DEL POTENCIAL DE UN PUNTO MASA A LAS ECUACIONES DEL CAMPO EN LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF

Carlos Graef-Fernández
Instituto de Física, Universidad Nacional de México
Centro Nuclear de México

(Recibido: 30 Julio 1968)

RESUMEN

En este artículo se obtienen las ecuaciones del campo gravitacional de la Teoría de Birkhoff a partir del tensor potencial de un punto masa en reposo en un marco de referencia inercial. Este tensor se define como el potencial newtoniano multiplicado por el tensor de Kronecker. Por medio de una transformación de Lorentz se obtiene el tensor potencial de un punto masa en movimiento uniforme. Este tensor potencial se generaliza al caso del movimiento acelerado. Para este campo gravitacional de un punto masa en movimiento acelerado se define un gradiente del campo. Se calcula el flujo de este gradiente a través de una hipersuperficie que encierra a un arco de la línea de universo del punto masa generador del campo. Con ayuda del teorema de la divergencia de Gauss en el espacio-tiempo, se obtienen las ecuaciones del campo en la Teoría de Birkhoff.

ABSTRACT

In this paper the field equations of Birkhoff's gravitational theory are obtained, starting with the gravitational potential tensor of a mass-point at rest at the origin of an inertial reference frame. We postulate this tensor to be the Newtonian gravitational potential multiplied by Kronecker's delta. By a Lorentz transformation we obtain the gravitational potential tensor of a mass-point moving with constant velocity. We generalize this tensor to the case of a mass-point in accelerated motion.

A gradient of the gravitational field is defined. We construct a closed hypersurface which encompasses an arc of the word-line of the mass-point which generates the field. The field equations are obtained by applying Gauss theorem to the flux of the gradient through the closed hypersurface.

The gradient of the gravitational field contains terms which depend on the acceleration of the mass-point generating the field. The flux of the gradient through the hypersurface is independent on the acceleration of the mass-point. This acceleration does not appear in the field equations.

INTRODUCCION

Considérese un punto masa M moviéndose arbitrariamente en el espacio físico. Llamemos L a la línea de universo de este punto masa en el espacio-tiempo de Minkowski. Suponemos que L es una línea de clase C^2, de manera que se pueda hablar del cuadrivector velocidad $\hat{V}$ del punto masa y de su cuadrivector aceleración $\hat{A}$. Utilizamos la letra "M" para designar tanto al punto masa mismo, como a su masa. Sea P un acontecimiento particular en la línea de universo L del punto masa. Sea T el tiempo correspondiente al acontecimiento P y sean X, Y, Z las coordenadas cartesianas del punto del espacio físico correspondiente a P. Las coordenadas de P en el espacio tiempo de Minkowski son entonces: $P(T, X, Y, Z)$. Usaremos la notación tensorial definida por las siguientes identidades:

$$X^1 \equiv T\ ;\ X^2 \equiv X\ ;\ X^3 \equiv Y;\ X^4 \equiv Z\,.$$

El cuadrado del elemento de arco del espacio-tiempo de Minkowski es entonces:

$$dS^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2\ ;$$

$$dS^2 = (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2 - (dX^4)^2\,.$$

Introduciendo el tensor métrico fundamental Δ_{ij} del espacio-tiempo de Minkowski, se obtiene:

$$dS^2 = \Delta_{ij}\, dX^i\, dX^j\,.$$

Aquí se está usando la convención de Einstein de sumar sobre índices repetidos; los índices varían de 1 a 4. Estamos utilizando además unidades tales que la velocidad de la luz en el vacío sea igual a 1. Las componentes del tensor métrico fundamental son:

$$\Delta_{11} = 1\ ;$$

$$\Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1\ ;$$

$$\Delta_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j\,.$$

Suponemos que en la línea de universo L hay un origen de los arcos. El acontecimiento P está caracterizado por el arco S. Las coordenadas X^i de P son funciones de S de clase C^2. Las ecuaciones de la línea de universo L son:

$$X^i = X^i(S);\ i = 1,2,3,4.$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector velocidad $\hat{V}$ se definen como:

$$V^i = \frac{dX^i}{dS} \quad .$$

Las componentes contravariantes del cuadrivector aceleración $\hat{A}$ son:

$$A^i = \frac{dV^i}{dS} = \frac{d^2X^i}{dS^2} \quad .$$

Nos interesa el campo gravitacional generado por el punto masa M en un acontecimiento (x^1, x^2, x^3, x^4) del espacio-tiempo. A este acontecimiento le llamamos "acontecimiento del campo". Suponemos que P es el acontecimiento retardado con respecto al acontecimiento del campo en la línea de universo L. Esto significa que la distancia de Minkowski entre el acontecimiento del campo y P es nula:

$$\Delta_{ij}\,(x^i - X^i)(x^j - X^j) = 0 \,.$$

El campo gravitacional se caracteriza por el tensor simétrico doblemente covariante:

$$h_{jk} = \frac{M\,[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{\Delta_{mn}(x^m - X^m)\,V^n}$$

Las V_j son las componentes covariantes del cuadrivector velocidad $\hat{V}$ y se obtienen de las componentes contravariantes en la forma usual

$$V_j = \Delta_{jm}\,V^m \quad .$$

Llamemos $\hat{r}$ al cuadrivector que liga a la posición retardada P del punto masa M con el acontecimiento del campo. Las componentes de este cuadrivector son:

$$\hat{r} = (x^1 - X^1, x^2 - X^2, x^3 - X^3, x^4 - X^4).$$

El denominador de h_{jk} es entonces igual al producto escalar de los cuadrivectores $\hat{r}$ y $\hat{V}$ con la métrica de Minkowski:

$$\hat{r} \cdot \hat{V} = \Delta_{mn} (x^m - X^m) V^n .$$

El tensor potencial del campo[1] tiene entonces la expresión:

$$h_{jk} = \frac{M(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} . \qquad (1)$$

Esta forma del tensor potencial se obtiene por una simple transformación de Lorentz del tensor del campo de un punto masa[2], en reposo, en el origen de un sistema de coordenadas de un marco de referencia inercial:

$$h_{jk} = \frac{M}{r} \delta_{jk} .$$

Aquí figura la distancia r a la masa en reposo y el tensor de Kronecker. Nosotros postulamos que el tensor (1) es el tensor potencial de un punto masa en movimiento acelerado y demostramos que las ecuaciones del campo de la teoría de Birkhoff son una consecuencia de esta hipótesis. Consideremos una de las 16 componentes del tensor potencial del campo. Sea h_{jk} la componente en la que fijamos nuestra atención. Esta componente es una función de las coordenadas del acontecimiento del campo (x^1, x^2, x^3, x^4). Consideremos ahora las cuatro derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^1}, \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^2}, \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^3}, \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^4} \right) .$$

Estas cuatro funciones son las componentes covariantes de un cuadrivector que llamamos "gradiente del campo" y que designamos con:

$$\hat{\nabla} h_{jk} .$$

Lo que hemos llamado gradiente del campo es en realidad el tensor triplemente covariante $\dfrac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}$. Para el gradiente del campo gravitacional generado por el punto masa M en movimiento arbitrario[3], se obtiene:

$$\hat{\nabla} h_{jk} = \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{2M\,(V_j\,A_k + A_j\,V_k)}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2}\;\hat{r} \\[2em] - \dfrac{M\,(2V_j\,V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\;(\hat{r}\cdot\hat{A} - 1)\,\hat{r} \\[2em] - \dfrac{M\,(2V_j\,V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2}\;\hat{V} \;. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Con el propósito de obtener el flujo del gradiente del campo gravitacional a través de una hipersuperficie que encierre a un arco de la línea de universo L del punto masa M, calculamos primero ese flujo a través de las caras de una hipercuña[4] que tiene por filo un elemento de arco $PQ = dS$ de esa línea de universo. Sea entonces Q el punto de L correspondiente al arco $S + dS$.

Consideremos las líneas de universo de cuatro fotones imaginarios que salen del punto masa cuando éste está en el punto (X, Y, Z) del espacio físico, en el instante T, en las cuatro direcciones definidas por las siguientes colatitudes θ y longitudes φ:

$$\theta,\ \varphi;$$

$$\theta + d\theta,\ \varphi + d\varphi;$$

$$\theta + \delta\theta,\ \varphi + \delta\varphi;$$

$$\theta + d\theta + \delta\theta,\ \varphi + d\varphi + \delta\varphi\,.$$

Llamemos fotolíneas a las líneas de universo de los fotones. Las cuatro fotolíneas definen un elemento de ángulo sólido

$$d\Omega = \operatorname{sen}\theta \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix} \tag{3}$$

La manera de asignar ángulos a las direcciones puede elegirse siempre de manera que este elemento de ángulo sólido sea positivo. Consideremos ahora fotones que salen del punto masa M en todas las direcciones contenidas dentro del elemento de ángulo sólido $d\Omega$. Las fotolíneas correspondientes forman un fotohaz elemental con vértice en el acontecimiento $P(T,X,Y,Z)$ y son generatrices del cono de luz del futuro con vértice en P, al que llamamos "cono 1". Suponemos que el punto masa emite en todos los acontecimientos entre P y Q fotones imaginarios con fotolíneas paralelas a las del fotohaz descrito antes. El fotohaz, con vértice en Q, está formado por generatrices de un cono de luz del futuro que llamamos "cono 2".

Para contruir la hipercuña hay que cortar todas estas fotolíneas con una hipersuperficie Γ. Suponemos que cada fotolínea corta a Γ en un solo acontecimiento. La fotolínea que sale de P, en la dirección definida por los ángulos θ, φ, corta a Γ en el acontecimiento:

$$(T + r,\ X + r\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ Y + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ Z + r\cos\theta)\,.$$

La hipersuperficie Γ está definida por la ecuación:

$$r = F(S, \theta, \varphi) \quad .$$

El conjunto de los acontecimientos de Γ que son intersecciones con fotolíneas que salen del punto masa M dentro del ángulo sólido $d\Omega$, en todas las posiciones entre P y Q, forman la "tapa de la hipercuña". La hipercuña está limitada: por su filo PQ; por su tapa, que es un elemento de la hipersuperficie Γ; por sus dos caras cónicas, que son porciones de los conos 1 y 2 limitadas por las intersecciones de esos conos con Γ; y por último por sus dos "flancos" que son caras llanas. Uno de los flancos está definido por el filo PQ y por las fotolíneas en las direcciones (θ, φ) y $(\theta, + \delta\theta, \varphi + \delta\varphi)$.

El otro flanco está definido por el filo PQ y por las fotolíneas en las direcciones $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ y $(\theta + d\theta + \delta\theta, \varphi + d\varphi + \delta\varphi)$. Los dos flancos contienen al cuadrivector $\widehat{PQ}$ que es paralelo al cuadrivector velocidad $\hat{V}$. Cualquier acontecimiento de un flanco está unido a la posición retardada correspondiente de M, por un cuadrivector $\hat{r}$. Los cuadrivectores que representan a los elementos de hipersuperficie que son los flancos, son por lo tanto perpendiculares a los cuadrivectores $\hat{r}$ y $\hat{V}$. Como el gradiente del campo es una combinación lineal de $\hat{r}$ y $\hat{V}$, su flujo a través de los dos flancos de la hipercuña es nulo.

Calculemos ahora el flujo del gradiente del campo que sale a través de la tapa de la hipercuña. Como ese gradiente es una combinación lineal de $\hat{r}$ y de $\hat{V}$, obtenemos primero los flujos de esos dos cuadrivectores que salen a través de la tapa. La tapa es un elemento de la hipersuperficie Γ, que se caracteriza por medio de un cuadrivector $d\hat{\Omega}$. El flujo del cuadrivector $\hat{r}$ que sale a través de la tapa, es:

$$-\hat{r} \cdot d\hat{\Omega} = +r^2 \operatorname{sen}\theta\,(\hat{r} \cdot \hat{V})\, dS \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix}$$

Para el flujo del cuadrivector $\hat{V}$ que sale a través de la tapa, se obtiene:

$$-\hat{V}\cdot d\hat{\Omega} = -r \operatorname{sen}\theta\,(\hat{r}\cdot\hat{V})\,\frac{\partial F}{\partial S}\,dS \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix}$$

Estas dos expresiones se simplifican mucho introduciendo el hipervolumen de la hipercuña:

$$dv = \frac{1}{3}\,r^2\,(\hat{r}\cdot\hat{V})\operatorname{sen}\theta\,dS \begin{vmatrix} d\theta & d\varphi \\ \delta\theta & \delta\varphi \end{vmatrix}$$

Para los dos flujos obtenemos entonces:

$$-\hat{r}\cdot d\hat{\Omega} = +3dv\,;$$

$$-\hat{V}\cdot d\hat{\Omega} = -\frac{3}{r}\,\frac{\partial F}{\partial S}\,dv\,.$$

Designamos con $\Delta\chi$ al flujo del gradiente del campo gravitacional que sale a través de la tapa de la hipercuña; para este flujo obtenemos:

$$\Delta\chi = \begin{cases} +\dfrac{6M\,(V_j A_k + A_j V_k)}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2}\,dv \\[2ex] -\dfrac{3M\,(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\,(\hat{r}\cdot\hat{A}-1)\,dv \\[2ex] +\dfrac{3M\,(2V_j V_k - \Delta_{jk})}{r\,(\hat{r}\cdot\hat{V})^2}\,\dfrac{\partial F}{\partial S}\,dv \end{cases}$$

Procedemos ahora a calcular el flujo del gradiente del campo gravitacional que sale a través de las caras cónicas de la hipercuña. Nos fijamos primero en la cara cónica situada en el cono 1 de vértice en P. Definimos en esa cara cónica un elemento de hipersuperficie que describimos por medio del cuadrivector $d\hat{\Lambda}$. Un vértice de este elemento está en el extremo del cuadrivector $\hat{\tau}$ que tiene su origen en P. Las componentes contravariantes de $\hat{\tau}$ son:

$$\tau^1 = \tau ;$$

$$\tau^2 = \tau \text{ sen } \theta \cos \varphi ;$$

$$\tau^3 = \tau \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi ;$$

$$\tau^4 = \tau \cos \theta .$$

Otro vértice del elemento de hipersuperficie está en el extremo del cuadrivector $\hat{\tau} + d\hat{\tau}$ que tiene su origen en P. El elemento de hipersuperficie tiene aristas a lo largo de las cuatro fotolíneas que definen el elemento de ángulo sólido $d\Omega$. El cuadrivector que caracteriza al elemento de hipersuperficie es:

$$d\hat{\Lambda} = \tau \, d\tau \, d\Omega \, \hat{\tau} .$$

Nótese que para calcular el flujo del gradiente del campo que sale a través del elemento $d\hat{\Lambda}$ hay que hacer $\hat{r} = \hat{\tau}$ en la expresión del gradiente (2). Llamemos $d\psi_1$ a este flujo; obtenemos entonces:

$$d\psi_1 = - \hat{\nabla} h_{jk} \cdot d\hat{\Lambda} ;$$

$$d\psi_1 = + M\tau \frac{[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{\tau} \cdot \hat{V})} d\tau \, d\Omega .$$

Para obtener el flujo del gradiente del campo que sale a través de la cara cónica de la hipercuña, es necesario integrar $d\psi_1$ con respecto a τ desde 0 hasta r. Hay que tener en cuenta que la fracción $\dfrac{\tau}{(\hat{\tau} \cdot \hat{V})}$ no depende de τ. Llamemos ψ_1 al flujo del gradiente del campo que sale a través de la cara cónica 1 de la hipercuña:

$$\psi_1 = Mr^2 \frac{[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} d\Omega .$$

El flujo del gradiente del campo que sale a través de la cara cónica 2 de la hipercuña es igual a:

$$\psi_2 = - \psi_1 - \Delta\psi_1 .$$

El incremento $\Delta\psi_1$ se debe a que el vértice de la cara cónica 2 está en Q; y que Q corresponde al arco $S + dS$ en la línea de universo de M. El flujo neto del gradiente del campo que sale por las dos caras cónicas de la hipercuña es entonces:

$$-\Delta\psi_1 = \left\{ \begin{array}{l} - \dfrac{2M[V_j A_k + A_j V_k]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} r^2 \, dS \, d\Omega \\[2em] + \dfrac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} (\hat{r} \cdot \hat{A}) \, r^2 \, dS \, d\Omega \\[2em] - \dfrac{M[2V_j V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r} \cdot \hat{V})} \dfrac{\partial F}{\partial S} r \, dS \, d\Omega . \end{array} \right.$$

La expresión para $- \Delta\psi_1$ se simplifica mucho introduciendo el hipervolumen dv de la hipercuña; se obtiene:

$$
-\Delta\psi_1 = \begin{cases} - \dfrac{6M\,[V_j\,A_k + A_j\,V_k]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2}\,dv \\[2ex] + \dfrac{3M\,[2V_j\,V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\,(\hat{r}\cdot\hat{A})\,dv \\[2ex] - \dfrac{3M\,[2V_j\,V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^2}\,\dfrac{\partial F}{\partial S}\,dv \end{cases}
$$

El flujo neto $d\Phi$ del gradiente del campo que sale por todas las caras de la hipercuña es entonces:

$$
d\Phi = \Delta\chi - \Delta\psi_1\,;
$$

$$
d\Phi = \frac{3M\,[2V_j\,V_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}\,dv\,.
$$

La fracción

$$
\frac{3dv}{(\hat{r}\cdot\hat{V})^3}
$$

es independiente de r y la designamos como elemento de hiperángulo sólido dH. El flujo $d\Phi$ es entonces

$$
d\Phi = M\,[2V_j\,V_k - \Delta_{jk}]\,dH\,. \tag{4}
$$

El elemento de hiperángulo sólido dH se puede expresar en términos del elemento de ángulo sólido $d\Omega$ y del elemento de arco dS:

$$dH = \frac{3dv}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^3} = \frac{r^2\, d\Omega\, dS}{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2} \ . \tag{5}$$

Consideremos ahora que la hipersuperficie Γ es cerrada y que encierra a un arco JK de la línea de universo L del punto masa M (Figura). Nuestro propósito es calcular el flujo del gradiente del campo que sale de Γ. Con este fin construimos todas las hipercuñas, limitadas por Γ, que tienen por filo el elemento de arco PQ. Llamamos "embudo" al hipersólido constituido de ese modo. El embudo está limitado por:

1) el cono 1 con vértice en P;
2) el cono 2 con vértice en Q;
3) la hipersuperficie Γ.

El flujo dE del gradiente del campo que sale a través de la hipersuperficie que limita al embudo, se obtiene integrando $d\Phi$ sobre todas las hipercuñas. Para realizar esta integración es conveniente expresar en (4) al elemento de hiperángulo sólido dH en términos del ángulo sólido $d\Omega$, según la ecuación (5). Con el propósito de ejecutar las operaciones conviene elegir $d\Omega$ de manera que en la ecuación (3) $d\varphi$ y $\delta\theta$ sean nulos. Esto equivale a definir a $d\Omega$ por las fotolíneas de los fotones imaginarios que salen de M en las cuatro direcciones:

$$(\theta, \varphi);\ (\theta + d\theta, \varphi);\ (\theta, \varphi + d\varphi);\ (\theta + d\theta, \varphi + d\varphi) \ .$$

La $d\Omega$ adquiere entonces la forma usual:

$$d\Omega = \text{sen}\ \theta\, d\theta\, d\varphi \tag{6}$$

El flujo dE se obtiene integrando $d\Phi$ con respecto a θ desde 0 hasta π y con respecto a φ desde 0 hasta 2π. En esta integración permanece constante el cuadrivector velocidad $\hat{V}$. El flujo dE es entonces:

$$dE = M\,[2V_j\,V_k - \Delta_{jk}]\int dH\,.$$

Llamemos $d\eta$ a la integral del hiperángulo sólido. Utilizando (5) y (6) se obtiene

$$d\eta = dS\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi}{[V^1 - V^2\operatorname{sen}\theta\cos\varphi - V^3\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - V^4\cos\theta]^2}$$

Calculando la integral doble directamente, se obtiene:

$$d\eta = 4\pi\,dS$$

Es fácil llegar a este resultado por otro camino. La integral doble tiene que ser invariante en las transformaciones de Lorentz. Elijamos a aquel marco de referencia en el que el cuadrivector velocidad $\hat{V}$ tiene la dirección del eje de los tiempos. En ese marco

$$V^1 = 1;\; V^2 = V^3 = V^4 = 0$$

El valor de $d\eta$ se obtiene de un modo inmediato.

Para el flujo dE del gradiente del campo que sale por la hipersuperficie que limita al embudo, obtenemos:

$$dE = 4\pi\,M\,[2V_j\,V_k - \Delta_{jk}]\,dS\,.$$

El flujo total E del gradiente del campo gravitacional que sale a través de la hipersuperficie Γ es entonces:

$$E = \int_J^K 4\pi\,M\,[2V_j\,V_k - \Delta_{jk}]\,dS \qquad (7)$$

Esta integral es una integral de línea que se extiende a lo largo de la línea de universo L del punto masa M, desde el acontecimiento J en que ésta penetra dentro de la hipersuperficie Γ, hasta el acontecimiento K en que L sale de Γ. Para obtener las ecuaciones del campo considérese una esfera infinitesimal de masa M y que tiene un radio ϵ en su sistema en reposo. El volumen en reposo de esa esfera es:

$$\frac{4}{3}\pi\epsilon^3$$

En vez del punto masa M utilizamos ahora esa esfera infinitesimal. Sea L la línea de universo del centro de la esfera. Imaginamos que la esfera se mueve como un cuerpo rígido, con el cuadrivector velocidad $\hat{V}$, mientras su centro recorre el elemento de arco dS que liga a los acontecimientos P y Q. Al moverse la esfera rígidamente, de su posición inicial a su posición final, cada uno de sus puntos describe en el espacio-tiempo un elemento de arco dS. El hipervolumen barrido por la esfera en el espacio-tiempo, cuando su centro va de P a Q, se obtiene muy fácilmente en el sistema en reposo de la esfera. Este hipervolumen es:

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi\epsilon^3\, dS\ .$$

Es obvio que $d\tau$ es invariante.

Consideremos ahora la hipersuperficie Θ generada en el espacio-tiempo por los arcos de las líneas de universo de los puntos de la superficie de la esfera, cuando el centro de ésta va de P a Q. El flujo dE del gradiente del campo gravitacional de la esfera que sale a través de Θ es, según la ecuación (7):

$$dE = 4\pi M\,[2V_j\, V_k - \Delta_{jk}]\, dS$$

Según la generalización del teorema de Gauss a un espacio de cuatro dimensiones, el flujo del gradiente de una función a través de una hipersuperficie que limita un hipervolumen, es igual a la integral del D'Alembertiano de esa función extendida al hipervolumen. Aplicando este teorema obtenemos:

$$\Box\, h_{jk}\, d\tau = 4\pi M\, [2V_j\, V_k - \Delta_{jk}]\, ds$$

Substituyendo en esta ecuación el valor de $d\tau$, se obtiene:

$$\Box\, h_{jk}\, \frac{4}{3}\, \pi\epsilon^3\, ds = 4\pi M\, [2V_j\, V_k - \Delta_{jk}]\, ds$$

De donde se deduce inmediatamente:

$$\Box\, h_{jk} = 4\pi \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\epsilon^3}\, [2V_j\, V_k - \Delta_{jk}]$$

La masa de la esfera dividida entre su volumen en el marco de referencia en reposo, es igual a su densidad en reposo:

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\epsilon^3} = \rho_0$$

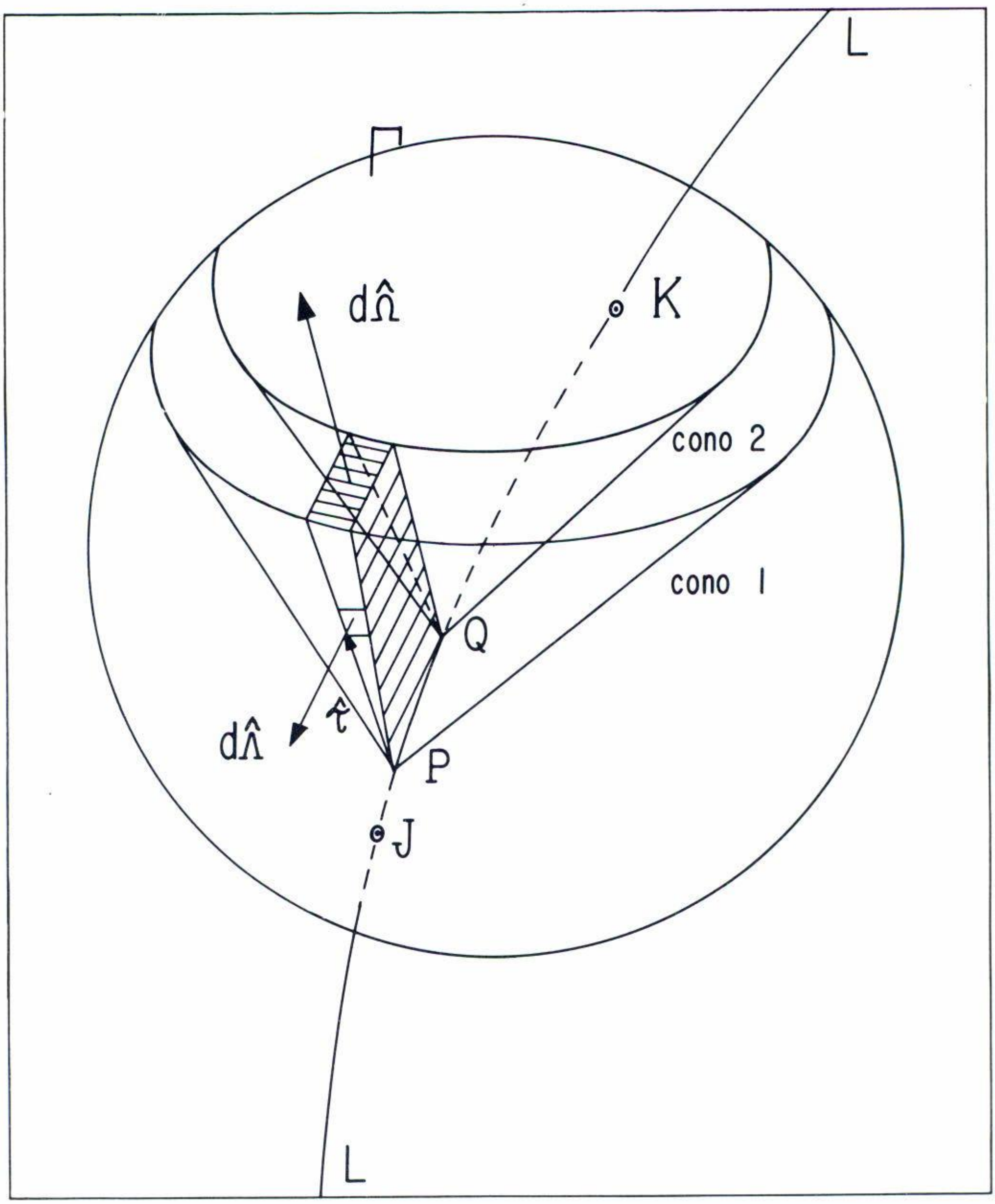
Para el D'Alembertiano del potencial del campo gravitacional se obtiene entonces:

$$\Box\, h_{jk} = 8\pi\rho_0\, [V_j\, V_k - \frac{1}{2}\, \Delta_{jk}] \tag{8}$$

La ecuación (8) es la ecuación del campo gravitacional[5] en la que fundó G.D. Birkhoff su teoría de la gravitación. Birkhoff obtuvo el segundo miembro de la ecuación (8) como 8π por el tensor de la energía y las cantidades de movimiento de un fluido perfecto, en el que la velocidad de propagación de una perturbación es igual a la velocidad de la luz. En este artículo, la ecuación del campo (8) es una consecuencia de postular como tensor potencial gravitacional de un punto masa en movimiento acelerado, a la expresión (1).

REFERENCIAS

1. P. Kustaanheimo, Some remarks on the general relativity theory of Birkhoff. Societas Scientiarum Fennica. Commentationes Physico Mathematicae (Helsinki), **17**, 11, (Julio 1955).
2. G.D. Birkhoff, Matter, electricity and gravitation in flat space-time. Proceedings of the National Academy of Sciences **29**, 8, pp. 920-928, (1943).
3. C. Graef-Fernández, El gradiente del campo gravitacional de Birkhoff, Rev.Mex.Fís., **10**, 3, p. 192, (1961).
4. C. Graef-Fernández, El hiperángulo sólido en la teoría de la relatividad especial, Rev.Mex.Fís., **11**, 2,3, pp. 129-154, (1962).
5. G.D. Birkhoff, Flat space-time and gravitation. Proceedings of the National Academy of Sciences **30**, 10, pp. 324-334, (1944).



L
Γ
$d\hat{\Omega}$
K
cono 2
cono 1
Q
$\hat{\tau}$
$d\hat{\Lambda}$
P
J
L