SOBRE UNA FUNCION INVARIANTE DE ESFUERZOS DE MEMBRANA

E. Piña

Instituto Mexicano del Petróleo*

(Recibido: 30 Junio 1968)

RESUMEN

Se obtiene una expresión en notación tensorial para la ecuación diferencial que satisface la función potencial de esfuerzos de membrana en un cascarón. Se analiza dicha ecuación cuando la superficie es mínima y se obtiene su solución en el caso particular de una catenoide.

ABSTRACT

The differential equation for the potential Airy's function of membrane presses is invariantly derived in tensorial notation. The minimal surfaces are discussed and the particular case of a catenoid is further considered.

*Dirección Postal: Investigación Científica Aplicada, Av. Cien Metros 500, México 14, D.F.

La determinación del estado de esfuerzos elasticos en un cascarón delgado se puede simplificar considerablemente, en algunos casos, cuando sea permitido despreciar los esfuerzos no tangentes a la superficie (media) del cascarón.

La teoría aproximada que resulta, se llama teoría de la membrana. Tiene la característica de que las ecuaciones de equilibrio hacen posible conocer el estado de esfuerzos sin relación directa al estado de deformación. (La relación es únicamente a través de las condiciones en los bordes).

En cualquier caso, las soluciones obtenidas dentro de la teoría de la membrana son de mucha utilidad para el diseño de cascarones. El caso ideal es cuando los esfuerzos resultantes que se obtienen de la teoría de la membrana permiten satisfacer las condiciones en los bordes del cascarón. Entonces la teoría de la membrana dá una solución completa.

Pero en el caso más general, la teoría de la membrana proporciona todavía una solución particular aproximada, la cual es importante en toda teoría lineal de cascarones.

La teoría de la membrana proporciona tres ecuaciones de equilibrio de esfuerzos.

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = f^{\alpha} \qquad (\alpha = 1,2)$$

$$T^{ab} b_{\alpha\beta} = f$$

donde f^{α}, f son fuerzas externas por unidad de área y $T^{\alpha\lambda}$ son los esfuerzos en el cascarón.

En problemas elásticos de dos dimensiones (esfuerzos planos, teoría de placas, cascarones), los esfuerzos o resultantes de esfuerzos, se pueden expresar en términos de una función potencial G, algunas veces llamada función de Airy[3].

La función G permite reducir en número, las condiciones de equilibrio que debe satisfacer dicha función.

La función potencial G, fué introducida en la teoría de la membrana por Pücher[2], (ver también[3, 4 y 8]). El cálculo de Pücher se efectuó en sistemas coordenados particulares. Este trabajo ha sido generalizado por Zerna[8], (también[3 y 4]). Zerna ha expresado la ecuación diferencial de Pücher con ayuda del cálculo tensorial, pero como en el trabajo de Pücher, Zerna trata las condiciones de equilibrio para proyección plana de los esfuerzos. En otras palabras se trabaja con tensores en un espacio plano de dos dimensiones.

Muchas propiedades geométricas se modifican esencialmente al hacer una proyección. Esto suele enmascarar simetrías que pueden ayudar a la solución del problema. Parece por ello adecuado considerar una generalización al problema, y expresar la ecuación diferencial con notación tensorial y un sistema coordenado arbitrario.

Esto mismo, fué intentado ya por Langhaar[9] aunque sus resultados fueron muy particulares.

En este artículo, hemos querido acompañar esta generalización de utilizar una notación tensorial sobre la superficie del cascarón, a otra generalización que consiste en suprimir el requisito impuesto por Zerna[8, 3] sobre el conocimiento de una solución particular de las ecuaciones de equilibrio.

Para el cálculo de esfuerzos en el cascarón vamos a usar un conjunto de notaciones, definiciones y propiedades geométricas, que tomamos de la geometría diferencial[1, 3].

La lista que sigue corresponde a las más importantes.

Supondremos que la superficie del cascarón está referida a dos familias de curvas coordenadas $u^{\alpha}(\alpha = 1,2)$. En ese sistema $a_{\alpha\beta}$ será el tensor métrico sobre la superficie. Los vectores $\boldsymbol{a}_{\alpha}(\alpha = 1,2)$ son vectores tangentes a las líneas coordenadas y tales que

$$a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_{\beta} \tag{1.1}$$

a es el determinante de la matriz de componentes $a_{\alpha\beta}$.

$\boldsymbol{a}^{\alpha}$ son vectores tangentes a la superficie, tales que

$$\boldsymbol{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{1.2}$$

El tensor

$$a^{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}^{\beta} \tag{1.3}$$

es el inverso del tensor métrico (1.1). Los tensores (1.1) y (1.3) serán usados para subir y bajar índices.

$\boldsymbol{g}$ es el vector unitario perpendicular a la superficie.

$b_{\alpha\beta}$ es el tensor de la segunda forma fundamental sobre la superficie.

$E_{\alpha\beta}$ es el tensor antisimétrico de la superficie, caracterizado por

$$E_{12} = \sqrt{a} \tag{1.4}$$

Este tensor tiene derivada covariante nula, y satisface la ecuación.

$$E^{\alpha\beta} E_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\mu} \tag{1.5}$$

Tenemos las propiedades

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^{\beta}}{\partial \boldsymbol{u}^{\gamma}} = - \Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{a}^{\alpha} + b^{\beta}_{\gamma} \boldsymbol{g} \tag{1.6}$$

y

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}^{\alpha}} = - b_{\alpha\beta} \boldsymbol{a}^{\beta} \tag{1.7}$$

donde $\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}$ es el símbolo de Christoffel de la superficie.

Usaremos los dos invariantes geométricos: la curvatura gaussiana

$$K = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} b^{\alpha\mu} b^{\beta\nu} E_{\alpha\beta} E_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

y la curvatura media

$$H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \tag{1.9}$$

$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor de Riemann de la superficie.

El tensor $b_{\alpha\beta}$ satisface las ecuaciones de Gauss y Codazzi:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = b_{\alpha\mu} b_{\beta\nu} - b_{\alpha\nu} b_{\beta\mu} \tag{1.10}$$

$$b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0 \tag{1.11}$$

donde la coma denota la derivada covariante.

El tensor $E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} b_{\mu\nu}$ es K veces el inverso del tensor $b_{\alpha\beta}$, y tiene divergencia nula, según (1.11).

Se tiene la propiedad conmutativa para la derivada covariante de un escalar G,

$$G_{,\alpha\mu\nu} - G_{,\alpha\nu\mu} = R^{\beta}{}_{\alpha\mu\nu} G_{,\beta} \tag{1.12}$$

Todo tensor antisimétrico $S_{\alpha\beta}$ satisface la ecuación:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (S_{\mu\nu} E^{\mu\nu}) E_{\alpha\beta} \tag{1.13}$$

II. FUNCION INVARIANTE DE ESFUERZOS EN LA TEORIA DE LA MEMBRANA DE CASCARONES.

Esta sección está dedicada a substituir el sistema de ecuaciones que determinan el equilibrio de membrana de un cascarón por una ecuación diferencial parcial para un escalar G. Esta función G sirve como potencial para obtener los esfuerzos de membrana del cascarón.

Las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos de membrana en un cascarón de densidad de masa uniforme por unidad de área ρ, sujeto a la fuerza externa producida por su peso, están dadas por el sistema[5].

$$T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = -\rho\, \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.1}$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = -\rho\, \mathbf{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.2}$$

donde $T^{\alpha\beta}$ es el tensor simétrico de esfuerzos de membrana por unidad de longitud de arco y $\boldsymbol{\epsilon}$ es el vector unitario constante en la dirección vertical en que actúa la fuerza externa.

El tensor de esfuerzos de membrana se va a obtener a partir de una función potencial por medio de la ecuación,

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}} E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} G_{,\mu\nu} + \frac{E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} b_{\mu\nu}}{(\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon})^2}\, \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{a}^{\gamma} G_{,\gamma} \tag{2.3}$$

Calculamos a partir de esta expresión la divergencia del tensor, $T_{\alpha\beta}$, haciendo uso de las definiciones y propiedades geométricas de la sección 1. Se obtiene

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{1}{(\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon})^2} b_{\beta\gamma}\, \mathbf{a}^{\gamma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\, E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} G_{,\nu\mu} - \frac{K}{\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}} G_{,}^{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{(g \cdot \epsilon)^2} E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} b_{\mu\nu} \epsilon \cdot a^\gamma G_{,\gamma\beta} + \frac{E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} b_{\mu\nu}}{g \cdot \epsilon} b^\gamma_\beta G_{,\gamma} +$$

$$+ 2 \frac{E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} b_{\mu\nu}}{(g \cdot \epsilon)^3} b_{\beta\lambda} \epsilon \cdot a^\lambda \epsilon \cdot a^\gamma G_{,\gamma} \qquad (2.4)$$

Usamos ahora la propiedad (1.13) en el tensor antisimétrico.

$$E^{\beta\nu}(b_{\beta\gamma} G_{,\nu\mu} - b_{\beta\mu} G_{,\nu\gamma}) \qquad (2.5)$$

Esta se substituye en (2.4) y después de un breve cálculo donde se hacen uso nuevamente de las propiedades geométricas de la sección I se encuentra

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{1}{g \cdot \epsilon} a^\alpha \cdot \epsilon\, b_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \qquad (2.6)$$

donde se ha expresado el miembro derecho tomando en cuenta (2.3).

La ecuación (2.6) puede deducirse del sistema (2.1) y (2.2), por lo cual la ecuación (2.2) es satisfecha si $T^{\alpha\beta}$ está dado por (2.3) y si $T^{\alpha\beta}$ satisface (2.1).

En consecuencia el sistema de ecuaciones (2.1) y (2.2) puede substituirse por la ecuación que resulta de introducir la forma (2.3) para $T^{\alpha\beta}$ en (2.1). Se encuentra entonces la ecuación para la función potencial G, a saber,

$$\frac{1}{(g \cdot \epsilon)^2} b_{\alpha\beta} E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} G_{,\mu\nu} + \frac{2K}{(g \cdot \epsilon)^3} \epsilon \cdot a^\nu G_{,\nu} = - \rho \qquad (2.7)$$

Al volver a hacer uso de las propiedades que permiten obtener (2.4) y (2.6) podemos transformar la ecuación (2.7) a la forma más compacta,

$$\left[b_{\alpha\beta} E^{\alpha\mu} E^{\beta\nu} \frac{G_{,\nu}}{(g \cdot \epsilon)^2} \right]_{,\mu} = - \rho \tag{2.8}$$

En esta ecuación las derivadas covariantes aparecen en las formas de gradiente de un escalar y divergencia de un vector, las cuales son más aptas para el cálculo.

El problema de obtener la solución del sistema de ecuaciones (2.1) y (2.2) ha sido cambiado a la solución de una ecuación diferencial parcial, lineal, de segundo orden, en dos variables.

Como ha sido encontrado en los trabajos, ya citados[2,3,4,5], el tipo de ecuación diferencial (2.8) y el tipo de la superficie (determinado con el signo de K) están íntimamente relacionados. Las superficies hiperbólicas, parabólicas y elípticas, dan lugar respectivamente a una ecuación hiperbólica, parabólica o elíptica.

Por otra parte, la selección del sistema coordenado apropiado, permite reducir la ecuación a la forma normal, considerada en la teoría de esas ecuaciones[5].

En efecto, la forma normal para los tipos hiperbólico y parabólico se encuentran en el sistema coordenado de las líneas asintóticas, mientras que la forma normal para el tipo elíptico se encontrará en el sistema de las líneas de curvatura principal.

La geometría diferencial nos proporciona pues información muy útil en el estudio de dicha ecuación al reducirnos el problema matemático a su expresión más simple, cuando hacemos uso de las características geométricas de la superficie.

La expresión tensorial de la ecuación permite además expresarla fácilmente en un sistema coordenado arbitrario.

III. SUPERFICIES MINIMAS

Las superficies mínimas están caracterizadas por la propiedad de que el área contenida en un contorno cerrado de la superficie es una extremal[7].

La condición necesaria y suficiente para ellos es[6,7]

$$H = 0 \tag{3.1}$$

la cual indica que los radios de curvatura principal difieren en signo y son iguales en valor absoluto.

Sobre cualquier superficie, las líneas asintóticas están definidas por las soluciones de la ecuación diferencial[1]

$$b_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} = 0 \tag{3.2}$$

En una superficie mínima, las líneas asintóticas, forman un sistema ortogonal de líneas sobre la superficie[6], el cuál tomaremos como sistema coordenado.

Por medio de una cuadratura[6] es posible escoger las coordenadas asintóticas de manera que $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$ adquieran las expresiones

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

y

$$b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

donde

$$k = \sqrt{-K} \tag{3.5}$$

es el inverso del valor absoluto de un radio de curvatura principal.

Por lo cual, el determinante a vale

$$a = \frac{1}{k^2} \tag{3.6}$$

Para toda superficie mínima se tiene la propiedad característica

$$b_{\alpha\beta}\, E^{\alpha\lambda}\, E^{\beta\gamma} = - b^{\lambda\gamma} \tag{3.7}$$

Substituyendo estas cantidades en la ecuación diferencial (2.8) se encuentra la ecuación

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\partial}{\partial u^1}\left[\frac{k}{(g \cdot \epsilon)^2}\frac{\partial G}{\partial u^2}\right] + \frac{\partial}{\partial u^2}\left[\frac{k}{(g \cdot \epsilon)^2}\frac{\partial G}{\partial u^1}\right] \tag{3.8}$$

Esta ecuación se escribe también en la forma

$$\frac{\rho}{k} = \frac{2k}{(g \cdot \epsilon)^2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u^1}\left[\frac{k}{(g \cdot \epsilon)^2}\right]\frac{\partial G}{\partial u^2} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u^2}\left[\frac{k}{(g \cdot \epsilon)^2}\right]\frac{\partial G}{\partial u^1} \tag{3.9}$$

Sea

$$F = \frac{\sqrt{k}}{g \cdot \epsilon} \tag{3.10}$$

y hagamos el cambio de variable dependiente

$$J = GF \tag{3.11}$$

La ecuación diferencial (3.9) adquiere entonces la forma normal hiperbólica

$$\frac{\rho}{2k} = F \frac{\partial^2 J}{\partial u^1 \partial u^2} - J \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} \tag{3.12}$$

Hagamos notar una propiedad que será útil más adelante y que consiste en observar que $J = F$ es una solución particular evidente de la ecuación homogénea asociada a (3.12). Esta "constante de integración" es trivial puesto que no contribuye al cálculo del tensor de esfuerzos.

IV. LA CATENOIDE

En esta sección vamos a considerar el caso particular de una catenoide, la cual es la única superficie mínima de revolución[6], no trivial.

La catenoide se puede generar haciendo rotar una catenaria alrededor del eje de las ordenadas.

Las coordenadas cartesianas en el espacio, de los puntos de la catenoide, están dados en función de las coordenadas asintóticas por las ecuaciones paramétricas.

$$x = A\, ch \left(\frac{z^1 + z^2}{\sqrt{2A}} \right) \text{ sen } \left(\frac{z^1 - z^2}{\sqrt{2A}} \right)$$

$$y = \sqrt{\frac{A}{2}} \quad (z^1 + z^2)$$

$$z = A\, ch \left(\frac{z^1 + z^2}{\sqrt{2A}} \right) \cos \left(\frac{z^1 - z^2}{\sqrt{2A}} \right) \tag{4.1}$$

El eje de simetría ha sido elegido coincidente al eje coordenado OY. El radio de curvatura principal, en las coordenadas asintóticas es

$$k = \frac{1}{A\, cb^2\, \dfrac{z^1 + z^2}{\sqrt{2A}}} \tag{4.2}$$

Si consideramos al vector ϵ en la dirección OZ, perpendicular al eje de simetría, el cálculo de la función F se reduce a

$$F = \frac{1}{\sqrt{A}\, \cos \dfrac{z^1 - z^2}{\sqrt{2A}}} \tag{4.3}$$

Y la ecuación diferencial para la función J va a tomar la forma

$$\frac{\partial^2 J}{\partial z^1 \partial z^2} + \frac{J}{2A} \left[\frac{2}{\cos^2 \left(\dfrac{z^1 - z^2}{\sqrt{2A}} \right)} - 1 \right] =$$

$$= \frac{\rho}{2} A^{3/2} \cos \frac{z^1 - z^2}{\sqrt{2A}}\, cb^2 \left(\frac{z^1 + z^2}{\sqrt{2A}} \right) \tag{4.4}$$

Esta ecuación puede expresarse en forma más simple si cambiamos de coordenadas a las líneas de curvatura principal.

$$y^1 = \frac{z^1 + z^2}{\sqrt{2}} \qquad y^2 = \frac{z^1 - z^2}{\sqrt{2}} \tag{4.5}$$

La ecuación diferencial (4.4) en las nuevas coordenadas está dado por

$$\frac{\partial^2 J}{(\partial y^1)^2} - \frac{\partial^2 J}{(\partial y^2)^2} + \frac{J}{A}\left(\frac{2}{\cos^2 \frac{y^2}{\sqrt{2}}} - 1\right) =$$

$$= \rho A^{3/2} \cos \frac{y^2}{\sqrt{A}} \quad ch^2 \frac{y^1}{\sqrt{A}} \tag{4.6}$$

La solución general de esta ecuación es la suma de una solución particular y la solución general de la ecuación homogénea.

La parte homogénea es soluble por el método de separación de variables. Si se aplica este método, la integración de la ecuación diferencial asociada a la variable y^1 es trivial, mientras que para la ecuación correspondiente a la variable y^2, se conoce la solución particular,

$$J = F = \frac{1}{\sqrt{A} \cos \frac{y^2}{\sqrt{A}}} \tag{4.7}$$

y por ello la integración es inmediata.

Nos concretamos entonces a deducir una solución particular de la ecuación (4.6). Transformamos primero la ecuación a la variable

$$M = \frac{J}{\cos \frac{y^2}{\sqrt{A}}} \tag{4.8}$$

y la ecuación se convierte entonces en

$$\frac{\partial^2 M}{(\partial y^1)^2} - \frac{\partial^2 M}{(\partial y^2)^2} + \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{\partial M}{\partial y^2} \tan \frac{y^2}{\sqrt{A}} + \frac{2M}{A} \frac{1}{\cos^2 \frac{y^2}{\sqrt{A}}} =$$

$$= \rho A^{3/2} \, c b^2 \, \frac{y^1}{\sqrt{A}} \tag{4.9}$$

Entonces se tiene la solución particular

$$M = \frac{\rho A^{3/2}}{4} \left[2 \, c b^2 \, \frac{y^1}{\sqrt{A}} - 1 \right] N + \frac{\rho A^{3/2}}{4} \, P \tag{4.10}$$

donde N y P son funciones de y^2 que satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 P}{(d y^2)^2} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{dP}{dy^2} \tan \frac{y^2}{\sqrt{A}} - \frac{2P}{A} \frac{1}{\cos^2 \frac{y^2}{\sqrt{A}}} = -1 \tag{4.11}$$

y

$$\frac{d^2 N}{(d y^2)^2} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{dN}{dy^2} \tan \frac{y^2}{\sqrt{A}} - \frac{2N}{A} \frac{1}{\cos^2 \frac{y^2}{\sqrt{A}}} + \frac{4N}{A} = -1 \tag{4.12}$$

Para obtener la solución de (4.11) se tomó en cuenta que $J = F$ es la solución particular de la parte homogénea de la ecuación (4.6). Esto implica a su vez, que por la transformación (4.8), la función

$$M = \frac{F}{\cos \frac{y^2}{\sqrt{A}}} \tag{4.13}$$

sea solución particular de la parte homogénea de la ecuación diferencial parcial (4.9).

Resulta que (4.13) es también solución de la parte homogénea de la ecuación (4.11) para la función P.

Esto permite factorizar los operadores de (4.11) en la forma

$$\frac{d}{dy^2}\left(\frac{d}{dy^2} - \frac{2}{\sqrt{A}} \tan \frac{y^2}{\sqrt{A}}\right) P = -1 \qquad (4.14)$$

De la cual sigue la solución particular para P.

$$P = -A\left[\frac{(y^2)^2}{4A} \frac{1}{\cos^2 \dfrac{y^2}{\sqrt{A}}} + \frac{y^2}{2\sqrt{A}} \tan \frac{y^2}{\sqrt{A}} + \frac{1}{16}\right] \qquad (4.15)$$

De la semejanza entre las ecuaciones para las funciones P y N se encuentra la solución particular de la ecuación (4.12) para la función N.

$$N = \frac{A}{4} - \frac{A}{8 \cos^2 \dfrac{y^2}{\sqrt{A}}} \qquad (4.16)$$

Combinando los resultados anteriores se encuentra la solución particular para la función de esfuerzos de membrana

$$G = \rho \frac{A^2}{4}\left[\left(\frac{A}{4} \cos^2 \frac{y^2}{\sqrt{A}} - \frac{A}{8}\right)\left(2cb^2 \frac{y^1}{\sqrt{A}} - 1\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{(y^2)^2}{4} + \frac{y^2\sqrt{A}}{4} \operatorname{sen} \frac{2y^2}{\sqrt{A}} + \frac{A}{16} \cos^2 \frac{y^2}{\sqrt{A}}\right)\right] \qquad (4.17)$$

A esta solución particular se debe sumar la solución general de la ecuación homogénea para obtener la solución general de la ecuación parcial de la función potencial de esfuerzos de membrana.

La solución aplicable a un problema particular deberá especificarse por condiciones en los bordes de la porción del catenoide que se haya considerado.

V. DISCUSION

Se ha obtenido una expresión tensorial de la ecuación que debe satisfacer la función potencial de esfuerzos de membrana.

Se tomó el caso particular de superficies mínimas y se encontró una expresión simple de la ecuación. Esta fué integrada para una catenoide.

La teoría tiene algunos inconvenientes: Se observa que las condiciones a la frontera son difíciles de imponer, pues están dadas en términos de derivadas segundas de la función potencial. Los teoremas de existencia de soluciones son muy pocos en estos casos[10].

Se tiene por otra parte en el caso particular de las superficies mínimas una situación peculiar. Es un hecho muy conocido que el tensor

$$T^{\alpha\beta} = T\, a^{\alpha\beta} \tag{5.1}$$

con T constante, es una solución de la ecuación homogénea. Corresponde a la tensión uniforme e isotrópica en una membrana sin peso que toma la forma de superficie mínima.

Otra "constante de integración", menos conocida, es el tensor

$$T^{\alpha\beta} = T\, b^{\alpha}_{\gamma}\, E^{\gamma\beta} \tag{5.2}$$

el cual es simétrico en toda superficie mínima.

Sin embargo, es difícil precisar la función G correspondiente a las soluciones "triviales" (5.1) y (5.2).

Las técnicas para suprimir los inconvenientes aquí descritos serán analizados próximamente.

BIBLIOGRAFIA

1. A.J. McConnell, Applications of Tensor Analysis. Dover Publ. New York. 1957.
2. A. Pücher Beton U. Eisen **33** (1934) 298.
3. A.E. Green y W. Zerna, Theoretical Elasticity. Oxford University Press. Oxford, 1960.
4. A. Beles y M. Mihailescu, The Indian Concrete Journal (1960) p. 140.
5. E. Piña, Tesis. Universidad de México. 1962.
6. L.P. Eisenhart, A Tratise on The Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publ. New York. 1960.
7. H. Sagan, Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics. John Wiley & Sons. New York. 1961.
8. W. Zerna, Z. Angew.Math.Mech. **31**, (1951) 272.
9. H.L. Langhaar, J. of Appl. Mech. **20**, (1953) 178.
10. D.L. Bernstein, Existence Theorems in Partial Differential Equations. Princeton University Press. New Jersey, 1950.