Vol. XVI, 4 REVISTA MEXICANA DE FISICA 1967

LA TRANSFORMACION DE LORENTZ Y EL MOVIMIENTO DE UNA CARGA EN EL CAMPO ELECTROMAGNETICO CONSTANTE

E. Piña

Reactor Centro Nuclear

Comisión Nacional de Energía Nuclear*

(Recibido: 7 noviembre ' 7)

RESUMEN

Se obtiene la solución explícita de la ecuación diferencial del grupo de Lorentz, haciendo uso de la teoría de tensores antisimétricos de segundo orden en el espacio de Minkowski; con aplicaciones para la transformación de Lorentz, y para el movimiento de una carga en cualquier campo electromagnético constante.

ABSTRACT

The explicit solution for the differential equation of the Lorentz group is derived using the second order skew-symmetric tensors theory in Minkowski's

* Dirección Postal: Comisión Nacional de Energía Nuclear.
Insurgentes Sur 1079. México 18, D.F. México.

space. This solution is applied in the Lorent'z transformation and in the motion of charges with any constant electromagnetic field.

INTRODUCCION

Son bien conocidas en relatividad la elegancia y simplicidad de las expresiones y los cálculos cuando se hace uso de la notación tensorial.

Sin embargo, la falta de información sobre las propiedades algebraicas y analíticas de los tensores ha conducido al tratamiento no-tensorial de numerosos problemas relativistas.

Con el desarrollo "semisecular" de la relatividad, se ha alcanzado un dominio cada vez más amplio del algebra tensorial lo cual nos permite ahora, no solo obtener de nuevo los resultados en forma más elegante, sino también dar nueva información sobre aspectos no muy conocidos, de temas que son de dominio común en la física contemporánea.

Como un ejemplo, en este trabajo se analizan los tensores antisimétricos de segundo orden y se utilizan sus propiedades para integrar la ecuación diferencial del grupo de Lorentz. La analogía entre esta ecuación diferencial y la ecuación de movimiento de una carga en el campo electromagnético constante, sugiere también la solución a este otro problema.

1. TENSORES ANTISIMETRICOS DEL ESPACIO DE MINKOWSKI

En este trabajo tomaremos la métrica

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 0 \\ -1 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 1,2,3 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{1.1}$$

y se va a emplear el tensor unitario, completamente antisimétrico de Levi-Civita que definimos como

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \text{ es permutación par de } 0,1,2,3 \\ -1 & \text{si} \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \text{ es permutación non de } 0,1,2,3 \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Subiremos y bajaremos índices haciendo uso del tensor métrico (1.1); en particular tendremos

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = - \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{1.3}$$

Se conocen las propiedades del tensor de Levi-Civita

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = - \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\kappa} & \delta^{\alpha}_{\lambda} & \delta^{\alpha}_{\mu} \\ \delta^{\beta}_{\kappa} & \delta^{\beta}_{\lambda} & \delta^{\beta}_{\mu} \\ \delta^{\gamma}_{\kappa} & \delta^{\gamma}_{\lambda} & \delta^{\gamma}_{\mu} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

y

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = -2 \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\kappa} & \delta^{\alpha}_{\lambda} \\ \delta^{\beta}_{\kappa} & \delta^{\beta}_{\lambda} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

donde δ^{β}_{α} es la delta de Kronecker.

Introduzcamos ahora algún tensor, real, antisimétrico, de segundo orden $F_{\alpha\beta}$

$$F_{\alpha\beta} = - F_{\beta\alpha} \tag{1.6}$$

El tensor dual al tensor $F_{\alpha\beta}$ se define por

$$F^{\star}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\,F^{\mu\nu} = -\,F^{\star}_{\beta\alpha} \tag{1.7}$$

El cual tiene la propiedad característica (que se puede deducir de (1.5)).

$$F_{\mu\nu} = -\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,F^{\star\,\alpha\beta} \tag{1.8}$$

El tensor antisimétrico $F_{\alpha\beta}$ determina en general dos invariantes

$$F_{\alpha\beta}\,F^{\alpha\beta} = 2H \quad \cos\theta$$

$$F^{\star}_{\alpha\beta}\,F^{\alpha\beta} = 2H \quad \operatorname{sen}\theta \tag{1.9}$$

$$H \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

Esto permite la clasificación: $F_{\alpha\beta}$ es *nulo* o *no-nulo* de acuerdo a que H sea igual o diferente de cero, respectivamente.

Se observa en las definiciones (1.9) que θ no está bien definido cuando $F_{\alpha\beta}$ sea nulo.

En el caso *no-nulo* asociaremos a $F_{\alpha\beta}$ el tensor antisimétrico.

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{H}}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,F_{\alpha\beta} - \cos\frac{\theta}{2}\,F^{\star}_{\alpha\beta}\right) \tag{1.10}$$

El tensor $F_{\alpha\beta}$ puede expresarse como una combinación lineal del tensor (1.10) y de su dual como sigue

$$F_{\alpha\beta} = \sqrt{H}\left(\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,\omega_{\alpha\beta} + \cos\frac{\theta}{2}\,\omega^{\star}_{\alpha\beta}\right) \tag{1.11}$$

El tensor $\omega_{\alpha\beta}$ tiene algunas propiedades interesantes que se dan a continuación. El tensor fue normalizado como

$$\omega_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha\beta} = -2 \tag{1.12}$$

La cual implica por (1.5) que

$$\omega_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta\gamma} - \omega^{\star}_{\alpha\beta}\,\omega^{\star\,\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \tag{1.13}$$

Otra consecuencia de la definición de $\omega_{\alpha\beta}$ es

$$\omega^{\star}_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.14}$$

La cual por (1.6) nos da la importante propiedad

$$\omega^{\star}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta\gamma} = 0 \tag{1.15}$$

De las ecuaciones (1.13) y (1.15) escribimos ahora otras propiedades del tensor $\omega_{\alpha\beta}$ que emplearemos en la siguiente sección para determinar cualquier potencia entera de un tensor antisimétrico arbitrario no nulo. Estas propiedades son

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}{}^{\beta}\,\omega_{\beta}{}^{\mu}\,\omega_{\mu}{}^{\nu} &= \omega_{\alpha}{}^{\nu} \\ \omega^{\star}{}_{\alpha}{}^{\beta}\,\omega^{\star}{}_{\beta}{}^{\mu}\,\omega^{\star}{}_{\mu}{}^{\nu} &= -\,\omega^{\star}{}_{\alpha}{}^{\nu} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Las ecuaciones (1.13) y (1.16) muestran que $\omega_\alpha{}^\beta \omega_\beta{}^\gamma$ y $-\omega^{*}_\alpha{}^\beta \omega^{*}_\beta{}^\gamma$ son operadores de proyección. Y se encuentra que corresponden a una separación del espacio de Minkowski en el producto directo de un par de 2 - planos de géneros tiempo y espacio respectivamente.

Para el caso nulo se tiene la propiedad

$$F_\alpha{}^\beta F_\beta{}^\mu F_\mu{}^\nu = 0 \qquad (1.17)$$

Esta relación será suficiente para obtener cualquier potencia entera del tensor nulo $F_{\alpha\beta}$.

La clasificación precedente de tensores antisimétricos puede mostrarse equivalente al análisis de Synge[1] el cual fue desarrollado en términos de eigenvectores del tensor $F_{\alpha\beta}$. Las conclusiones a las cuales hemos llegado al hacer uso de las propiedades del tensor de Levi-Civita, pueden obtenerse también si se emplea el formalismo de Synge. Nuestro método nos parece contar con la ventaja de la determinación completa del tensor $\omega_{\alpha\beta}$. E inclusive el conocimiento de $\omega_{\alpha\beta}$ proporciona una técnica para obtener los eigenvectores de $F_{\alpha\beta}$.

2. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

En esta sección se hará la integración de la transformación de Lorentz infinitesimal

$$\bar{x}^\mu = (\delta^\mu_\nu + F^\mu{}_\nu\, ds)\, x^\nu \qquad (2.1)$$

donde ds es una cantidad infinitesimal y $F_{\alpha\beta}$ es cualquier tensor antisimétrico constante.

La ecuación diferencial para la transformación de Lorentz, asociada a la transformación infinitesimal (2.1) está dada por

$$\frac{d}{ds} L_\alpha{}^\beta(s) = F_\alpha{}^\gamma L_\gamma{}^\beta(s) \qquad (2.2)$$

Esta ecuación se integra fácilmente. Aquí tomaremos en cuenta sólo el grupo propio de Lorentz, dando la condición inicial

$$L_\alpha{}^\beta(s) = \delta_\alpha^\beta \qquad (s = 0) \qquad (2.3)$$

Se tiene entonces

$$L_\alpha{}^\beta(s) = \exp(s F_\alpha{}^\beta) \qquad (2.4)$$

donde la exponencial está definida por su desarrollo en serie de potencias.

El caso nulo para $F_{\alpha\beta}$ se suma trivialmente debido a la propiedad (1.17) y nos da

$$L_\alpha{}^\beta(s) = \delta_\alpha^\beta + s F_\alpha{}^\beta + \frac{s^2}{2} F_\alpha{}^\gamma F_\gamma{}^\beta \qquad (2.5)$$

En el caso no-nulo podemos suponer sin perder en generalidad

$$H = 1 \qquad (2.6)$$

Descomponemos entonces el tensor antisimétrico $F_{\alpha\beta}$ como en (1.11)

$$F_{\alpha\beta} = (\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \omega_{\alpha\beta} + \cos \frac{\theta}{2} \omega^\star_{\alpha\beta}) \qquad (2.7)$$

Y es fácil ahora sumar la serie (2.4) si tomamos en cuenta las propiedades del tensor $\omega_{\alpha\beta}$. El resultado se expresa como sigue

$$L_\alpha{}^\beta(s) = \omega_\alpha{}^\gamma \omega_\gamma{}^\beta \cosh\left(s \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)$$

$$- \omega^{\star}{}_\alpha{}^{\gamma} \omega^{\star}{}_\gamma{}^{\beta} \cos\left(s \cos \frac{\theta}{2}\right) + \omega_\alpha{}^\beta \operatorname{senh}\left(s \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)$$

$$+ \omega^{\star}{}_\alpha{}^{\beta} \operatorname{sen}\left(s \cos \frac{\theta}{2}\right) \tag{2.8}$$

Esta expresión para la matriz de Lorentz es similar a la expresión que obtuvo Bazański[2] con el método de efectuar la transformación de Lorentz de una tétrada nula de vectores.

Nuestra expresión (2.8) corresponde a la fórmula de Bazański en su nota 7, si se hacen las substituciones

$$\varphi = s \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \qquad \Psi = s \cos \frac{\theta}{2} \tag{2.9}$$

Aparte de la corrección de un error de imprenta, nuestra fórmula (2.8) nos da la nueva información de las ecuaciones (2.9). Esto es una consecuencia de hacer la suma explícita de la serie (2.4). Este nuevo conocimiento se va a emplear en la sección 4 para deducir las trayectorias de partículas cargadas que se mueven en un campo electromagnético constante.

Bazański[2] obtuvo también una expresión similar a la de nuestra ecuación (2.5) para el caso nulo. La cual debe corregirse añadiendo un factor $\frac{1}{2}$ como aparece en nuestra ecuación.

Es interesante observar también que la matriz de Lorentz (2.8) se factoriza en dos transformaciones de Lorentz que conmutan entre sí

$$L_\alpha{}^\beta(s) = M_\alpha{}^\gamma(s)\, N_\gamma{}^\beta(s) = N_\alpha{}^\gamma(s)\, M_\gamma{}^\beta(s) \tag{2.10}$$

donde

$$M_{\alpha}{}^{\beta}(s) = \omega_{\alpha}{}^{\gamma}\omega_{\gamma}{}^{\beta} \;\; \cosh \left(s \;\; \mathrm{sen}\; \frac{\theta}{2}\right)$$

$$+ \omega_{\alpha}{}^{\beta} \;\; \mathrm{senh}\left(s \;\; \mathrm{sen}\;\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$+ \left(\delta_{\alpha}^{\beta} - \omega_{\alpha}{}^{\gamma}\omega_{\gamma}{}^{\beta}\right) \tag{2.11}$$

y

$$N_{\alpha}{}^{\beta}(s) = - \omega_{\alpha}^{\star\gamma}\omega_{\gamma}^{\star\,\beta} \;\; \cos\left(s \;\; \cos\;\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$+ \omega_{\alpha}^{\star\beta} \;\; \mathrm{sen}\left(s \;\; \cos\;\frac{\theta}{2}\right) + \left(\delta_{\alpha}^{\beta} + \omega_{\alpha}^{\star\,\gamma}\omega_{\alpha}^{\star\,\beta}\right) \tag{2.12}$$

3. TRANSFORMACION DE LORENTZ EN ESPACIOS ESPINORIALES.

La representación de Lorentz en espacios de espinores se asocia ahora con la representación precedente.

Esto se obtuvo relacionando la transformación de Lorentz infinitesimal en diferentes espacios e integrando las ecuaciones diferenciales correspondientes.

En el espacio de espinores asociado a la ecuación de Dirac, la transformación de Lorentz infinitesimal está determinada por la matriz[3]

$$I + \frac{1}{4}\, F_{\alpha\beta}\, \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\, ds \tag{3.1}$$

donde I es la matriz unidad (4×4) y γ^{μ} son una representación para las cuatro matrices de Dirac que satisfacen

$$\frac{1}{2}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}) = I\eta^{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

La integración de la expresión (3.1), en el caso nulo para $F_{\alpha\beta}$ nos da simplemente

$$L(s) = I + \frac{s}{4} F_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} \tag{3.3}$$

Mientras que en el caso no-nulo del tensor $F_{\alpha\beta}$, la transformación finita de Lorentz que corresponde a (3.1) está dada por

$$\begin{aligned} L(s) = {} & \frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \cos\left(\frac{s}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{s}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2}\,\omega^{*}_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \cosh\left(\frac{s}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) + \\ & + I \cos\left(\frac{s}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \cosh\left(\frac{s}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \\ & - \gamma^{5} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{s}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde γ^5 es como de costumbre

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3.5}$$

La factorización (2.10) está representada ahora por

$$L(s) = M(s)\,N(s) = N(s)\,M(s) \tag{3.6}$$

con las definiciones

$$\left.\begin{aligned} M(s) &= I \cosh\left(\frac{s}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\, \omega_{\alpha\beta}\, \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \operatorname{senh}\left(\frac{s}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right) \\ \text{y} \qquad & \\ N(s) &= I \cos\left(\frac{s}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\, \omega^{*}_{\alpha\beta}\, \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Otra representación frecuente del grupo de Lorentz es la formada por el conjunto de matrices complejas de segundo orden con determinante igual a uno.[4]

En esta representación, la transformación infinitesimal está dada por la matriz

$$I + ds\, \frac{1}{2} (\mathbf{E} + i\, \mathbf{B}) \cdot \bar{\sigma} \tag{3.8}$$

donde los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ están definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \{F_{01}, F_{02}, F_{03}\} \\ \text{y} \qquad \mathbf{B} &= \{F_{32}, F_{13}, F_{21}\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

El "vector" $\bar{\sigma}$ tiene por componentes las matrices de Pauli

$$\bar{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3.10}$$

e I es la matriz unidad (2×2).

La integración de (3.8) en el caso nulo nos da la matriz

$$L(s) = I + \frac{s}{2} (\mathbf{E} + i\,\mathbf{B}) \cdot \bar{\sigma} \tag{3.11}$$

Mientras que en el caso no-nulo estará determinada por

$$L(s) = I \cos\left[\frac{s}{2} \exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\right)\right] + $$

$$+ i(\mathbf{e} + i\,\mathbf{b}) \cdot \bar{\sigma} \ \operatorname{sen}\left[\frac{s}{2} \exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{3.12}$$

donde

$$\mathbf{e} = \{\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}\}$$

y (3.13)

$$\mathbf{b} = \{\omega_{32}, \omega_{13}, \omega_{21}\}$$

El miembro derecho de (3.12) se factoriza en las dos matrices conmutativas

$$M(s) = I \cosh\left(\frac{s}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right) + (\mathbf{e} + i\,\mathbf{b}) \cdot \bar{\sigma} \ \operatorname{senh}\left(\frac{s}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)$$

y

$$N(s) = I \cos\left(\frac{s}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) + i\,(\mathbf{e} + i\,\mathbf{b}) \cdot \bar{\sigma} \ \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

(3.14)

El álgebra de las matrices de Pauli está en numerosos libros de texto. Mientras que para obtener la expresión (3.4) utilizamos un formalismo similar al de Cercignani.[5]

4. CARGA EN UN CAMPO ELECTROMAGNETICO CONSTANTE.

Las ecuaciones de movimiento de una carga en un campo electromagnético constante tienen la forma

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{4.1}$$

donde m, e y $x^\alpha(\tau)$ son la masa, la carga y la posición de la partícula. Esta última es función del tiempo propio τ, medido a partir de cierto punto.

$$x^\nu(0) = x^\nu(\tau) \quad (\tau = 0) \tag{4.2}$$

y tal que τ crece en la dirección del futuro.

La ecuación (4.1) sugiere la solución

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = L^\mu{}_\nu \left(\frac{e}{mc} \tau\right) u^\beta \tag{4.3}$$

donde u^β es el valor, para $\tau = 0$, de $dx^\beta/d\tau$ y donde $L^\alpha{}_\beta(s)$ es el tensor de transformaciones de Lorentz (2.5) o (2.8).

Para el caso nulo se obtendrá

$$L^\alpha{}_\beta \left(\frac{e}{mc} \tau\right) = \delta^\alpha_\beta + \tau \frac{e}{mc} F^\alpha{}_\beta + \tau^2 \frac{e^2}{2m^2 c^2} F^\alpha{}_\gamma F^\gamma{}_\beta \tag{4.4}$$

Para el caso no nuio se obtiene

$$L^\alpha{}_\beta \left(\frac{e\sqrt{H}}{mc} \tau\right) = \omega^\alpha{}_{\bar{\gamma}} \omega^\gamma{}_\beta \cosh\left(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)$$

$$- \omega^{*\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{*\gamma}{}_{\beta} \cos\left(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

$$+ \omega^{\alpha}{}_{\beta} \operatorname{senh}\left(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)$$

$$+ \omega^{*\alpha}{}_{\beta} \operatorname{sen}\left(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \cos \frac{\theta}{2}\right) \qquad (4.5)$$

La ecuación (4.3) se integra inmediatamente con cuatro casos particulares a saber.

1) $H \neq 0$

$$x^{\alpha}(\tau) = x^{\alpha}(0) + \{\tau\, \delta^{\alpha}_{\beta} + \tau^{2} \frac{e}{2mc} F^{\alpha}{}_{\beta} +$$

$$+ \tau^{3} \frac{e^{2}}{6m^{2}c^{2}} F^{\alpha}{}_{\gamma} F^{\gamma}{}_{\beta}\} u^{\beta} \qquad (4.6)$$

2) $H \neq 0$, $\cos \frac{\theta}{2} \neq 0$

$$x^{\alpha}(\tau) = x^{\alpha}(0) + \{ \frac{mc}{e\sqrt{H}} \operatorname{senh}\left(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc}\right) \omega^{\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{\gamma}{}_{\beta} +$$

$$+ \frac{mc}{e\sqrt{H}} \left[\cosh\left(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc}\right) - 1\right] \omega^{\alpha}{}_{\beta} +$$

$$+ \tau\, \omega^{*\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{*\gamma}{}_{\beta}\} u^{\beta} \qquad (4.7)$$

3) $H \neq 0$, $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = 0$

$$x^{\alpha}(\tau) = x^{\alpha}(0) + \{- \frac{mc}{e\sqrt{H}} \operatorname{sen}(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc}) \omega^{\star\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{\star\gamma}{}_{\beta} +$$

$$- \frac{mc}{e\sqrt{H}} \left[\cos(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc}) - 1 \right] \omega^{\star\alpha}{}_{\beta} +$$

$$+ \tau\, \omega^{\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{\gamma}{}_{\beta} \}\, u^{\beta} \tag{4.8}$$

4) $H \neq 0$, $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \neq 0$, $\cos \frac{\theta}{2} \neq 0$

$$x^{\alpha}(\tau) = x^{\alpha}(0) + \{ \frac{mc}{e\sqrt{H} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \operatorname{senh}(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}) \omega^{\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{\gamma}{}_{\beta} +$$

$$- \frac{mc}{e\sqrt{H} \cos \frac{\theta}{2}} \operatorname{sen}(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \cos \frac{\theta}{2}) \omega^{\star\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{\star\gamma}{}_{\beta} +$$

$$+ \frac{mc}{e\sqrt{H} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \left[\cosh(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}) - 1 \right] \omega^{\alpha}{}_{\beta} +$$

$$- \frac{mc}{e\sqrt{H} \cos \frac{\theta}{2}} \left[\cos(\tau \frac{e\sqrt{H}}{mc} \cos \frac{\theta}{2}) - 1 \right] \omega^{\star\alpha}{}_{\beta} \}\, u^{\beta} \tag{4.9}$$

para el caso nulo (4.6), ninguno de los sumandos de esta ecuación puede ser cero para todas las componentes α, excepto la posición inicial $x^{\alpha}(0)$.

El análisis geométrico de las soluciones en el caso no-nulo se facilita si observamos que están expresadas en la base de vectores

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta}\, u^{\beta},\ \omega^{\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{\gamma}{}_{\beta}\, u^{\beta},\ \omega^{\star\alpha}{}_{\beta}\, u^{\beta},\ \omega^{\star\alpha}{}_{\gamma}\, \omega^{\star\gamma}{}_{\beta}\, u^{\beta}$$

La primera pareja de vectores nunca se anula, pero puede presentarse el caso en que la segunda pareja sea nula cuando $\omega_{\alpha\beta}$ satisfaga la ecuación

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{c^2}\left(\omega^{\alpha\gamma} u_{\gamma}\, u^{\beta} - \omega^{\beta\gamma} u_{\gamma}\, u^{\alpha}\right) \tag{4.10}$$

Esta situación permite una trayectoria rectilínea con velocidad constante en el caso 3 descrito por la ecuación (4.8).

En general, los cuatro vectores no se anulan y son mutuamente ortogonales. Además, para la primera pareja de vectores se tiene la misma magnitud en valor absoluto y uno de ellos es de género espacio y el otro de género tiempo. La segunda pareja tiene misma magnitud y género espacio. En los tres casos observamos que el movimiento está compuesto de tres movimientos consistentes en una translación, una rotación con velocidad angular constante y una rotación imaginaria con velocidad angular constante. Se tienen tres posibilidades de combinar en parejas estos movimientos y la translación y rotación imaginaria, pueden existir sin combinación, cuando se satisfaga la condición inicial (4.10).

El análisis de estos movimientos al proyectarse en un 3-plano de tiempo constante puede verse por ejemplo en la ref. 6.

DISCUSION

La expresión formal obtenida para la transformación de Lorentz es análoga en tres dimensiones a la matriz ortogonal expresada en función de la dirección y el ángulo de rotación. Aunque existe como precedente a esta expresión formal un resultado de Bazański, agregamos información que permite la solución general del problema de una carga en un campo electromagnético constante.

Otros resultados que no hemos encontrado en la literatura son la extensión de los resultados a otras representaciones del grupo de Lorentz, y la factorización de una clase general de transformaciones de Lorentz, en dos transformaciones del mismo grupo y que conmutan entre sí.

BIBLIOGRAFIA

1. J.L. Synge, Relativity, the Special Theory. North Holland Publ. 1956.
2. S.L. Bazański, J.Math.Phys. 6, 1201 (1965).
3. N.N. Bogoliubov y D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields. Interscience Publ. 1959.
4. I.M. Gel'fand, R.A. Minlos y Z.Ya. Shapiro, Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications. Pergamon Press. 1963.
5. C. Cercignani, J.Math.Phys. 8, 417 (1967).
6. L. Landau y E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields. Addison Wesley Publ. Co. 1959.