados mismos que están distribuidos como lo indica la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{N_n}{N_0} = \frac{g_n}{U(T_e)} e^{-(E_n/kT_e)} \quad (2)$$

donde  $N_n$  es la densidad de átomos en el estado excitado  $n$ ,  $N_0$  es la densidad total de átomos en todos los estados,  $g_n$  es el peso estadístico del estado  $n$ ,  $U(T_e) = \sum_n g_n e^{-(E_n/kT_e)}$  es la función de partición,  $E_n$  es la energía de excita-

ción del estado  $n$  y  $T_e$  es la temperatura absoluta que caracteriza a la distribución de velocidades de los electrones que a su vez determinan, a través de colisiones, la formación de  $N_n$  átomos/cm<sup>3</sup> excitados en el nivel  $n$ .

De la expresión (2) se obtiene para  $N_1$  densidad de átomos en el estado base) la expresión:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{g_1}{U(T_e)} \quad (3)$$

y para las poblaciones relativas  $N_n/N_1$ :

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1} e^{-(E_n/kT_e)} \quad (4)$$

La intensidad de una línea espectral o energía emitida por cm<sup>3</sup> de material emisor, por unidad de tiempo y por unidad de ángulo sólido está dada para la transición  $n \rightarrow m$  por la expresión:

$$I_{nm} = \frac{N_n A_{nm} h\nu_{nm}}{4\pi} \quad (5)$$

donde  $A_{nm}$  es el coeficiente de Einstein para la transición espontánea  $n \rightarrow m$  y que está relacionada con la intensidad de oscilador  $f_{mn}$  para la misma transición por la conocida expresión<sup>4</sup>

$$A_{nm} = \frac{g_m}{g_n} \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2 nm}{mc^3} f_{mn} \quad (6)$$

Usando las expresiones (4) y (6), se obtiene para la intensidad de la línea  $n \rightarrow m$ :

$$I_{nm} = \frac{2\Pi \cdot e^2 h \nu_{nm}^3}{mc^3} \frac{g_m}{g_1} f_{mn} e^{-\frac{(E_n - E_1)}{kT_e}} N_1 \quad (7)$$

Por lo tanto, si se han medido las intensidades de dos líneas, de longitud de onda tal que el plasma es ópticamente delgado, del mismo elemento y si se conocen las correspondientes intensidades de oscilador, se obtiene inmediatamente la temperatura de excitación de los electrones empleando la razón de las intensidades de las dos líneas. Si dichas líneas tienen el mismo estado inferior  $m$ , la razón de intensidades es:

$$\frac{I_{lm}}{I_{nm}} = \frac{\nu_{lm}^3}{\nu_{nm}^3} \frac{f_{ml}}{f_{mn}} \exp \left[ \frac{(E_n - E_1)}{kT_e} \right] \quad \text{ó:}$$

$$T_e = \frac{E_n - E_1}{k} \ln \left( \frac{I_{nm} \nu_{lm}^3 f_{ml}}{I_{lm} \nu_{nm}^3 f_{mn}} \right) \quad \text{°K} \quad (8)$$

lo cual supone que también se conocen los potenciales de excitación  $E_m$  y  $E_l$ ; estas magnitudes junto con las probabilidades de transición se encuentran en la literatura.

## B. TEMPERATURA DE IONIZACION

La densidad de electrones (= densidad de iones cuando sólo es importante la primera ionización) puede determinarse a través de métodos en los que no interviene la temperatura: efecto Stark y relación de Inglis-Teller, como se verá más abajo al hablar de la determinación de densidades. El valor de la densidad de electrones calculada en esta forma puede usarse para obtener una relación funcional entre la intensidad de las líneas atómicas y la temperatura de ionización definida por la ecuación de Saha:

$$\frac{N_e N_{i1}}{N_{01}} = \frac{2(2\pi m_e kT_i)^{3/2}}{b^3} \frac{g_{i1}}{g_{01}} \exp(-\chi_0/kT_i) \quad (9)$$

donde  $N_e$  es la densidad de electrones,  $N_{i1}$  y  $N_{01}$  son las densidades de iones y átomos, respectivamente, en el estado base, las  $g$ 's son los pesos estadísticos del estado base para iones y átomos y  $\chi_0$  es el potencial de ionización.

Si se supone que hay equilibrio térmico, la temperatura de excitación de los electrones  $T_e$ , es igual a la temperatura  $T_i$  de ionización; o sea, el mismo fenómeno -colisiones con electrones- que conduce a formación de estados excitados, produce la ionización. Como consecuencia de lo dicho,  $N_{01}$  puede determinarse de la ecuación de Saha y substituirse en la expresión para la intensidad de las líneas espectrales (7) obteniéndose, si  $T_i = T_e$  y  $N_{i1} = N_e$ , lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{e^2 b^4}{\pi^{1/2} c^3 m^{5/2} (2k)^{3/2}} \frac{N_e^2 \nu_{mn}^3 g_n}{T_i^{3/2} g_{i1}} I f_{nm} \exp\left(\frac{\chi_0 - \Delta E_i - E_m}{kT_i}\right) \\ &= 8 \times 10^{-65} N_e^2 \frac{g_n}{g_{i1}} \nu_{mn}^3 f_{nm} I T_i^{-3/2} \exp\left(\frac{\chi_0 - \Delta E_i - E_m}{kT_i}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

y despejando la temperatura de ionización  $T_i$ :

$$T_i = \chi_0 - \Delta E_i - E_m \left[ \ln (AT_i^{3/2}) \right]^{-1} \text{ } ^\circ\text{K} \quad (12)$$

con 
$$A = \frac{I_{mn} g_{i1}}{8 \times 10^{-65} N_e^2 g_n \nu_{mn}^3 f_{nm} I}$$

$E_m$  es el potencial de excitación del nivel superior  $m$  de la transición,  $I$  es la pro-

fundidad de la capa emisora de plasma. En la expresión (12) se ha disminuido el potencial de ionización por la cantidad:

$$\Delta E_i = \frac{Z^2 R}{(n^*)^2} \quad (13)$$

donde  $R$  es la constante de Rydberg en unidades de energía,  $n^*$  es el último número cuántico observado del átomo hidrogenoide, y  $Z$  es la carga efectiva. En la ref. 3 se obtiene otra expresión para calcular  $\Delta E_i$  en función de la densidad de iones:

$$\Delta E_i = 7 \times 10^{-7} N_i^{1/3} \quad (14)$$

Esta disminución en el potencial de ionización se debe a los efectos perturbadores de campos eléctricos dentro del plasma, sobre los niveles atómicos.

La ecuación (12) se resuelve por iteración.

Si se conocen  $N_e$  y  $N_0$  ( $N_0$  densidad de átomos neutros en todos los estados), la temperatura de ionización  $T_i$  puede ser obtenida directamente de la ecuación de Saha:

$$T_i = N_0/k \ln \left[ \frac{2N_0 (2\pi m k T_i)^{3/2} U_i}{N_e^2 h^3 U_0} \right] \text{ } ^\circ\text{K} \quad (15)$$

### C. TEMPERATURA DE EXCITACION-IONIZACION

Esta temperatura se obtiene de la razón de intensidades de una línea atómica a una línea iónica cuando se conocen las densidades de átomos e iones en el estado base. Cuando estas densidades no se conocen, se hace uso de la ecuación de Saha que las relaciona.

La intensidad de una línea iónica puede escribirse en una forma semejante

a la expresión (7):

$$I_{pq} = \frac{2\Pi e^2 b \nu_{pq}^3}{mc^3} \frac{g_q}{g_{i1}} f_{qp} I_{N_{i1}} e^{-(E_p/kT)} \quad (16)$$

donde  $p$  y  $q$  son los estados superior e inferior respectivamente del ión,  $i1$  denota el estado base del ión y  $N_{i1}$  es la densidad de iones en el estado base.

La razón de intensidades de una línea atómica a una línea iónica es:

$$\frac{I_{mn}}{I_{pq}} = \frac{g_{i1}}{g_1} \frac{g_n}{g_q} \frac{f_{nm}}{f_{qp}} \frac{\nu_{mn}^3}{\nu_{pq}^3} \frac{N_1}{N_{i1}} \exp\left(\frac{E_m - E_p}{kT_{ei}}\right) \quad (17)$$

La razón  $\frac{N_1}{N_{i1}}$  puede ser obtenida de la ecuación de Saha y substituida en

(17) con lo cual se llega a la expresión:

$$\frac{I_{mn}}{I_{pq}} = \frac{g_{i1}}{g_1} \frac{g_n}{g_q} \frac{f_{nm}}{f_{qp}} \frac{\nu_{mn}^3}{\nu_{pq}^3} \frac{g_1}{2g_{i1}} \left(\frac{2\Pi m k T_{ei}}{b^2}\right)^{-3/2} N_e \exp\left(\frac{X_i - \Delta E_i - E_m + E_p}{kT_{ei}}\right) \quad (18)$$

y resolviendo para  $T_{ei}$  se obtiene:

$$T_{ei} = \frac{(X_i - \Delta E_i + E_p - E_m)}{k} \left\{ \ln \left[ 4.84 \times 10^{-15} \frac{g_q f_{qp} \nu_{pq}^3 T_{ei}^{3/2} I_{mn}}{g_n f_{nm} \nu_{mn}^3 N_e I_{pq}} \right] \right\}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K} \quad (19)$$

Los valores de  $T_{ei}$  dependen fuertemente de la diferencia  $E_p - E_m$ . No obstante esto se pueden obtener valores confiables de  $T_{ei}$  cuando los niveles atómicos están muy separados de los iónicos puesto que en este caso se pueden obtener valores precisos de aquella diferencia. Si no aparece ninguna línea iónica y en lugar de  $I_{pq}$  se usa la intensidad del continuo, en un intervalo apropiado de longitudes

de onda, este método proporciona un límite superior en la temperatura del plasma.

#### D. TEMPERATURA DE CUERPO NEGRO

Los métodos para la medición de temperatura suponen que la radiación se origina en un plasma ópticamente delgado ( $\alpha_\nu l \ll 1$ ). Si el plasma es tal que en el corazón de una línea emitida o en alguna otra parte del espectro se encuentra que  $\alpha_\nu l \gg 1$ , la intensidad espectral en esas regiones está relacionada con la fórmula de Planck del Cuerpo Negro en la forma<sup>2</sup>

$$I_\nu \leq B_\nu(T)$$

$$B_\nu(T) = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} \left[ e^{(h\nu/KT)} - 1 \right]^{-1} \quad (20)$$

y por lo tanto la temperatura está dada en la forma:

$$T \geq \{ \ln [ (2b\nu^3 / I_\nu c^2) + 1 ] \}^{-1} (h\nu/k) \text{ } ^\circ\text{K} \quad (21)$$

la cual se considera como un límite inferior de la temperatura del plasma.

#### E. TEMPERATURA DE ATOMOS E IONES (TEMPERATURA DOPPLER).

Se ha dicho en la primera parte que los movimientos térmicos de los emisores, átomos e iones, alteran los perfiles de las líneas espectrales que muestran una anchura finita cuando los otros mecanismos de ensanchamiento son de magnitud despreciable, con respecto al efecto Doppler, en cuanto a sus consecuencias sobre la radiación emitida. El efecto de ensanchamiento aumenta como  $T^{1/2}$  y disminuye como  $M^{1/2}$  donde  $M$  es la masa de los radiadores y  $T$  es la temperatura absoluta que caracteriza a la distribución Maxwelliana de sus velocidades.

La anchura Doppler en unidades de longitud de onda es<sup>2</sup>

$$\delta_D^\lambda = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{M} \ln 2} \quad (22)$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda correspondiente al centro de la línea. En estas condiciones, la temperatura es:

$$T = \frac{Mc^2}{2k \ln 2} \left( \frac{\delta_D^\lambda}{2\lambda_0} \right)^2 \text{ } ^\circ\text{K} \quad (23)$$

donde  $\delta_D^\lambda$  es la anchura total medida a la mitad de la altura máxima del perfil de la línea obtenido densitométricamente. Para presiones de  $10^{-5}$  mm Hg o menores el efecto Doppler es mayor que los otros efectos.

#### IV. DETERMINACION DE DENSIDADES

##### A. DENSIDADES DE IONES Y ATOMOS A PARTIR DE INTENSIDADES ABSOLUTAS DE LINEAS ESPECTRALES.

Si la temperatura de excitación (8) de los electrones ha sido determinada, entonces se puede calcular la densidad de partículas de las especies emisoras: átomos o iones -  $N_0$  ó  $N_i$  -. Esto se efectúa empleando la Función de Partición  $U(T) = \sum_n g_n e^{-(E_n/kT_e)}$  para la especie emisora cuya densidad se quiere calcular y la ecuación de Boltzmann en la forma dada por (3). Por ejemplo, la densidad total de átomos neutros, de acuerdo con la relación (3) es:

$$N_{\text{total, átomos}} = \frac{N_{a1}}{g_1} \left[ g_1 + \sum_2^n g_n e^{-(E_n/kT_e)} \right] \text{ átomos } \text{cm}^{-3} \quad (24)$$

donde la suma se ha extendido hasta el número cuántico principal  $n$  definido por la expresión (13).

Ahora, empleando la razón  $N_1/g_1$  que aparece en la expresión (7) para la intensidad absoluta de la línea, se tiene:

$$N_{\text{total, átomos}} = \frac{I_{mn} mc^3 e^{(E_m/kT_e)}}{2\pi e^2 \nu_{mn}^3 h g_n I_{f_{nm}}} \left[ g_1 + \sum_2^{n^*} g_n e^{-(E_n/kT_e)} \right] \quad \text{cm}^{-3} \quad (25)$$

Análogamente, se tiene para la densidad total de iones:

$$N_{\text{total, iones}} = \frac{I_{pq} mc^3 e^{(E_p/kT_e)}}{2\pi e^2 \nu_{pq}^3 h g_q I_{f_{qp}}} \left[ g_1 + \sum_2^{n^*} g_n e^{-(E_n/kT_e)} \right] \quad \text{cm}^{-3} \quad (26)$$

En el caso de los iones, la suma es despreciable para las temperaturas que se dan en plasmas de arcos eléctricos a la presión atmosférica; por lo tanto para este caso particular:

$$N_{\text{total, iones}} = \frac{I_{pq} mc^3}{2\pi e^2 \nu_{pq}^3 h g_q} \frac{e^{(E_p/kT)}}{I_{f_{qp}}} g_1 \quad \text{cm}^{-3} \quad (27)$$

Por otro lado, muchas veces en la práctica se supone que la Función de Partición  $\bar{u}$  puede ser aproximada al peso estadístico del estado base; por ejemplo en arcos de alta corriente (200-800 Amp.) donde es de esperarse una alta población de niveles excitados de átomos e iones<sup>5</sup>.

## B. DENSIDAD DE IONES A PARTIR DE LA DEPRESION DEL LIMITE DE LA SERIE.

Debido a los microcampos y a las colisiones a que están sometidas las partículas radiantes, los niveles cuánticos (principalmente los más elevados) se ensanchan anormalmente haciendo que las líneas espectrales, cuyo nivel superior es uno de ellos, se traslapen y se confundan con el continuo. Inglis y Teller<sup>6</sup> tomando en consideración el efecto Stark producido por iones y las colisiones electrónicas, derivaron una expresión sencilla que relaciona al número cuántico superior  $n^*$  de la última línea observada de la serie con las densidades de iones y electrones  $N$ . Dicha expresión es:

$$N_i (n^*)^{15/2} = 0.027 a_0^{-3} \quad (28)$$

donde  $a_0$  es el radio de la primera órbita de Bohr. Para aplicar esta ecuación debe considerarse una corrección que toma en cuenta a la temperatura. El criterio para su uso es la comparación de la temperatura del plasma con la "temperatura cinética" que corresponde a la energía de movimiento del electrón en la  $n$ ésima órbita, de tal modo que cuando  $T < \frac{T_0}{n}$ , el valor de  $N$  debe ser la suma de  $N_e$  y  $N_i$  ó sea que la ecuación (28) se convierte en

$$(N_i + N_e) (n^*)^{15/2} = 0.027 a_0^{-3} \quad (29)$$

lo cual significa, físicamente, que a temperaturas relativamente bajas comparadas con  $\frac{T_0}{n}$ , los electrones contribuyen de manera apreciable al ensanchamiento de las líneas a través del efecto Stark. Cuando  $T \geq \frac{T_0}{n}$  la ecuación (28) se usa como tal o sea que los electrones a estas temperaturas ya no producen campos eléctricos quasi-estáticos.  $T_0$  está dada por la relación:

$$T_0 = \frac{m v_0^2}{3k} = 1.0525 \times 10^5 \text{ } ^\circ\text{K} \quad (30)$$

donde  $v_0$  es la velocidad lineal del electrón en la primera órbita de Bohr.

### C. DENSIDAD DE ELECTRONES A PARTIR DE LA INTENSIDAD DE LA RADIACION EN EL CONTINUO.

Las mediciones de la intensidad del continuo producido por Bremsstrahlung -transiciones libre-libre- y recombinación en plasmas termonucleares y en plasmas de baja temperatura, son útiles para calcular las densidades de iones y electrones y la temperatura de los electrones si estos tienen una distribución Maxwelliana de velocidades.

Para hidrógeno, helio ionizado una vez y átomos hidrogenoides, la intensidad de radiación en el continuo proveniente de plasmas ópticamente delgados (los plasmas termonucleares de laboratorio son ópticamente delgados para la mayoría de las longitudes de onda del continuo<sup>7</sup>) debido a recombinación y bremsstrahlung es<sup>8,9</sup>:

$$I_\nu = \frac{8}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^4 b Z}{m^2 c^3} \left( \frac{Z^2 \chi_H}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ g_{ff} \exp\left(\frac{\Delta E_i}{kT}\right) + 2 \left( \frac{Z^2 \chi_H}{kT} \right) \sum_{n=n_{\min}}^{n^*} g_{fb} n^{-3} \exp\left(\frac{\Delta E_i}{kT}\right) \right]$$

$$\times N_e N_z \exp(-b\nu/kT) \times l \quad \text{erg cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \quad (31)$$

donde  $\chi_H$  es el potencial de ionización del hidrógeno,  $g_{ff}$  y  $g_{fb}$  son los factores de Gaunt para transiciones libre-libre y libre-ligado respectivamente,  $Z$  es la carga que actúa sobre el electrón óptico o de valencia,  $\Delta E_i$  está dada en la expresión (13),  $n$  es el número cuántico principal del estado excitado que contribuye a la radiación de recombinación,  $N_z$  es la densidad de partículas de carga  $Z$ ,  $l$  es la profundidad de la capa emisora.  $n_{\min}$  está determinado por  $\Delta E_{\min}$  que es la diferencia de energía entre el límite observado de la serie y la energía  $b\nu$  del fotón alrede-

de cuya frecuencia, en el continuo, se está haciendo el análisis. Efectuando la medición de la intensidad alrededor de la frecuencia que interesa y una vez determinada la temperatura de excitación de los electrones, es posible calcular la densidad de electrones cuando  $N_e = N_z = N_i$ :

$$N_e^2 = I_\nu \frac{(27\pi)^{\frac{1}{2}}}{8} \frac{m^2 c^3}{e^2 h Z} \left( \frac{kT}{Z^2 \chi_H} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left[ g_{ff} \exp\left(\frac{\Delta E_i}{kT}\right) + 2 \left( \frac{Z^2 \chi_H}{kT} \right) \sum_{n=n_{\min}}^{n^*} \frac{g_{fb}}{n^3} \exp\left(\frac{\Delta E_i}{kT}\right) \right]^{-1} \frac{\exp(h\nu/kT)}{l} \text{ cm}^{-6}$$

(32)

donde  $n_{\min}$  se determina de la siguiente manera:

En recombinación, la energía  $h\nu$  del fotón emitido es la suma de dos energías, la energía  $E_D$  que se denominará discreta y que está dada como la diferencia en energía, entre el límite de la serie observado y el nivel al cual ocurre la recombinación:

$$E_D = \chi_0 \left( \frac{1}{n_{\min}^2} - \frac{1}{(n^*)^2} \right) ;$$

y la energía  $E_C$ , que se denominará del continuo y que es la energía que posee el electrón en un estado  $\kappa$  del continuo. Por lo tanto esa energía es cinética y es equivalente a la energía de un fotoelectrón en el estado  $\kappa$  del continuo:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

De manera que la energía del fotón emitido por recombinación al estado  $n_m$  es:

$$h\nu = \frac{\chi_0}{n_{\min}^2} - \frac{\chi_0}{(n^*)^2} + \frac{1}{2} m v^2 \quad (33)$$

Esta expresión proporciona un criterio para conocer el número cuántico principal  $n$  min a partir del cual se ha de efectuar la suma en (32):

$$\frac{\chi_0}{n_{\min}^2} < h\nu + \frac{\chi_0}{(n^*)^2} \quad (34)$$

lo cual significa que dada  $h\nu$ , que es la energía alrededor de la cual se observa el continuo, y conocido el límite efectivo de la serie, existe un nivel discreto a partir del cual los electrones que se recombinan contribuyen a determinar la intensidad del continuo en la vecindad de  $h\nu$ .

Cuando  $N_e$  no es igual a  $N_x$ , es necesario combinar la expresión para la intensidad en el continuo  $I_\nu$  y la ecuación de Saha para el equilibrio de la enésima ionización, suponiendo además que la temperatura de los electrones,  $T_e$ , es igual a la temperatura de enésima ionización.

#### D. DENSIDAD DE IONES A PARTIR DE LOS PERFILES DE LAS LINEAS ESPECTRALES DEL HIDROGENO, ENSANCHADOS ESTADISTICAMENTE.

De acuerdo con la teoría estadística de Holtzmark<sup>10</sup> y las teorías mejoradas de Griem, Kolb y Shen<sup>11</sup>, las líneas del hidrógeno emitidas por un plasma deben ensancharse debido a la presencia de campos eléctricos no homogéneos estadísticamente isótropos. Estos campos eléctricos quasi-estáticos son producidos fundamentalmente por iones lentos que se mueven al azar. La teoría del efecto Stark lineal en el caso de campos homogéneos unidireccionales predice una subdivisión de las líneas del hidrógeno cuyo valor depende de la intensidad del campo aplicado a la fuente luminosa.

La teoría de Holtzmark ha sido aplicada<sup>12</sup> considerando el ensanchamiento de cada componente de estructura fina de la línea subdividida. Los perfiles de las bandas resultantes, las cuales se traslapan, se combinan para dar el perfil teórico de la línea completa. Así, se tiene para el perfil de una línea, la expresión:

$$S(\alpha) = \sum \frac{I'_k}{C_k} W\left(\frac{\alpha}{C_k}\right) \quad (35)$$

donde

$$\alpha = \frac{\Delta\lambda}{F_n} \quad (36)$$

es la razón de la distancia, en Å, desde el centro de la línea no perturbada a la intensidad normal de campo eléctrico dada por:

$$F_n = 2.61 e N_i^{2/3} \quad \text{KV/cm.}$$

$I'_k$  es la intensidad relativa, calculada teóricamente, de la componente  $k$  de estructura fina de la línea considerada;  $C_k$  es la distancia, desde el centro de la línea a que quedaría situada la componente  $k$  cuando  $F = 1\text{KV/cm}$ . Los valores de  $I'_k$  y  $C_k$  están tabulados, para las tres primeras líneas de Balmer, en la ref. 13. La función  $W(\alpha/C_k)$  constituye una familia de curvas paramétricas cada una de las cuales está caracterizada por un valor de  $C_k$  correspondiente a cada componente de estructura fina. La distribución de intensidad para cada componente se obtiene multiplicando cada ordenada de  $W(\alpha/C_k)$  por  $I'_k/C_k$  para cada valor de  $\alpha$ . La distribución de intensidad de la línea completa se obtiene sumando las ordenadas correspondientes a cada componente de estructura fina para cada valor de  $\alpha$ . Estas operaciones están tabuladas para  $H_\beta$  en la Tabla incluida.

En virtud de que los perfiles de intensidad de las líneas están dadas como funciones de  $\alpha = \Delta\lambda/F_n$ , el siguiente paso para obtener distribuciones de intensidad en función de diferencias de longitud de onda (estas diferencias se tomen con respecto a  $\lambda_0$  que corresponde al centro de la línea no perturbada), es multiplicar  $\alpha$  por un valor de  $F_n$  en KV/cm. que permita obtener una curva teórica comparable a la experimental. El perfil teórico de la línea sí obtenido, corresponde a una línea de hidrógeno emitida por un plasma en el que la distribución estadística de microcampos eléctricos está caracterizada por  $F_n$ . La densidad de iones presente en

el gas por lo tanto se puede obtener de la expresión  $F_n = 2.61 e N_i^{2/3}$ . En la fig. (1) se tienen las distribuciones estadísticas  $W(\alpha/C_k)$  correspondientes a cada una de las componentes de estructura fina de  $H_\alpha$ ; la fig. (2) presenta las distribuciones de intensidad  $(I'_k/C_k) W(\alpha/C_k)$  para cada una de las componentes de  $H_\beta$  y la fig. (3) las distribuciones teóricas de intensidad  $H_\alpha H_\beta H_\gamma$  en función de  $\alpha$ .

De lo anterior se concluye que las curvas teóricas del tipo  $S(\alpha)$  para la intensidad de las líneas espectrales pueden ser usadas para determinar la densidad de iones  $N_i$  a partir de una línea observada de Balmer. Esto se logra adaptando la curva teórica a la experimental, como ya se indicó, usando un valor adecuado para  $F_n$ .

De los incisos anteriores relativos al cálculo de  $N_i$  utilizando la ecuación de Saha, para cada especie química que intervenga en la composición del plasma, la ecuación de Dalton y la ecuación del equilibrio de carga (suponiendo que el plasma no tiene una carga neta), se puede derivar otro método para el cálculo de parámetros de plasma. Este método es útil en la práctica cuando se supone la existencia de equilibrio térmico o sea, que las distribuciones de velocidades de las distintas especies de partículas están caracterizadas por la misma temperatura a la cual se realizan los fenómenos de excitación e ionización. Entonces, bajo la suposición de la existencia de equilibrio térmico y trabajando con un gas monoatómico, las magnitudes por determinar serían cuatro;  $N_0, N_i, N_e, T$ ; por lo cual debe contarse con un sistema de cuatro ecuaciones que relacionen a esas cuatro variables. Tales relaciones serían, como se mencionó antes, la ecuación de Saha, la ecuación del equilibrio de carga, la ecuación de Dalton y la cuarta sería proporcionada por una cantidad medida, por ejemplo la intensidad absoluta  $I_{\nu_{nm}}$  de una línea espectral con probabilidad de transición conocida o la razón de intensidades de dos líneas espectrales diferentes con probabilidades de transición conocidas. El conjunto de ecuaciones es el siguiente:

$$\frac{N_i N_e}{N_0} = F(T), N_e = N_i, N_e + N_i + N_0 = N, I_{\nu_{nm}} = CAf(T)$$

Si el plasma está compuesto de más de una especie química, la situación es un poco más complicada. Cuando se conocen las abundancias relativas, una sola medición es suficiente para calcular el resto de las magnitudes de importancia. Si no se conocen las abundancias relativas, entonces son necesarias tantas mediciones como especies químicas contenga el gas. Por ejemplo en un arco eléctrico estabilizado por agua los constituyentes químicos del plasma son hidrógeno y oxígeno; por lo tanto es necesario calcular seis cantidades:  $N_i^H, N_i^O, N_0^H, N_0^O, N_e, T$  y las ecuaciones que las relacionan son:

$$\frac{N_i N_e}{N_0} = F(T) \text{ para hidrógeno y oxígeno,}$$

$$N_e = N_i^H + N_i^O, \quad N = N_i^H + N_i^O + N_0^H + N_0^O + N_e$$

y además  $I_{\nu_{nm}} = CA_{mn} f(T)$

$$I_{\nu_{ls}} = CA_{ls} f(T)$$

Sin embargo, surgen algunas dificultades cuando va a ser resuelto el sistema de ecuaciones debido a que sólo se conocen las probabilidades de transición para pocos elementos; además, la temperatura puede ser calculada con mayor precisión cuando los niveles superiores de dos líneas difieren mucho en energía. Por lo que corresponde al hidrógeno, se cuenta con otras dos posibilidades de usar las líneas de Balmer, la primera, a través de la relación de Inglis-Teller<sup>8</sup> y la segunda, de las consecuencias de la Teoría de Holtzmark mediante la adaptación de los perfiles teóricos a los perfiles observados de las líneas de Balmer. Aquí se aprovecha la alta sensibilidad del hidrógeno a los campos eléctricos (efecto Stark) presentes en el seno del plasma; lo que se traduce en un notable ensanchamiento de las líneas debido a la presencia de microcampos eléctricos no homogéneos. Por esta razón, el hidrógeno se usa como medidor de  $N_i$  introduciéndolo en pequeñas cantidades ( $\sim 1\% - 3\%$  de la presión total) dentro de las cámaras en las que se producen descargas para estudiar otros gases.

## CONCLUSION

Los métodos descritos aprovechan la radiación emitida por los gases ionizados y no introducen perturbaciones en éstos, lo cual ha constituido una ventaja importante sobre otras técnicas de diagnóstico que sí perturban el gas ionizado. Además pueden ser utilizados con resultados satisfactorios en plasmas de alta temperatura ( $\sim 10^8$  -°K) y densidades en el intervalo de  $10^{10}$  partículas/cm<sup>3</sup> a  $10^{20}$  partículas/cm<sup>3</sup>.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradecen la revisión y crítica del presente trabajo, hechas por el ing. Mario Vázquez Reyna.

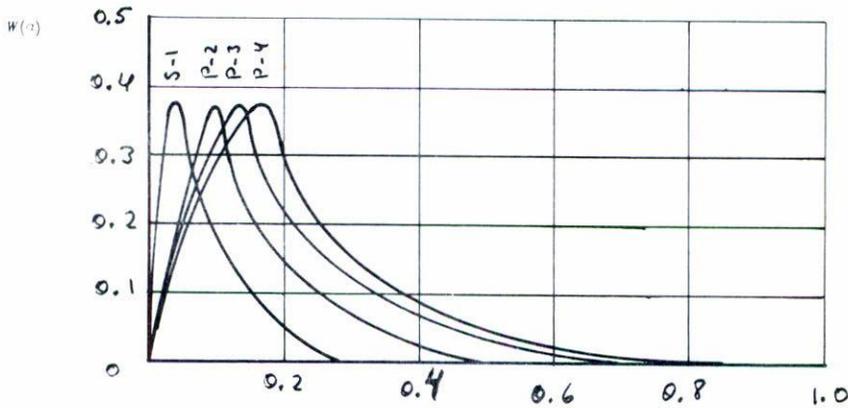


Fig. 1 Curvas paramétricas de algunas Componentes de  $H_2$

$$\alpha = \frac{\Delta\lambda}{E_n} \text{ \AA/kV/cm.}$$

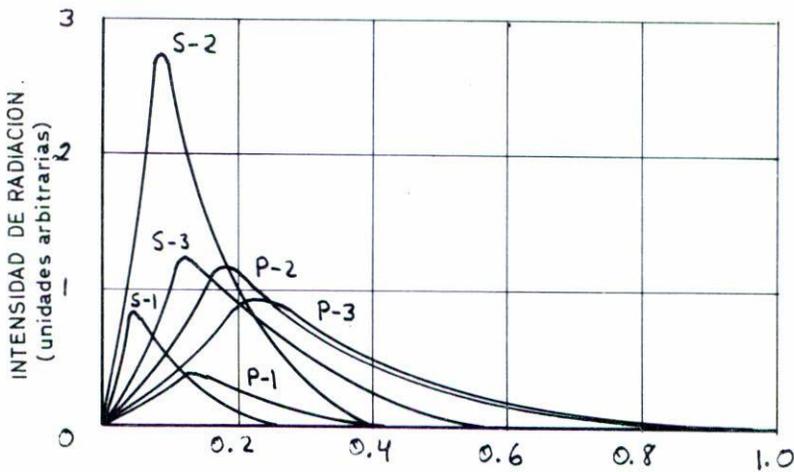


Fig. 2 Intensidades teóricas de las Componentes

$$\alpha = \frac{\Delta\lambda}{E_n} \text{ \AA/kV/cm.}$$

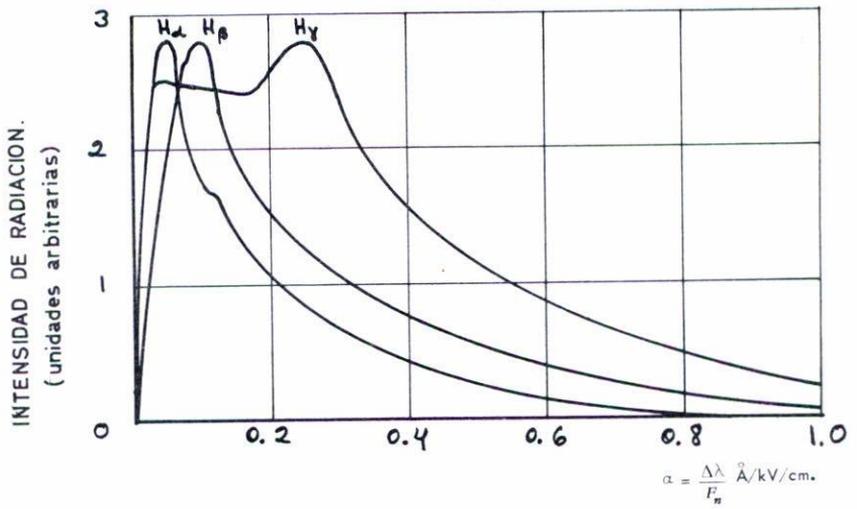


Fig. 3 Perfiles teóricos de  $H_{\alpha}$ ,  $H_{\beta}$ ,  $H_{\gamma}$

$$H_{\beta, P-1}$$

$$C_k = 0.0962$$

$$\frac{I'_k}{C_k} = 0.084 \times 10^4$$

$$\alpha = \beta C_k$$

$\beta$	$\alpha$	$W(\beta)$	$\frac{I'_k}{C_k} W(\beta)$
0.2	0.01924	0.0167	0.0014028
0.4	0.03848	0.0631	0.0053004
0.6	0.05772	0.1296	0.0108864
0.8	0.07696	0.2033	0.0170772
1.0	0.09620	0.2713	0.0227892
1.2	0.11544	0.3240	0.0272160
1.4	0.13468	0.3562	0.0299208
1.6	0.15392	0.3673	0.0308532
1.8	0.17316	0.3600	0.0302400
2	0.19240	0.3392	0.0284928
2.2	0.21164	0.3095	0.0259980
2.4	0.23088	0.2749	0.0230916
2.6	0.25012	0.238	0.019992
2.8	0.26936	0.206	0.017304
3	0.28860	0.176	0.014784
3.2	0.30784	0.150	0.012600
3.4	0.032708	0.128	0.010752
3.6	0.34632	0.111	0.009324
3.8	0.36556	0.098	0.008232
4	0.38480	0.086	0.007224
5	0.48100	0.0431	0.0036204
6	0.57720	0.0242	0.0020328
7	0.67340	0.0153	0.0012852
8	0.76960	0.0104	0.0008736

$$H_{\beta, P-2}$$

$$C_k = 0.1270$$

$$\frac{I'_k}{C_k} = 0.302 \times 10^4$$

$$\alpha = \beta C_k$$

$\beta$	$\alpha$	$W(\beta)$	$\frac{I'_k}{C_k} W(\beta)$
0.2	0.02540	0.0167	0.0050434
0.4	0.05080	0.0631	0.0190562
0.6	0.07620	0.1296	0.0391392
0.8	0.10160	0.2033	0.0613966
1	0.1270	0.2713	0.0819326
1.2	0.15240	0.3240	0.0978480
1.4	0.17780	0.3562	0.1075724
1.6	0.20320	0.3673	0.11109246
1.8	0.22860	0.3600	0.1087200
2	0.25400	0.3392	0.1024384
2.2	0.27940	0.3095	0.0934690
2.4	0.30480	0.2749	0.0830198
2.6	0.33020	0.238	0.071876
2.8	0.35560	0.206	0.062212
3	0.38100	0.176	0.053152
3.2	0.40640	0.150	0.045300
3.4	0.43180	0.128	0.038656
3.6	0.45720	0.111	0.033522
3.8	0.48260	0.098	0.029596
4	0.50800	0.086	0.025972
5	0.63500	0.0431	0.0130162
6	0.76200	0.0242	0.0073084
7	0.88900	0.0153	0.0046206
8	1.01600	0.0104	0.0031408

$$H_{\beta, P-1}$$

$$C_k = 0.1578$$

$$\frac{I_k}{C_k} = 0.229 \times 10^4$$

$$\alpha = \beta C_k$$

$\beta$	$\alpha$	$w(\beta)$	$\frac{I_k'}{C_k} w(\beta)$
0.2	0.03156	0.0167	0.0038243
0.4	0.06312	0.0631	0.0144499
0.6	0.09468	0.1296	0.0296784
0.8	0.12624	0.2033	0.0465557
1	0.15780	0.2713	0.0621277
1.2	0.18936	0.3240	0.0741960
1.4	0.22092	0.3562	0.0815698
1.6	0.25248	0.3673	0.0841117
1.8	0.28404	0.3600	0.0824400
2	0.31560	0.3392	0.0776768
2.2	0.34716	0.3095	0.0708755
2.4	0.37872	0.2749	0.0629521
2.6	0.41028	0.238	0.054502
2.8	0.44184	0.206	0.047174
3	0.47340	0.176	0.040304
3.2	0.50496	0.150	0.034350
3.4	0.53652	0.128	0.029312
3.6	0.56808	0.111	0.025419
3.8	0.59964	0.098	0.022442
4	0.63120	0.086	0.019694
5	0.78900	0.0431	0.0098699
6	0.94680	0.0242	0.0055418
7	1.10460	0.0153	0.0035037
8	1.26240	0.0104	0.0023816

$$H_{\beta, s-1}$$

$$C_k = 0.0327$$

$$\frac{I'_k}{C_k} = 0.220$$

$$\alpha = \beta C_k$$

$\beta$	$\alpha$	$W(\beta)$	$\frac{I'_k}{C_k} W(\beta)$
0.2	0.00654	0.0167	0.0036740
0.4	0.01308	0.0631	0.0138820
0.6	0.01962	0.1296	0.0285120
0.8	0.02616	0.2033	0.0447260
1	0.03270	0.2713	0.0596860
1.2	0.03924	0.3240	0.0712800
1.4	0.04578	0.3562	0.0783640
1.6	0.05232	0.3673	0.0808060
1.8	0.05886	0.3600	0.0792000
2	0.06540	0.3392	0.0746240
2.2	0.07194	0.3095	0.0680900
2.4	0.07848	0.2749	0.0604780
2.6	0.08502	0.238	0.052360
2.8	0.09156	0.206	0.045320
3	0.09810	0.176	0.038720
3.2	0.10464	0.150	0.033000
3.4	0.11118	0.128	0.028161
3.6	0.11772	0.111	0.024420
3.8	0.12426	0.098	0.021560
4	0.13080	0.086	0.018920
5	0.16350	0.0431	0.0094820
6	0.19620	0.0242	0.0053240
7	0.22890	0.0153	0.0033660
8	0.26160	0.0104	0.0022880

$H\beta, s - 2$ 

$C_k = 0.0634$

$\frac{I'_k}{C_k} = 0.718 \times 10^4$

$\alpha = \beta C_k$

$\beta$	$\alpha$	$w(\beta)$	$\frac{I'_k}{C_k} w(\beta)$
0.2	0.01268	0.0167	0.0119906
0.4	0.02536	0.0631	0.0453058
0.6	0.03804	0.1296	0.0930528
0.8	0.05072	0.2033	0.1459694
1	0.06340	0.2713	0.1947934
1.2	0.07608	0.3240	0.2326320
1.4	0.08876	0.3662	0.2629316
1.6	0.10144	0.3673	0.2637214
1.8	0.11412	0.3600	0.2584800
2	0.12680	0.3392	0.2435456
2.2	0.13948	0.3095	0.2222210
2.4	0.15216	0.2749	0.1973782
2.6	0.16484	0.238	0.170884
2.8	0.17752	0.206	0.147908
3	0.19020	0.176	0.126368
3.2	0.20288	0.150	0.107700
3.4	0.21556	0.128	0.091904
3.6	0.22824	0.111	0.079698
3.8	0.24092	0.098	0.070364
4	0.25360	0.086	0.061748
5	0.31700	0.0431	0.0309458
6	0.38040	0.0242	0.0173756
7	0.44380	0.0153	0.0109854
8	0.50720	0.0104	0.0074672

$$H_{\beta}, s = 3$$

$$C_k = 0.0934$$

$$\frac{I'_k}{C_k} = 0.315 \times 10^4$$

$$a = \beta C_k$$

$\beta$	$a$	$W(\beta)$	$\frac{I'_k}{C_k} W(\beta)$
0.2	0.01868	0.0167	0.0052605
0.4	0.03736	0.0631	0.0198765
0.6	0.05604	0.1296	0.0408240
0.8	0.07472	0.2033	0.0640395
1	0.09340	0.2713	0.0854595
1.2	0.11208	0.3240	0.1020600
1.4	0.13076	0.3562	0.1122030
1.6	0.14944	0.3673	0.1156995
1.8	0.16812	0.3600	0.1134000
2	0.18680	0.3392	0.1068480
2.2	0.20540	0.3095	0.0974925
2.4	0.22416	0.2749	0.0865925
2.6	0.24284	0.238	0.074970
2.8	0.26152	0.206	0.064890
3	0.28020	0.176	0.055440
3.2	0.29888	0.150	0.047250
3.4	0.31756	0.128	0.040320
3.6	0.33624	0.111	0.034965
3.8	0.35492	0.098	0.030870
4	0.37360	0.086	0.027090
5	0.46700	0.0431	0.0135765
6	0.56040	0.0242	0.0076230
7	0.65380	0.0153	0.0048195
8	0.74720	0.0104	0.0032760

## REFERENCIAS

1. J.R. McNally Jr., *J. Opt. Soc. Am.* **49**, 328, (1959).
2. Wulff, H., *Nuc. Instr. and Meth.* **4**, 352, (1959).
3. Lochte - Holtgreven, W., *Reports on progress in physics* Vol. XX, p-312, (1958).
4. Aller, L.H., *Astrophysics. The atmospheres of the sun and stars.*  
New York, The Ronald Press Company, 1962 p-176.
5. Olsen, H.N., *The Phys. of Fluids.*, **2**, 614, (1959).
6. Inglis, D.R. and Teller, E., *Astrophys. J.* **90**, 439, (1939).
7. Griem, H.R., *Its Measurements and Control in Science and Industry.* Vol. 3  
part 1. Reynold Publishing Corp. New York, N.Y.
8. Maecker, H. and Peters, T. *Z. Phys.* **139**, 448, (1954).
9. Finkelburg, W. and Maecker, H., *Handbuch der Physik* Bd. XXII.
10. Holtzmark, *Ann.d. Physik* **58**, 576, (1919).
11. Griem, Kolb and Shen, *Phys. Rev.* **116**, 4, (1959).
12. Verweij, S., *Pub. Astr. Univ. Amstr.* # 5, 1936.
13. Dickerman, P.J., *Conference on extremely high temperatures.* Boston, Mass.  
John Wiley, 1958, p-83.

